Сигналы

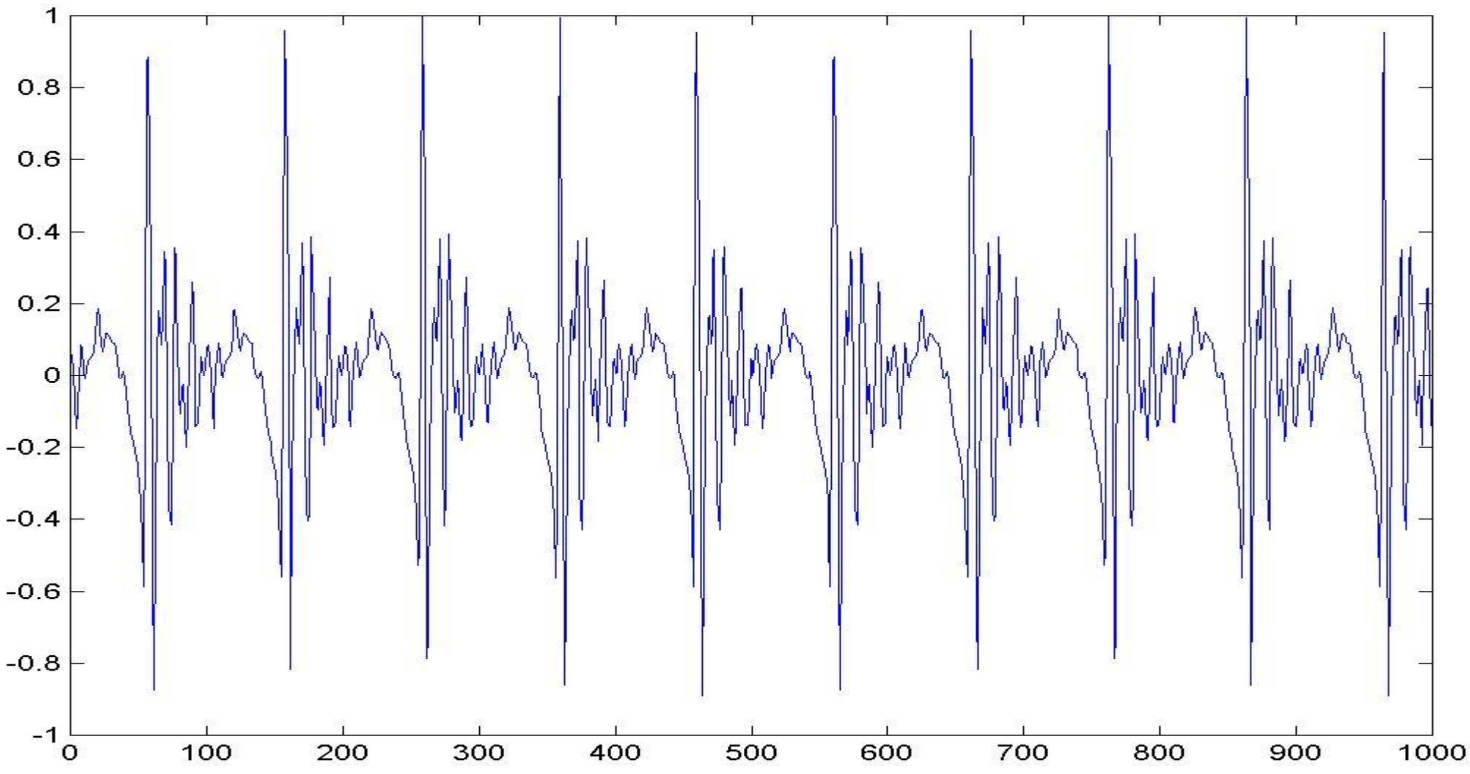
- **Сигнал** – физический процесс, несущий в себе информацию. Параметры процесса изменяются в соответствии с сообщением, которое необходимо передать.
- Понятие «**сигнал**» – **абстракция** конкретных физических процессов (сила тока, напряжение и пр.)
- **Математическая модель сигнала** – функция от времени, тип которой зависит от типа сигнала.

Сигналы

- Периодические – непериодические

- Непрерывные - дискретные

Периодический сигнал



Периодический сигнал – сигнал, форма которого регулярно повторяется через некоторый временной интервал (называемый периодом)

Математическое определение

Сигнал *x(t)* называется периодическим с периодом *T*, если

$$x(t + T) = x(t) \text{ для всех } t$$

Свойства

- Если *T* – период колебания, то *2T, 3T, 4T*, …, а также *-T, -2T, -3T, -4T*, … являются периодами данного колебания
- Всякое периодическое колебание является бесконечно длинным (от минус бесконечности до плюс бесконечности)

Вывод

- Строго говоря, периодическое колебание – абстракция, которой в реальности нет (хотя бы потому, что в реальном мире бесконечно длинных сигналов нет)
- Кроме того, в реальности сигналы повторяют себя не точно
- Однако периодический сигнал – это очень полезная абстракция

Частота

- Если *T* – период колебания, то частотой колебания называется величина $F = 1/T$
- Частота измеряется в Герцах (Гц)
- Чем больше Герц, тем выше частота (и тем больше колебаний совершается за единицу времени)

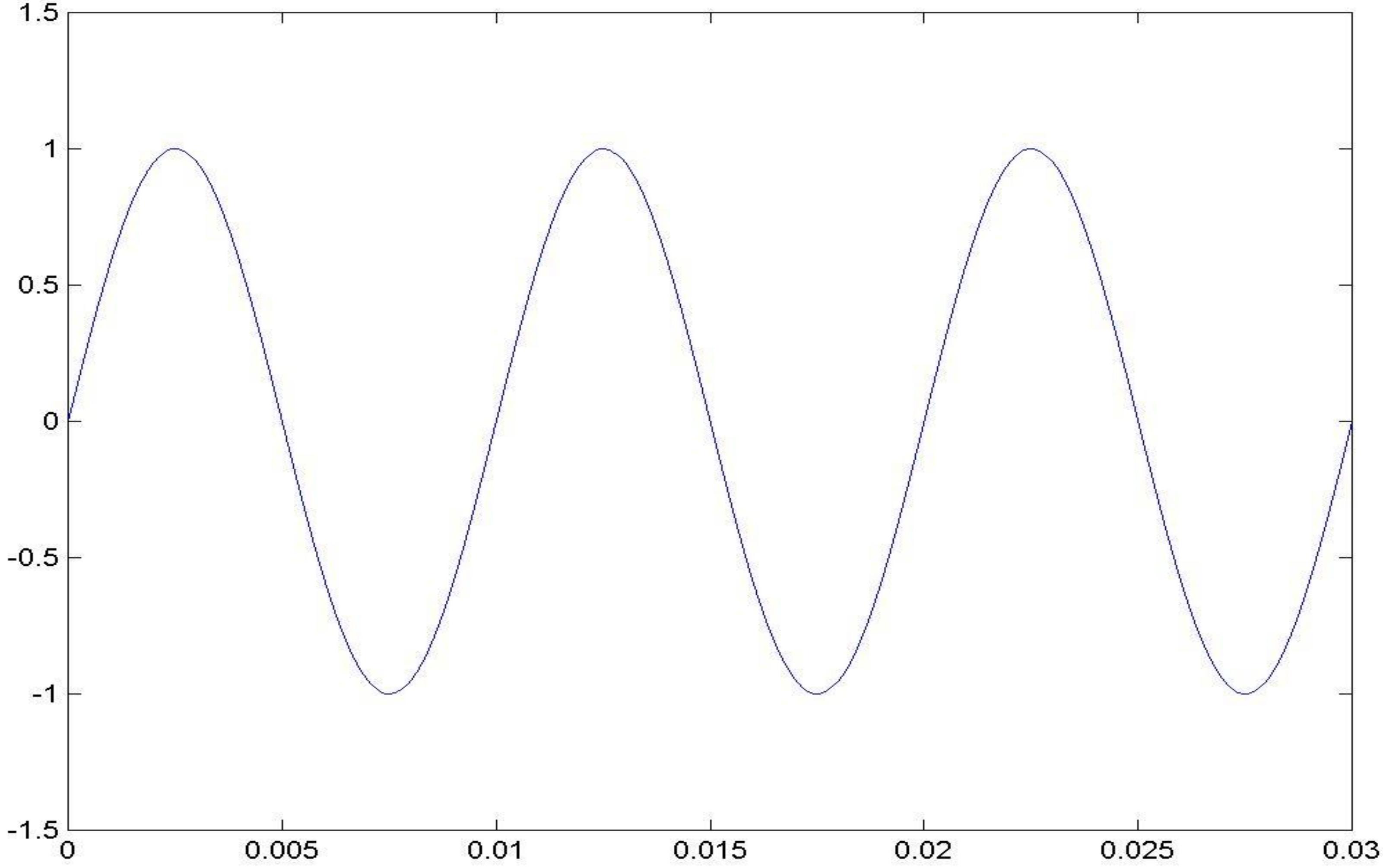
Круговая частота

- Если F – частота колебания, то **круговой частотой** того же колебания называют

  $\omega = 2\pi F$ (π - число «пи», 3,14…)

