Физика. Математика. Лекция 2

Лектор: Загитов Г.Н.

Применение дифференциала для приближенных вычислений.

Из определения производной функции: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$,

или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения y. Отбрасывая вторую часть в этой формуле, можем написать: $\Delta y=f'(x)\Delta x$ или $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x$; отсюда можем вычислить значение функции в точке $x+\Delta x$: $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$; если $f(x)$ и $f'(x)$ можно легко вычислить в точке x.

Пример: вычислить без таблицы $\sin 29^\circ$

- $\sin 29^\circ = \sin(30^\circ - 1^\circ)$, поэтому примем $x = 30^\circ$, а $\Delta x = -1^\circ$.
- $\sin 29^\circ = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ(-0{,}017) = 0{,}485.$
- $1^\circ = 3{,}14/180 = 0{,}017$
- $\sin' x = \cos x$
- Вычислите без таблицы lg101.

Частные производные функций

- Допустим дана функция от двух переменных z=f(x,y).

Считая y постоянной величиной найдем частное производное по x:

$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$; и считая x постоянной-частное производное по y:

$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Частные и полный дифференциал функции

- Находим частные дифференциалы функции по переменным x и y:

$dz_x = z'_x dx = \frac{\partial z}{\partial x} dx$; $dz_y = z'_y dy = \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Сумма частных дифференциалов называется полным дифференциалом.

$dz(x,y) = dz_x + dz_y = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Задача: найдите абсолютную погрешность в определении объема цилиндра, если при измерениях были получены радиуса r= (6±0,1) см и высоты h=(10±0,2) см.

- Решение: Объем цилиндра: V=πr^2h.

Принимая за погрешность дифференциал функции получаем:

$\Delta V = dV = V'_r dr + V'_h dh = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h = \pi r(2h\,\Delta r + r\,\Delta h) = 3{,}14 \times 6(2 \times 10 \times 0{,}1 + 6 \times 0{,}2) = 603\ \text{см}^3$.

Интегральное исчисление.

Первообразная функция.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^{2} x} dx = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^{2} x} dx = -ctgx + c$$

$$\int \cos x dx = Sinx + C$$

$$\int \sin x dx = -Cosx + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^{2}} = arctgx + C$$

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C\ ;$$

$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C\ ;$$

Свойства:

$$1.\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$$

$$2.d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

$$3.\int dF(x) = F(x)+C;$$

$$4.\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$$

где u, v, w – некоторые функции от x.

$$5.\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$$

Пример:

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$$

Методы интегрирования

А) Непосредственное интегрирование.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + \cos x\right)dx = \int \frac{5}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{2x}dx + \int \cos x dx = 5\int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \cos x dx =$$

$$= 5\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2}\ln|x| + \sin x + C = 10\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln|x| + \sin x + C.$$

Б) Способ подстановки (замены переменных).

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = sinx$, $dt = cosxdt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

В) Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Пример.