- Круговая частота измеряется в радианах в секунду

Гармоническое колебание



Физические примеры гармонических колебаний

- Маятник
- Грузик на пружинке

Общая запись

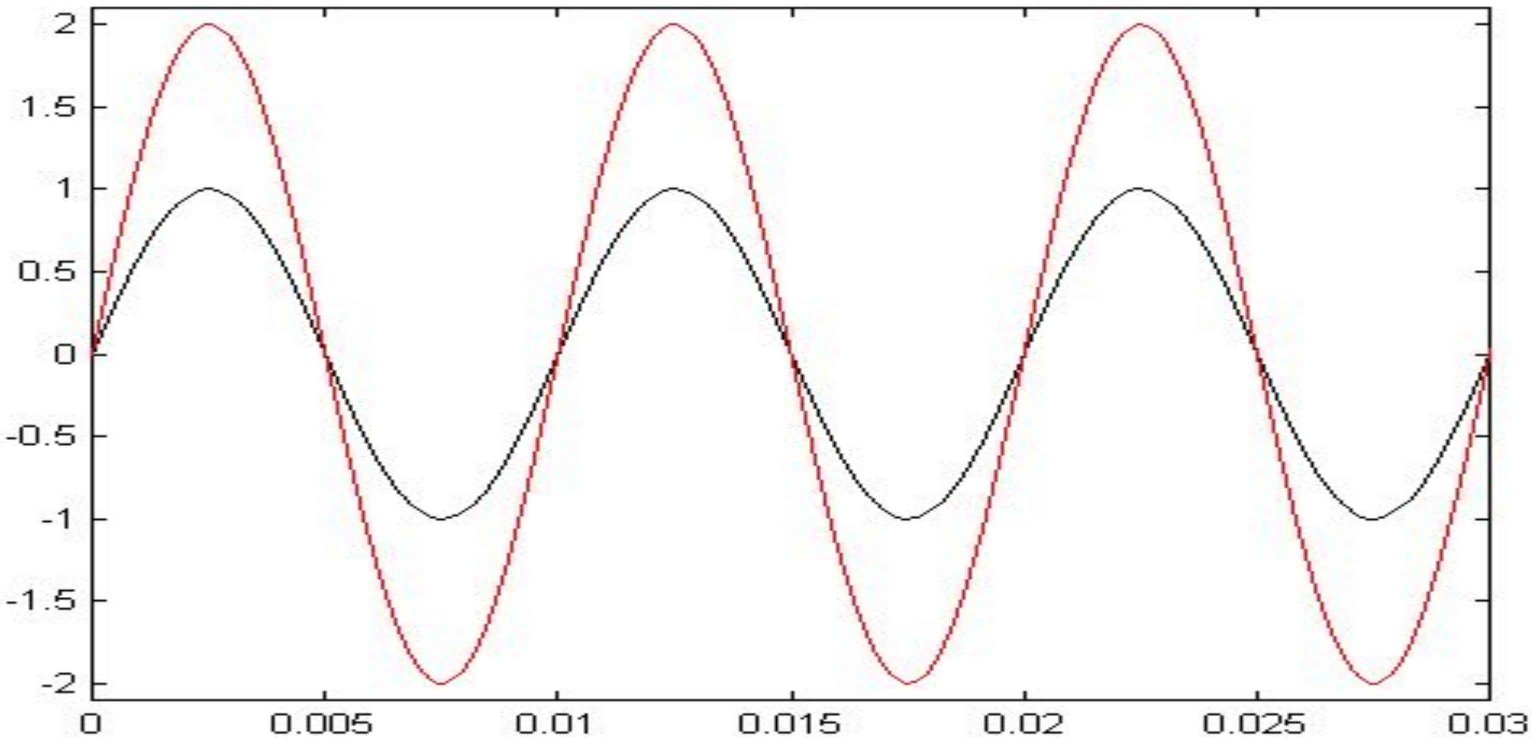
- $x(t) = A*\sin(2*\pi*F + \phi)$

A – амплитуда гармонического колебания

F – частота гармонического колебания

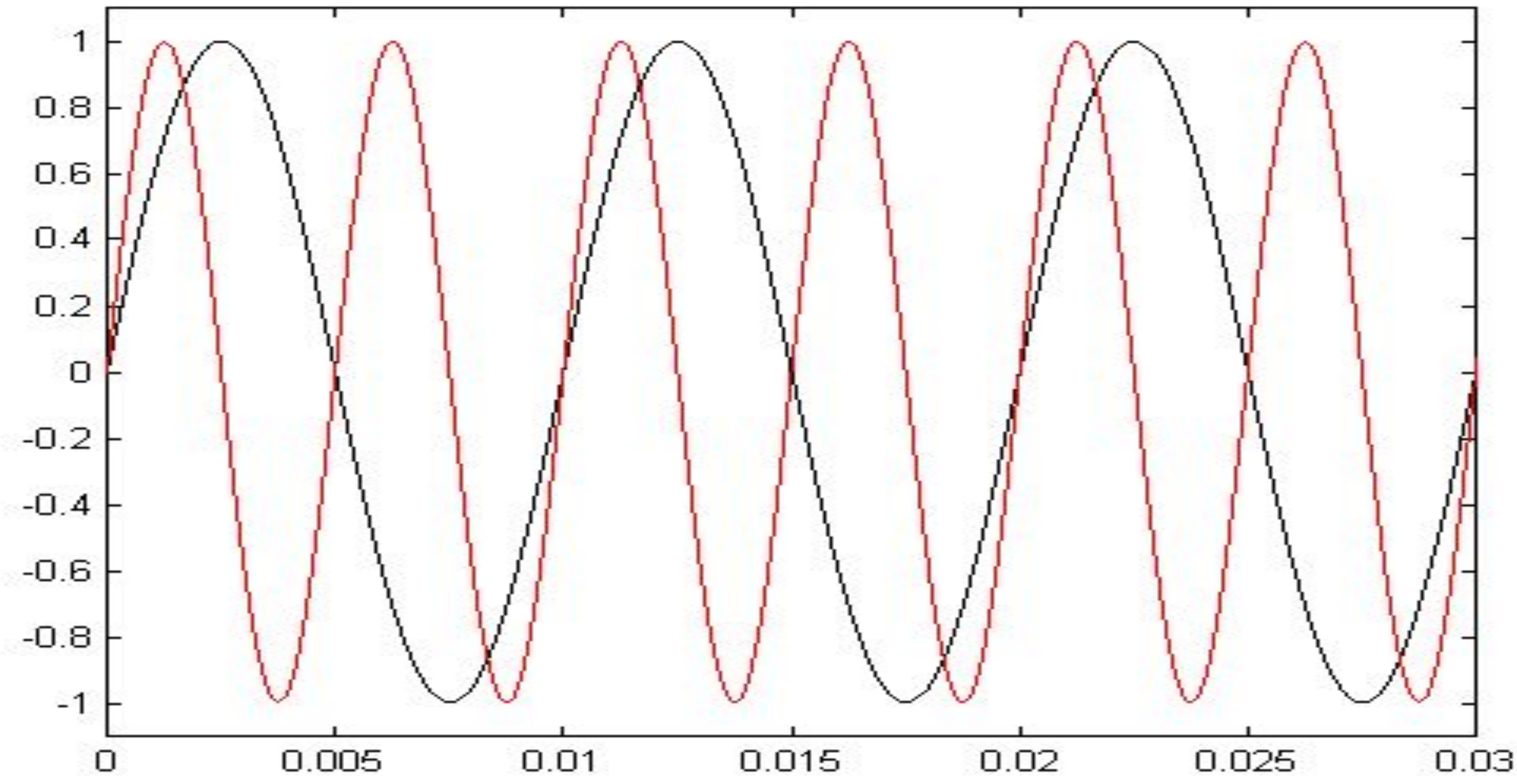
ϕ - фаза гармонического колебания

Колебания с разными амплитvдами



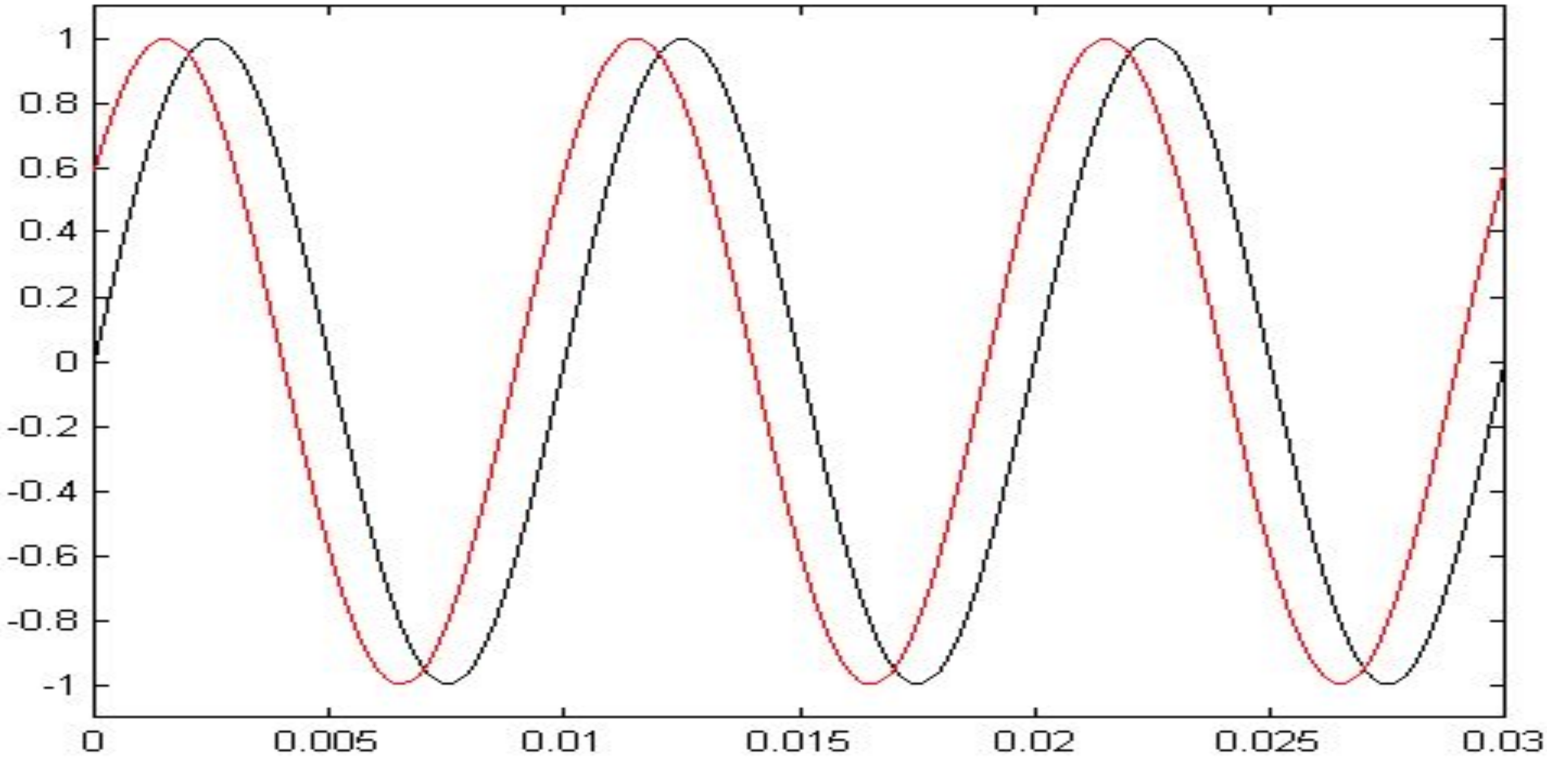
- **Физический смысл** – размах красного маятника в два раза больше, чем размах черного

Колебания с разными частотами



- Физический смысл – красный маятник колеблется в два раза чаще, чем черный

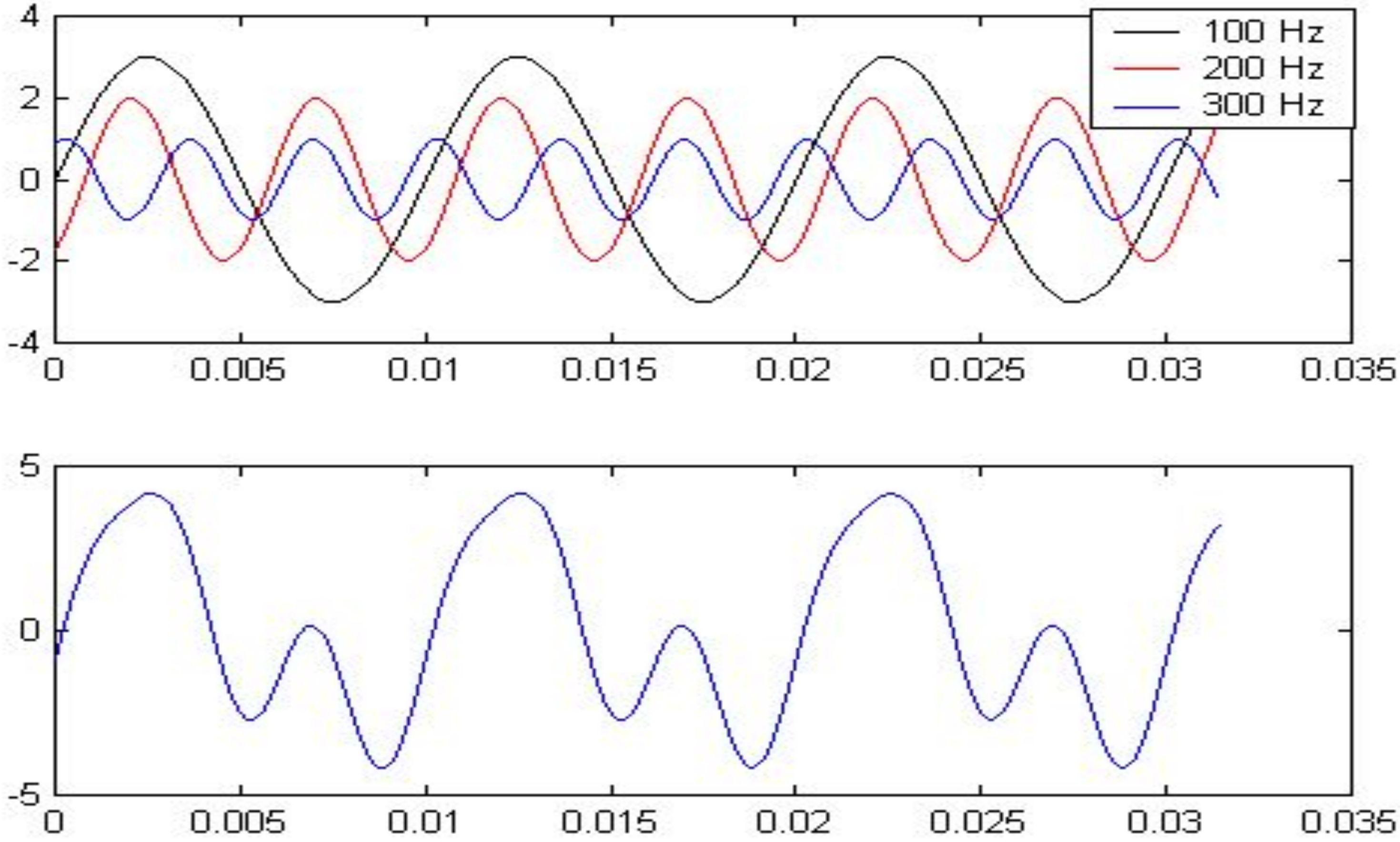
Колебания с разными фазами



Физический смысл – красный маятник начал колебаться раньше, чем черный маятник

Можно собирать периодические колебания, суммируя гармонические с разными частотами, амплитудами и фазами

Пример



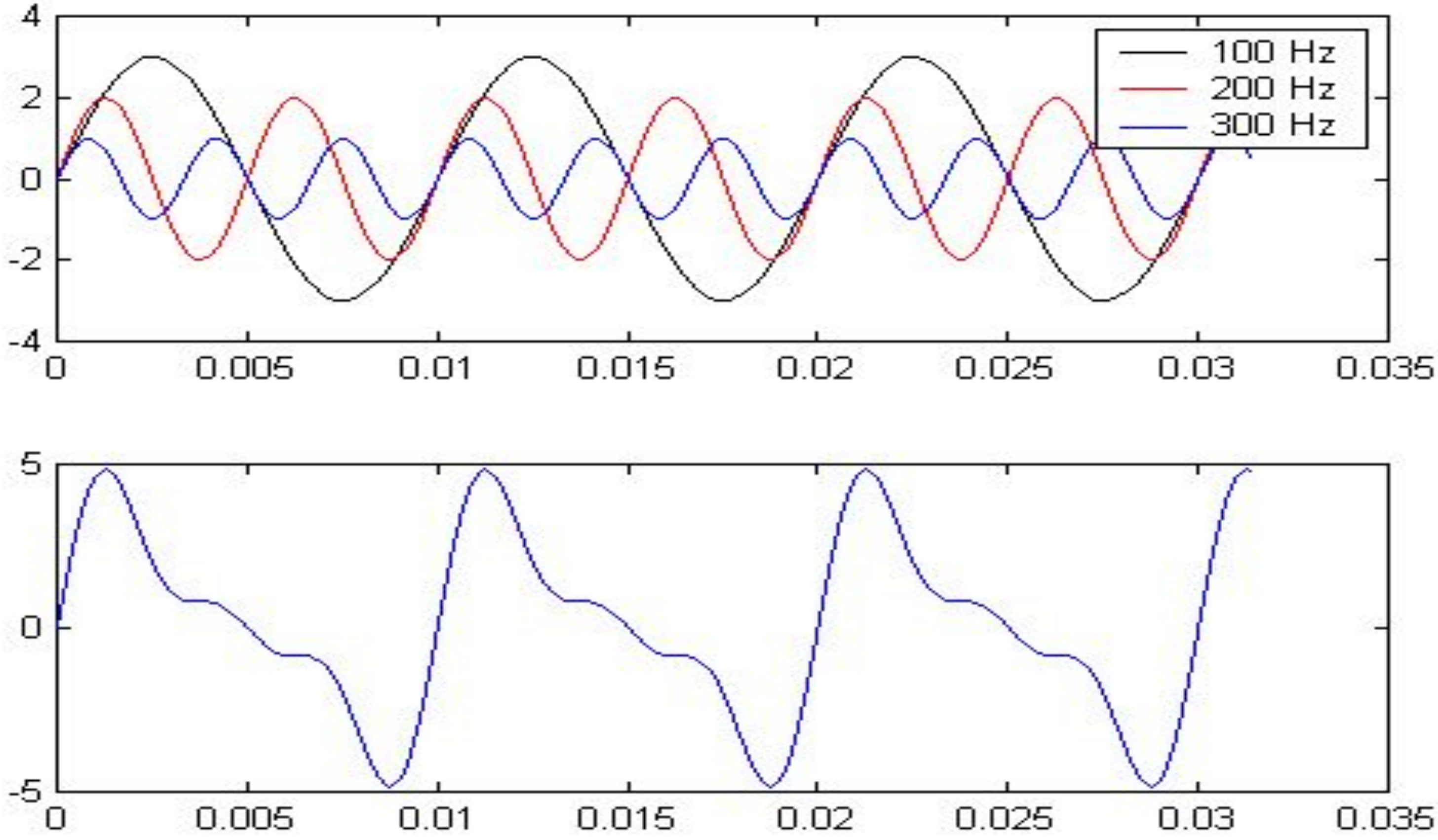
- Суммируются 3 гармонических колебания с частотами 100 Гц, 200 Гц, 300 Гц

Функция

- **sum_3harmonics** – суммирует и рисует 3 гармоники с частотами 100 Гц, 200 Гц, 300 Гц
- Амплитуды и фазы подбираются пользователем произвольно

Пример

sum_3harmonics([3,2,1],[0,0,0])



Можно ли произвольное периодическое колебание разложить на сумму гармонических?