$$\int e^{2x}\cos x dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

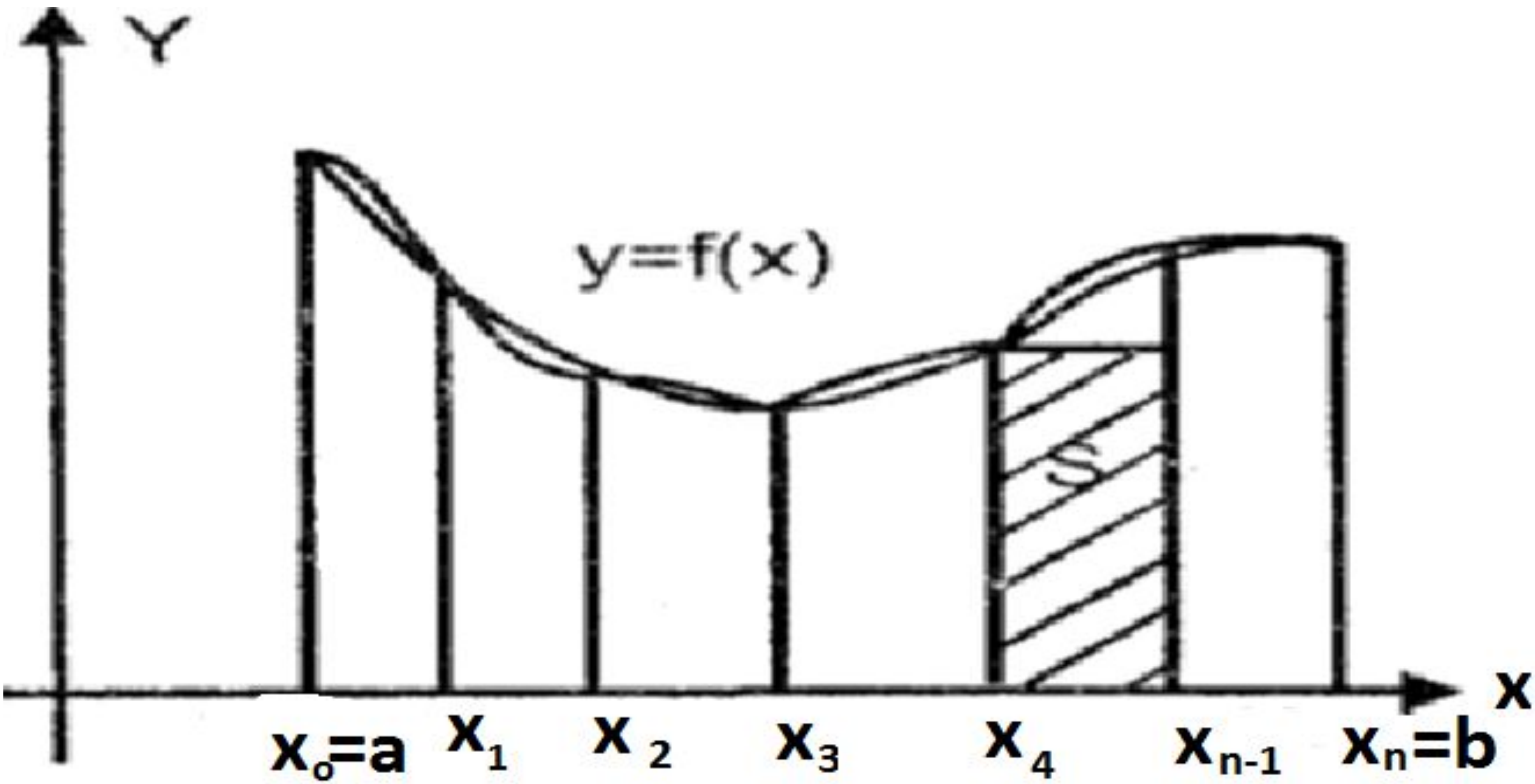
$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

Определенный интеграл

- Пусть на отрезке [ab] задана непрерывная функция y=f(x)



Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \; \ldots \; , x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i *интегральная сумма* $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b]: $\int_a^b f(x)dx.$

Свойства определенного интеграла.

$$1.\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$$

$$2.\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3.\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

4. Если f(x) $\le \phi(x)$ на отрезке [a, b] a < b, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$$

5.Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

$$7. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

8. Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница) Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \mathrm{F(x)}\Big|_a^b$$