Теорема Фурье

Всякое периодическое колебание частоты *F* можно получить в результате суммирования бесконечного числа гармоник с частотами *F, 2F, 3F, 4F, ...,* и **специально подобранными** амплитудами и фазами

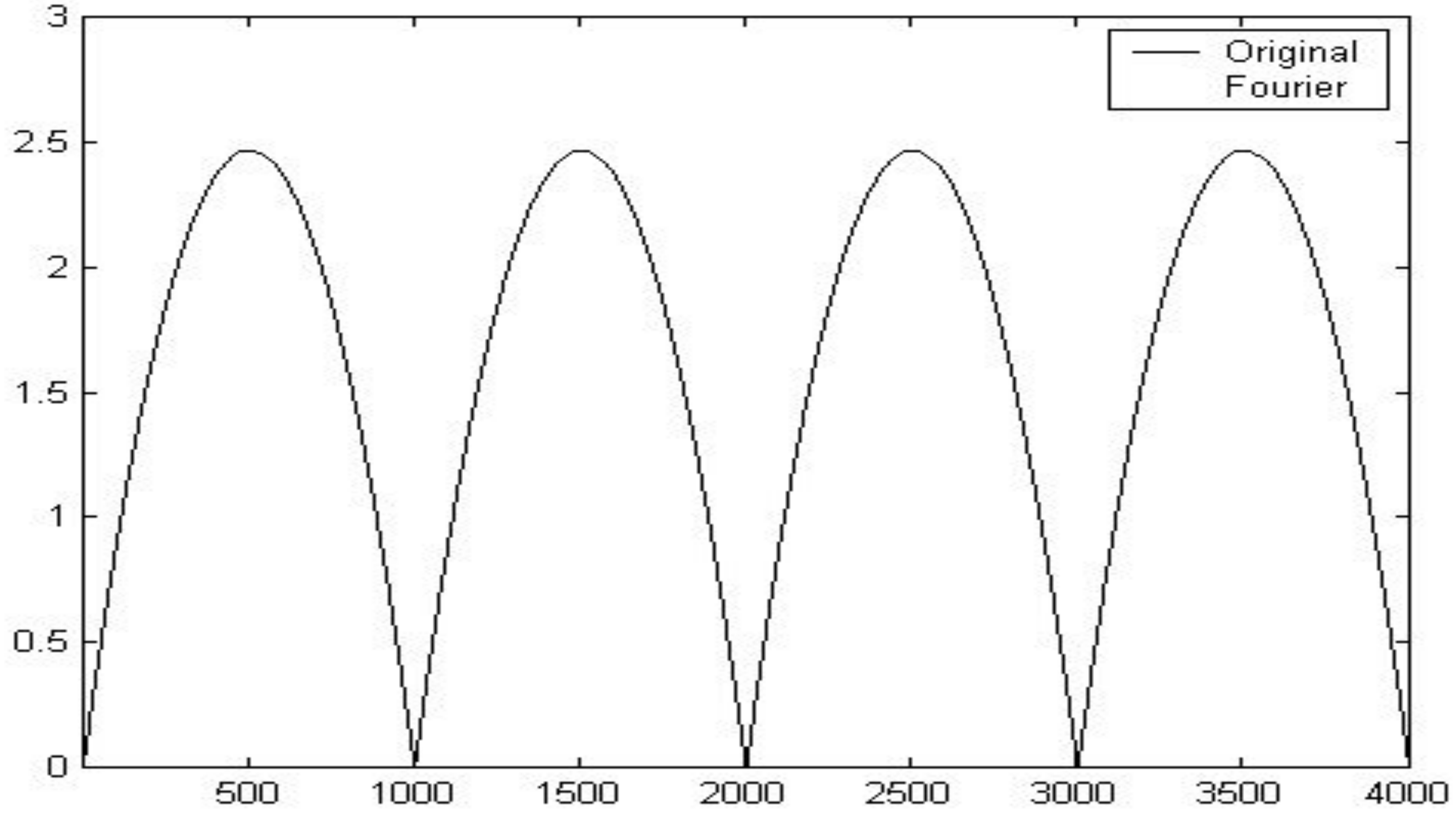
$x(t) = A_0 + A_1 sin(2\pi Ft + \phi_1) + A_2 sin(2\pi 2Ft + \phi_2) + A_3 sin(2\pi 3Ft + \phi_3) + ...$ *(и т.д.) ИЛИ*

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kFt + \varphi_k)$$

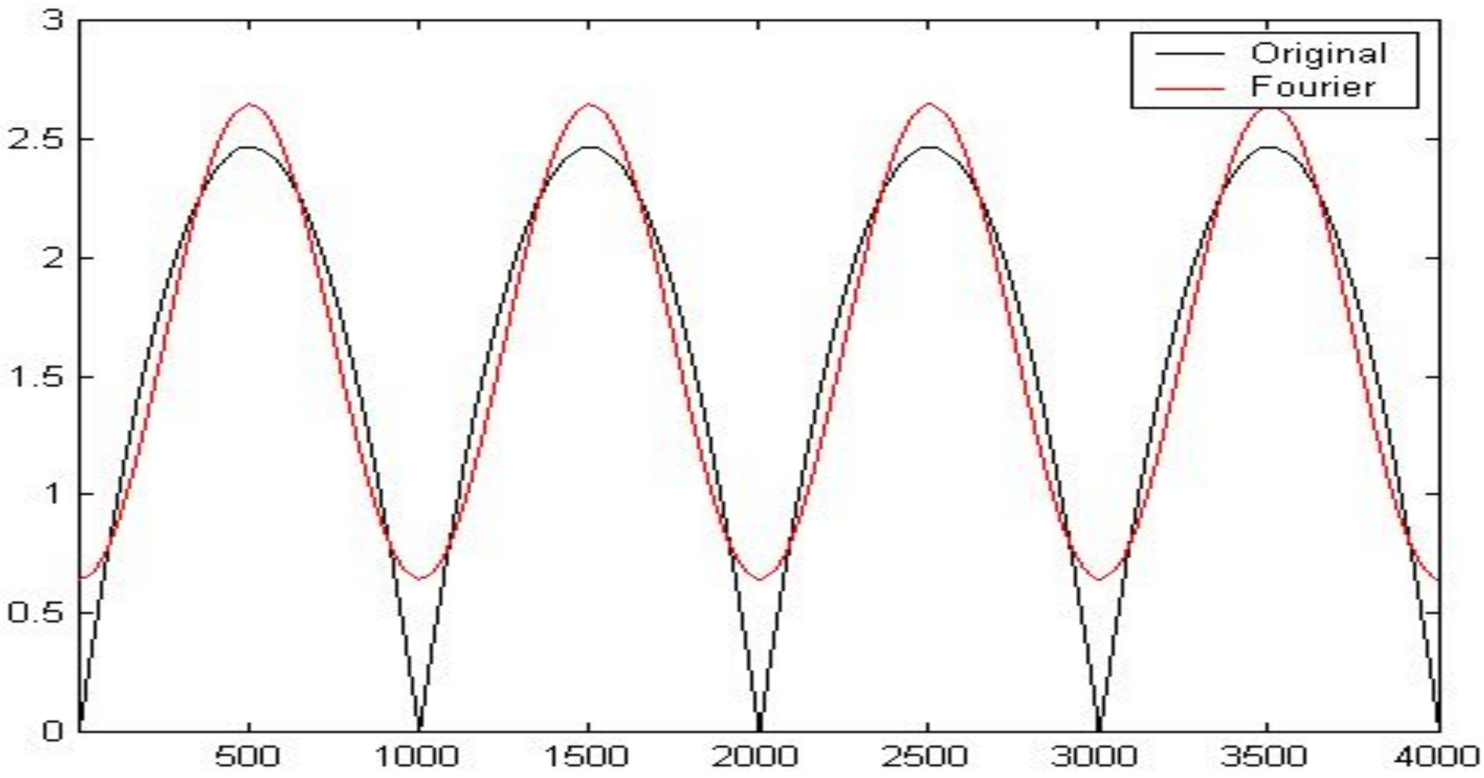
Терминология

- Гармоника с частотой *F* называется **основной гармоникой**
- Гармоники с частотами 2*F, 3F, 4F, …,* называются **высшими гармониками** (или **обертонами**)
- Постоянная A_0 называется **постоянной составляющей**
- В англояз. лит-ре постоянная составляющая обозначается как *DC* (от *direct current*), а все гармоники – как AC (от *alternating current*)

Пример: возьмем следующий сигнал

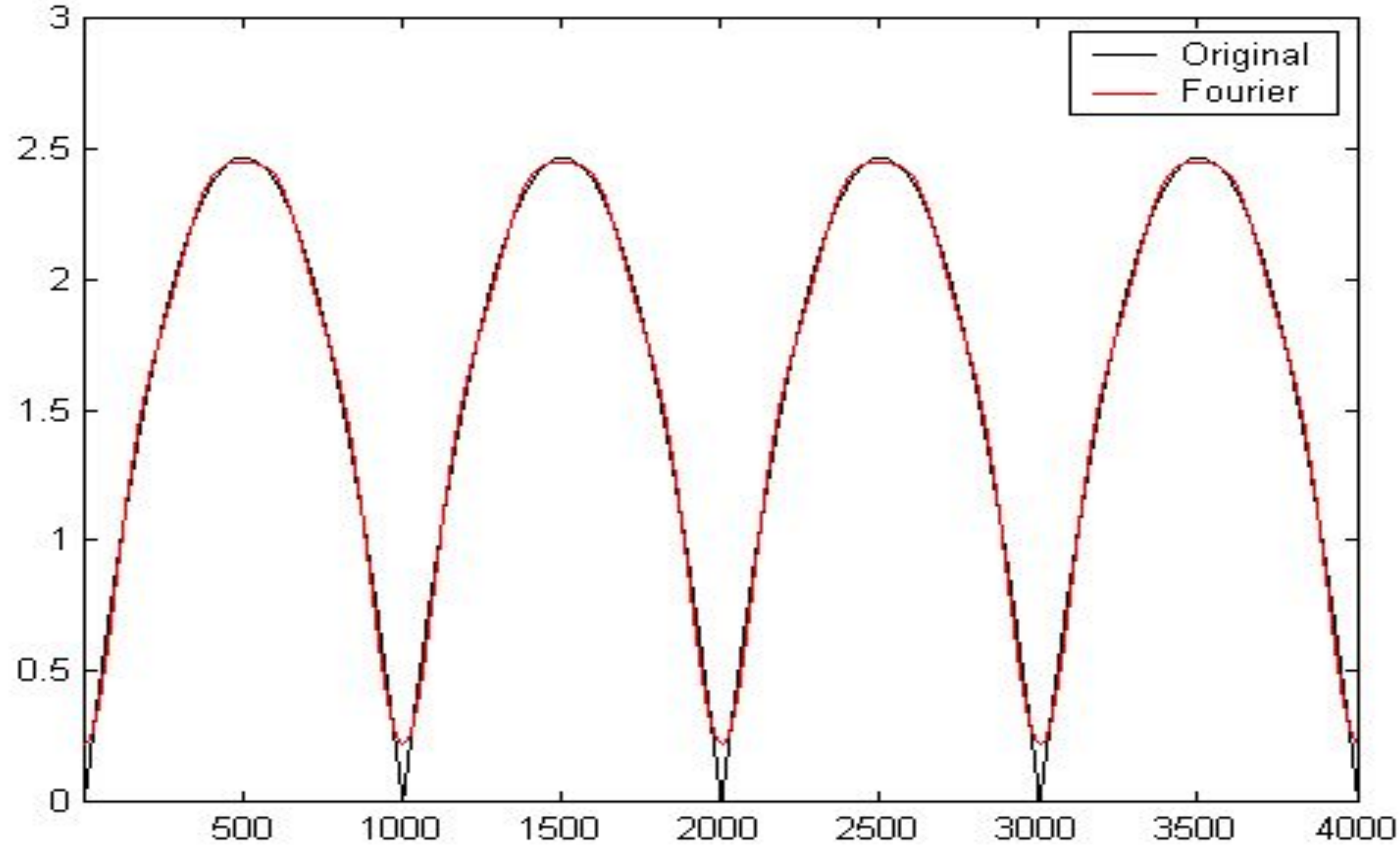


1 гармоника



fourier_demo1(1)

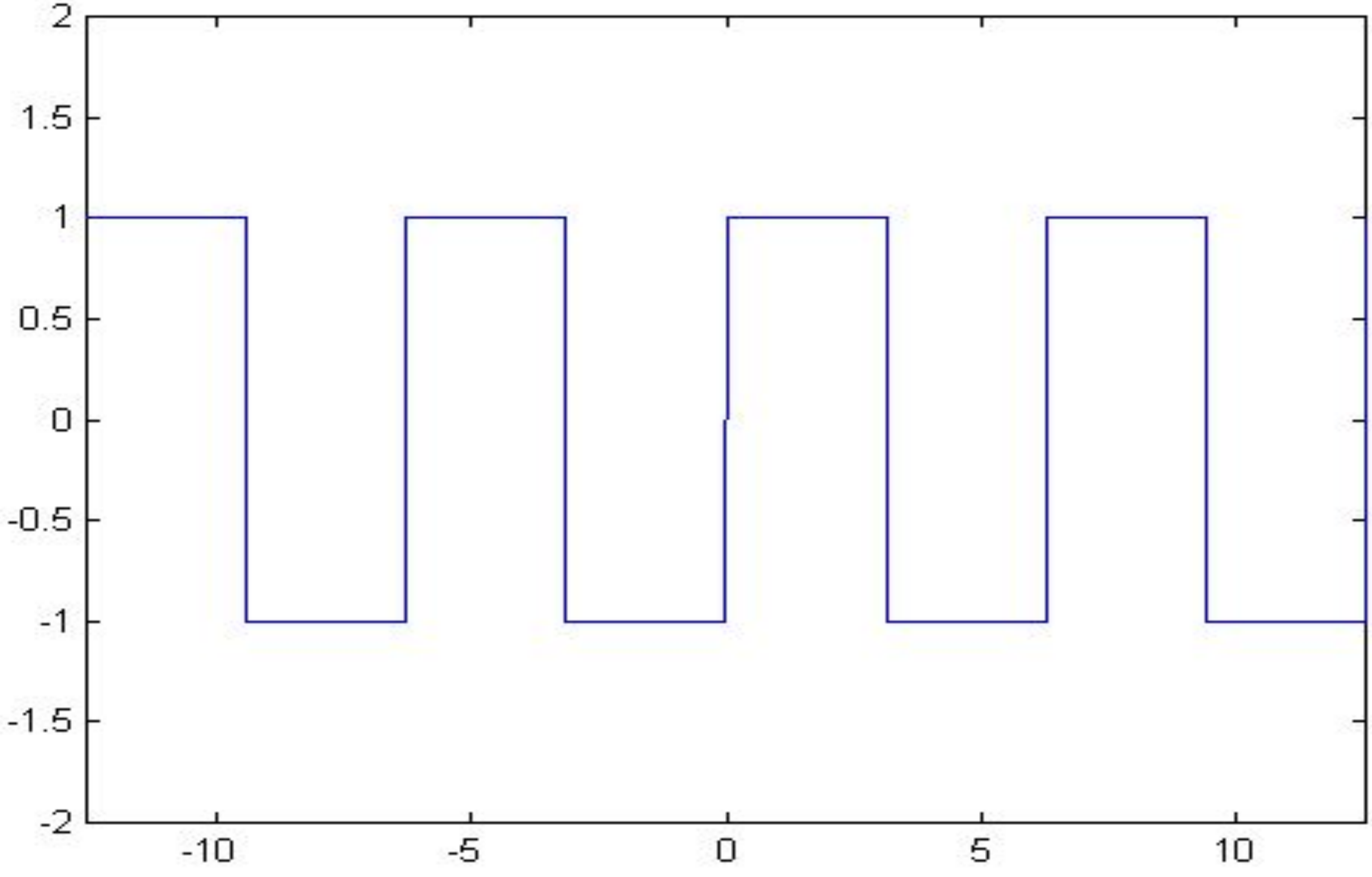
4 гармоники



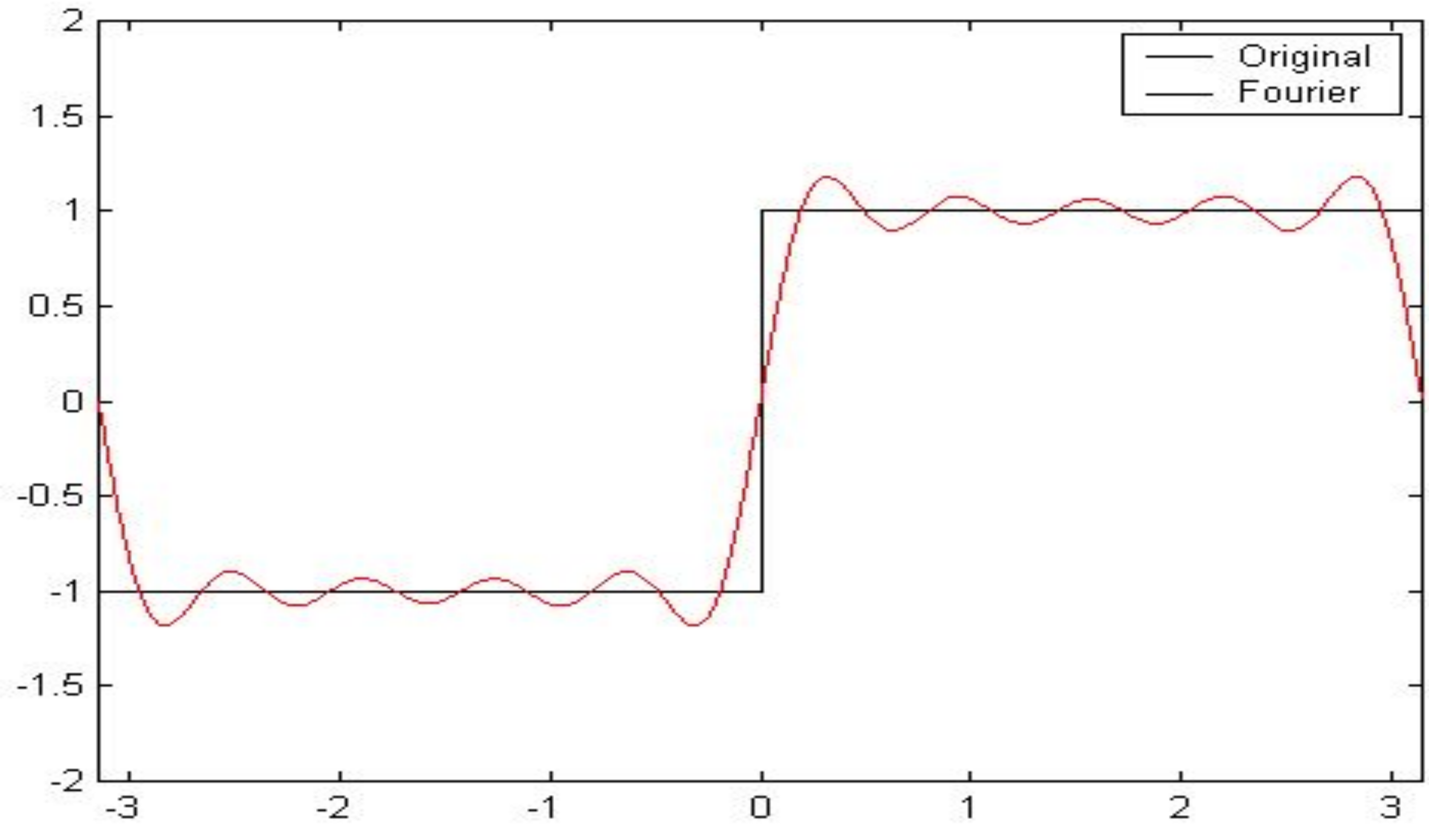
fourier_demo1(4)