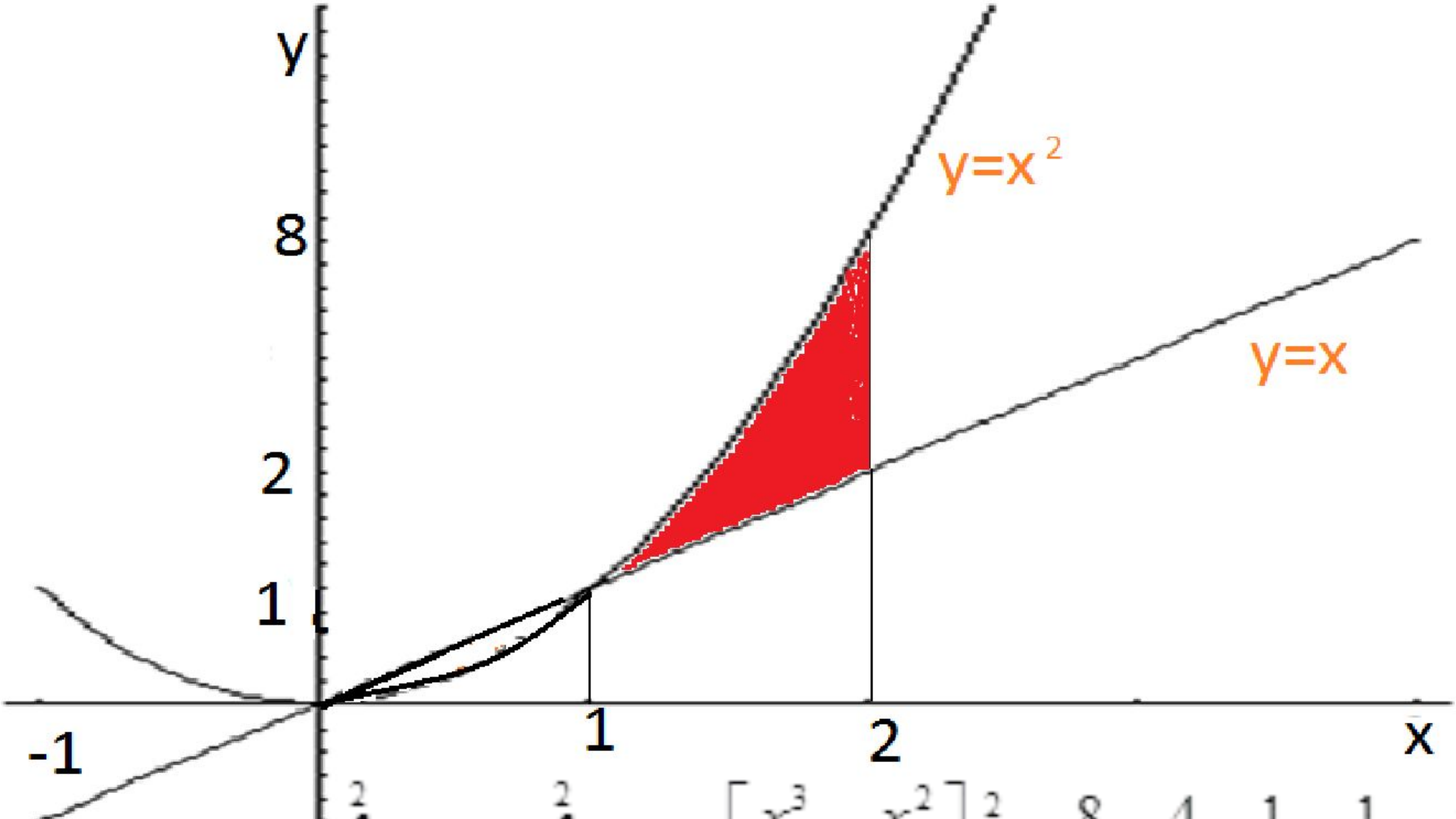
Пример

.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную (аргумент) x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0.$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Например, дифференциальные уравнения

$$y' - 3xy^2 + 4 = 0$$

$$t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = x^2 + Cx$, где C – любая постоянная величина, является решением дифференциального уравнения $y'x - x^2 - y = 0$.

Заметим, что данное дифференциальное равнение имеет бесконечное множество решений, так как C – произвольная постоянная величина.

Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения *n*-го порядка называется функция y=f (x,C_1,C_2,..,C_n), зависящая от *x* и *n* произвольных независимых постоянных, обращающая это уравнение в тождество при любых значениях постоянных C_1,C_2,..,C_n.

Частным решением дифференциального уравнения *n*-ого порядка называется решениеy=f(x, $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$), где $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ - фиксированные числа, которое получается из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным C_1,C_2,..,C_n.