Явление Гиббса

Пример

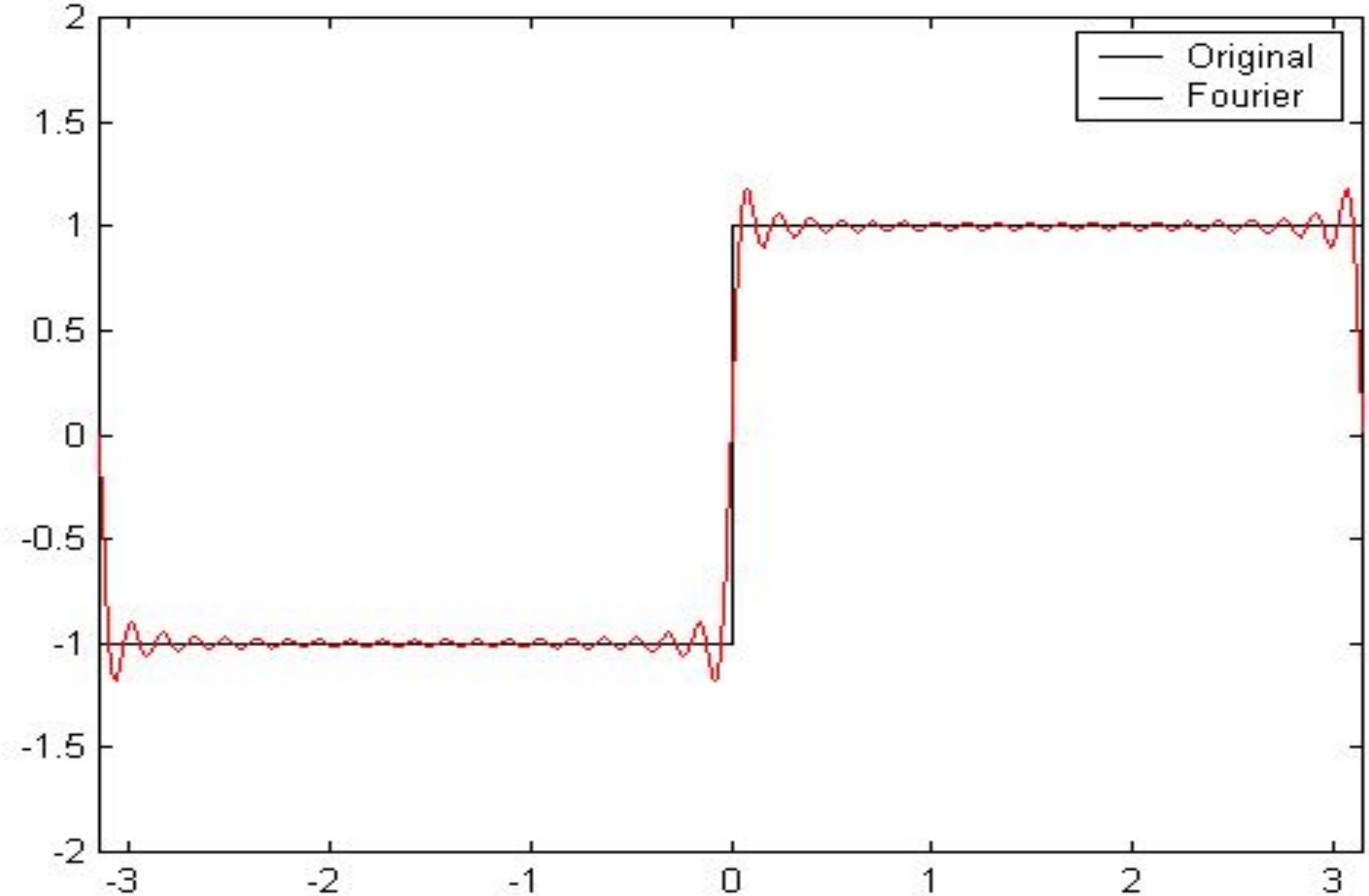


5 гармоник



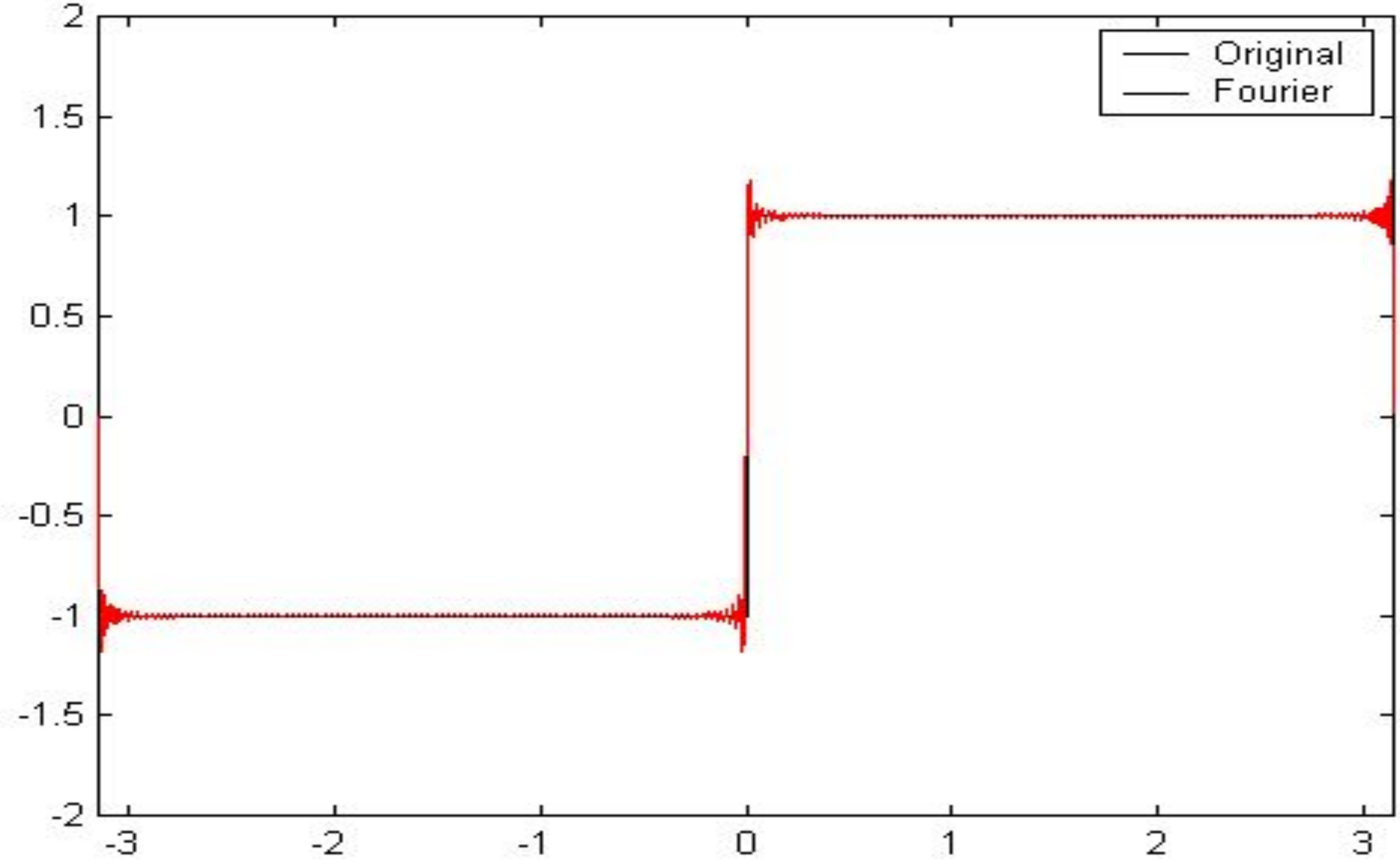
fourier_demo2(5)

20 гармоник



fourier_demo2(20)

100 гармоник



fourier_demo2(100)

Явление Гиббса

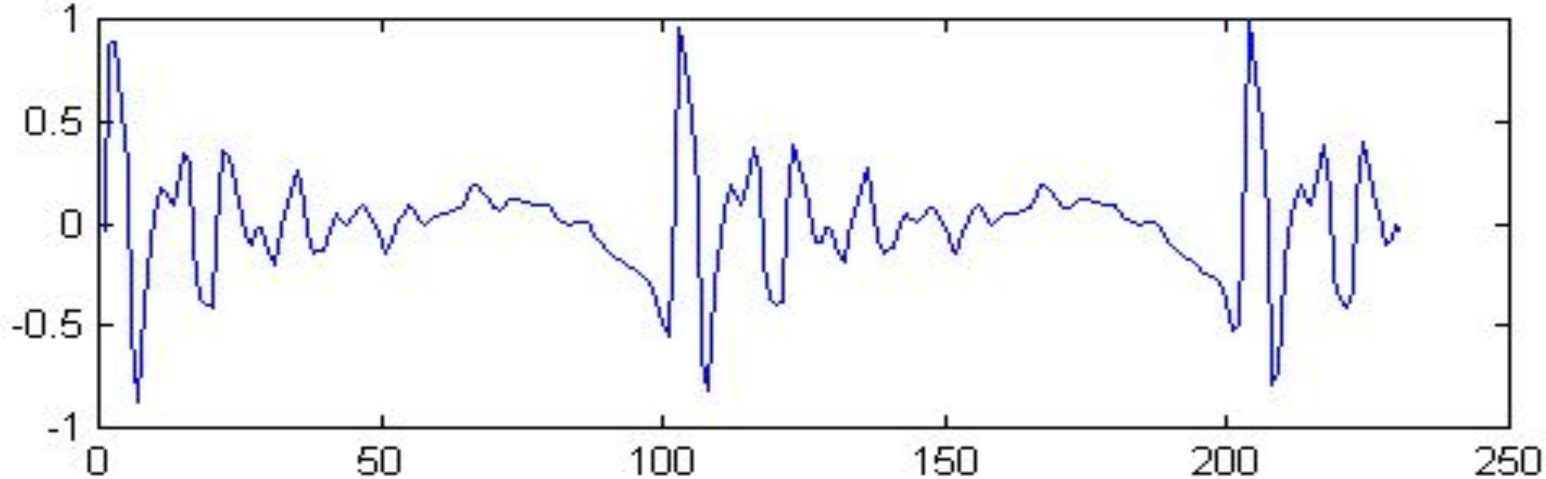
- **Явление Гиббса** – появление пульсаций значительной амплитуды в окрестности скачкообразного изменения сигнала
- При этом эти пульсации не исчезают при увеличении количества гармоник

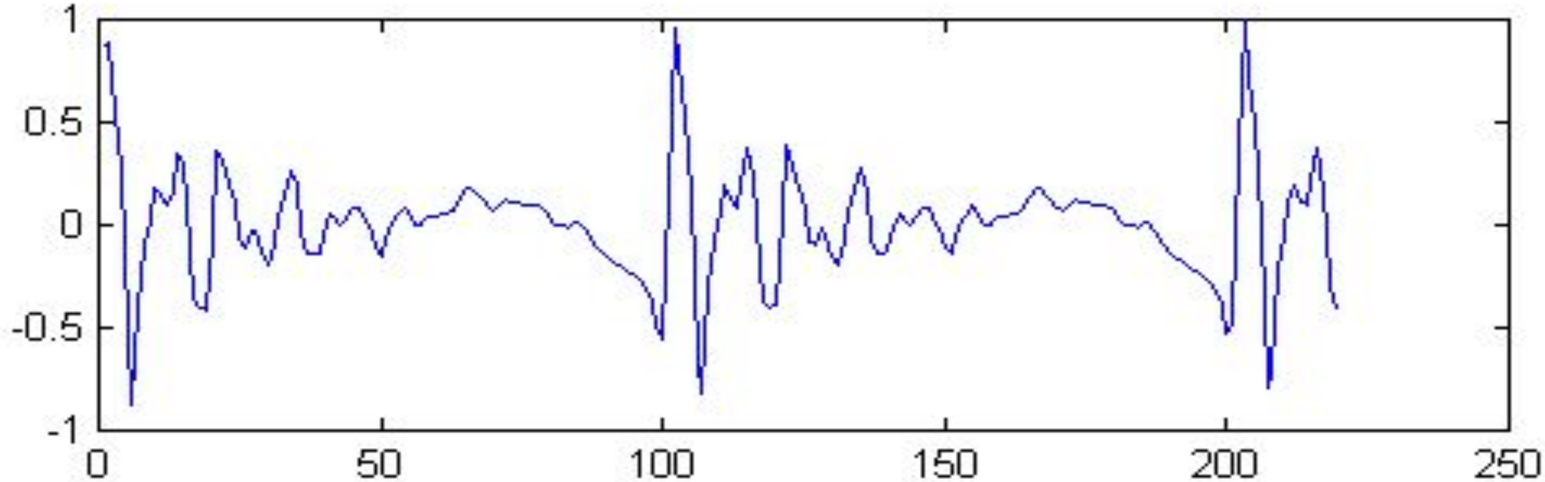
Явление Гиббса

Таким образом, если в сигнале есть скачки, то в окрестности этих скачков разложение Фурье описывает этот сигнал с большой погрешностью

В чем опасность явления Гиббса?

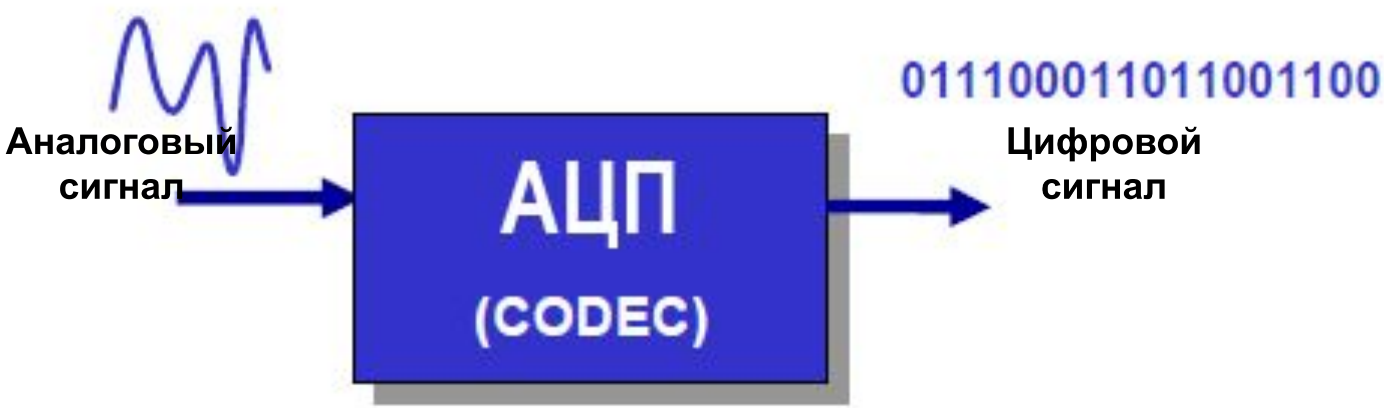
Явление Гиббса





Аналого-цифровое преобразование

- Передача голоса через цифровую сеть
- Для преобразования используется КОДЕК (кодер-декодер)

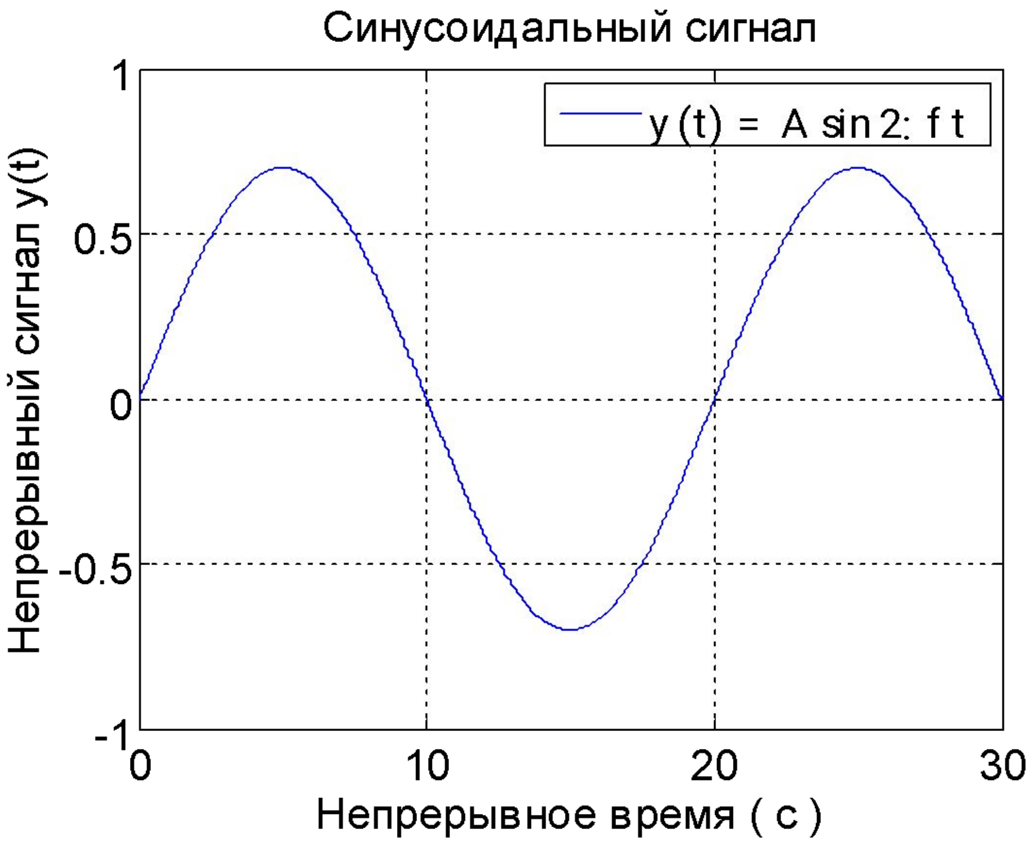


Процесс преобразования

Рисунок 13

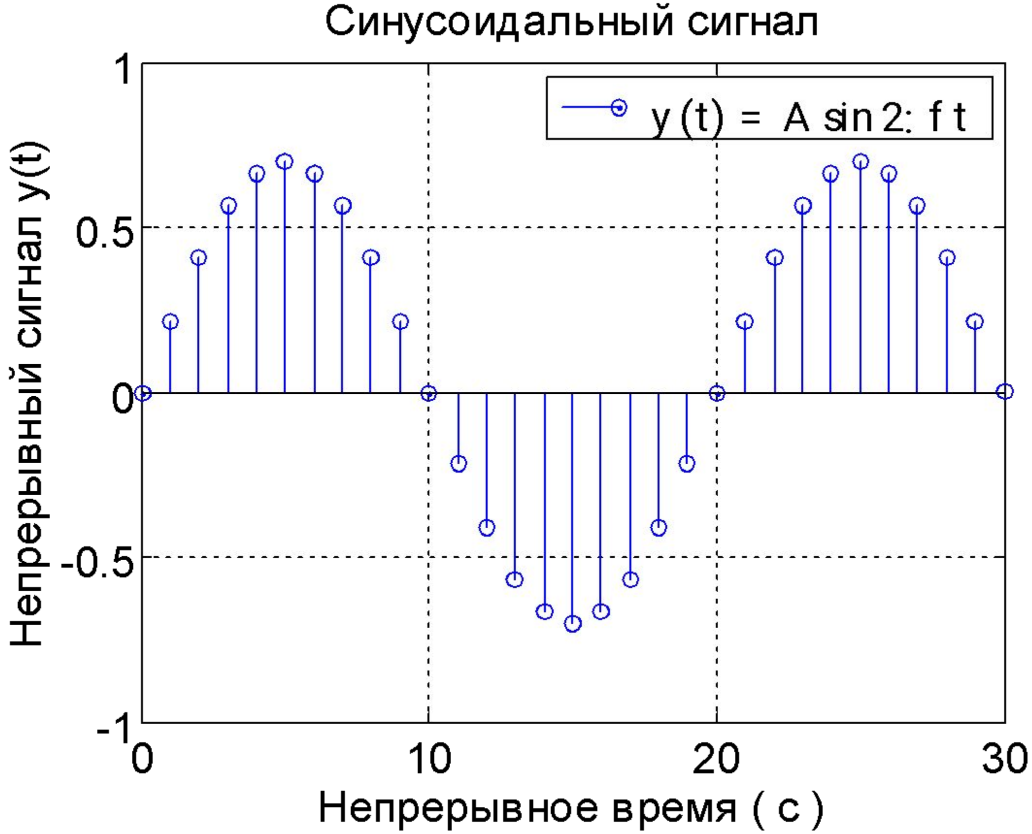
Непрерывные и дискретные сигналы

Аналоговый сигнал непрерывен по времени и состоянию (в любой момент времени $t \in [t_0; t_1]$ может принимать любое значение $x = [x_{\min}; x_{\max}]$). Описывается непрерывной или кусочно-непрерывной функцией $x(t)$.

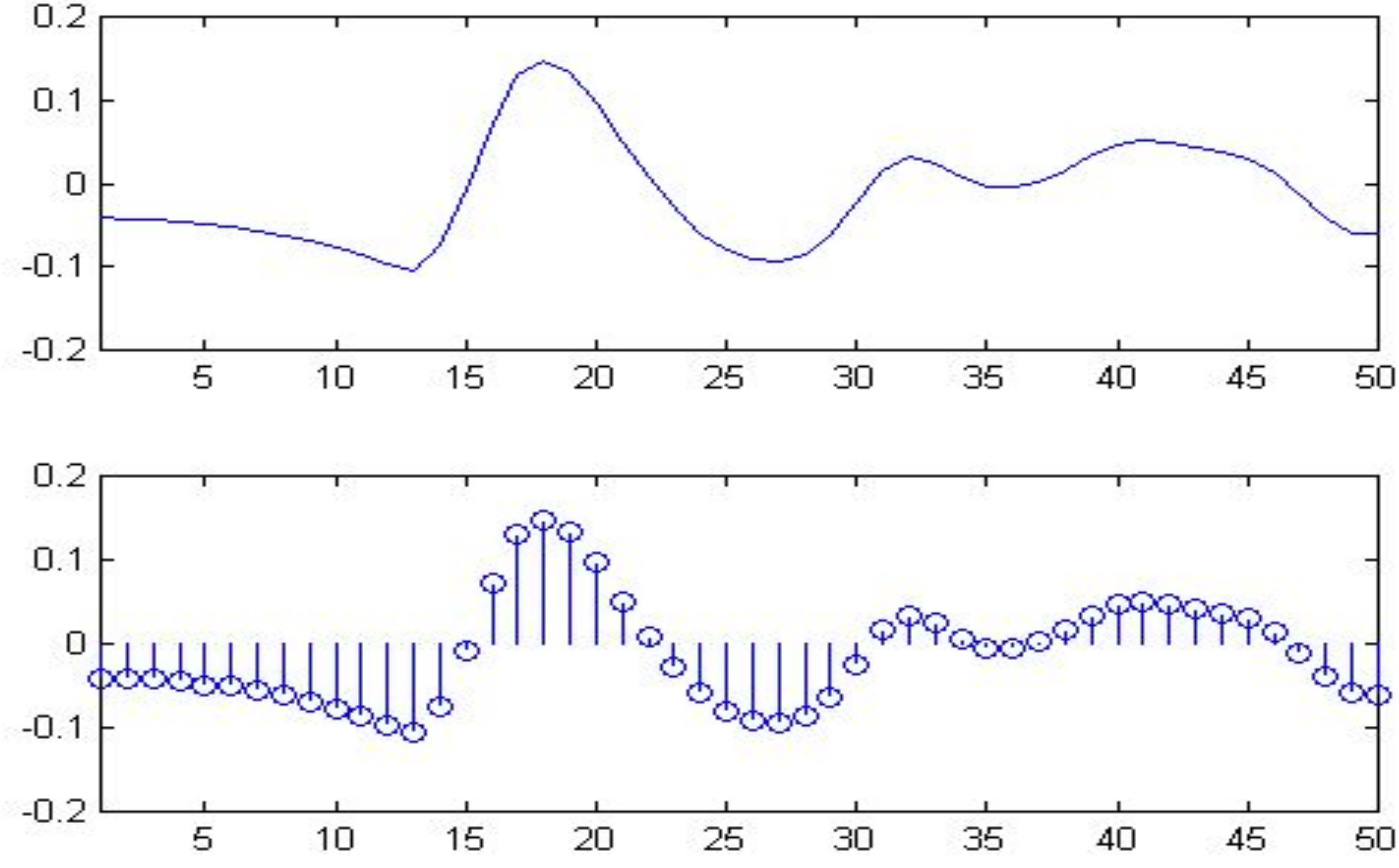


Непрерывные и дискретные сигналы

Дискретный сигнал дискретен по времени и непрерывен по состоянию. Описывается решетчатой функцией (**последовательностью**) $x(nT), n = 0, 1, 2, \ldots$, которая определена только в дискретные моменты времени nT, и может принимать любые значения $x = [x_{\min}; x_{\max}]$.



Непрерывные и дискретные сигналы

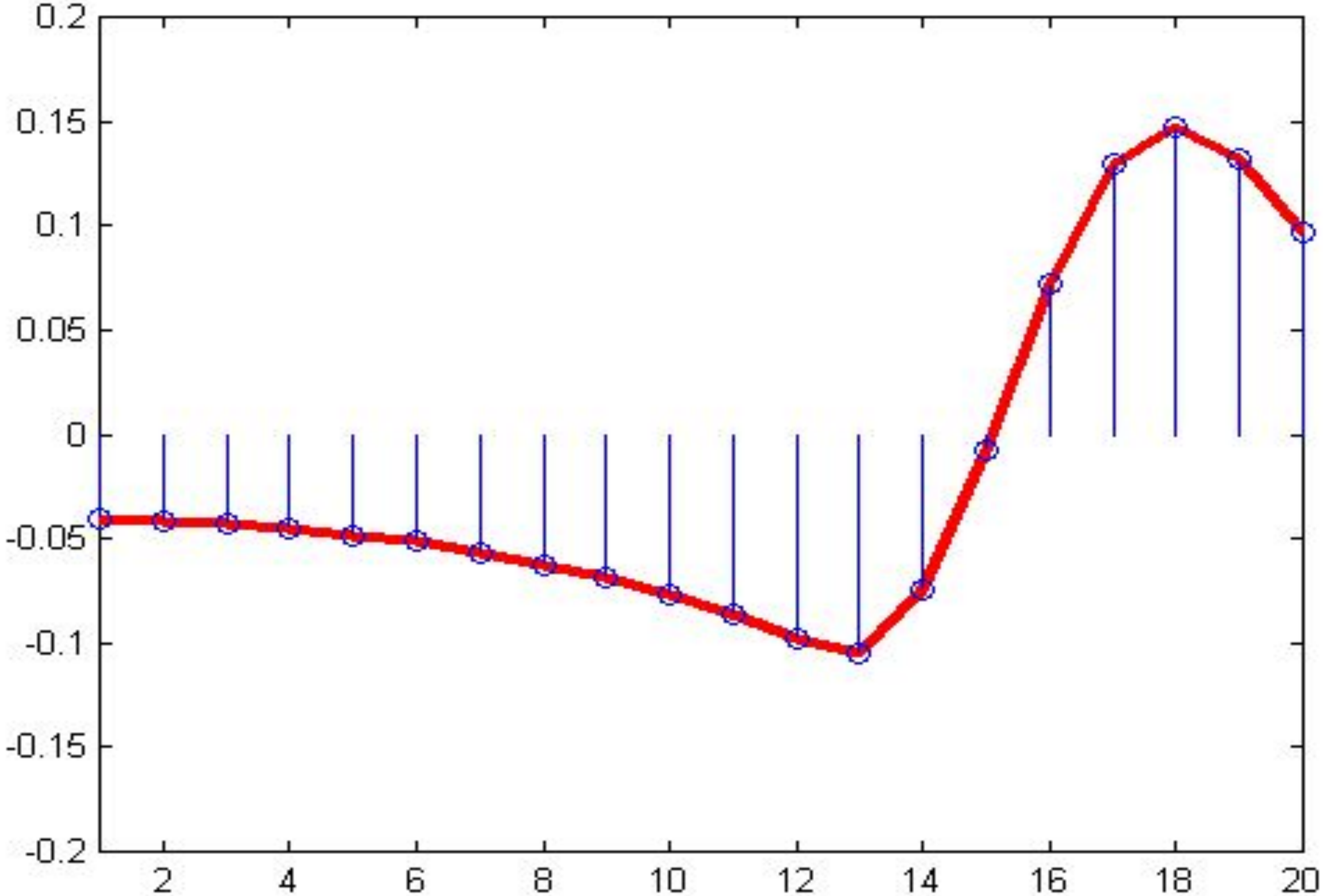


Дискретизация и квантование

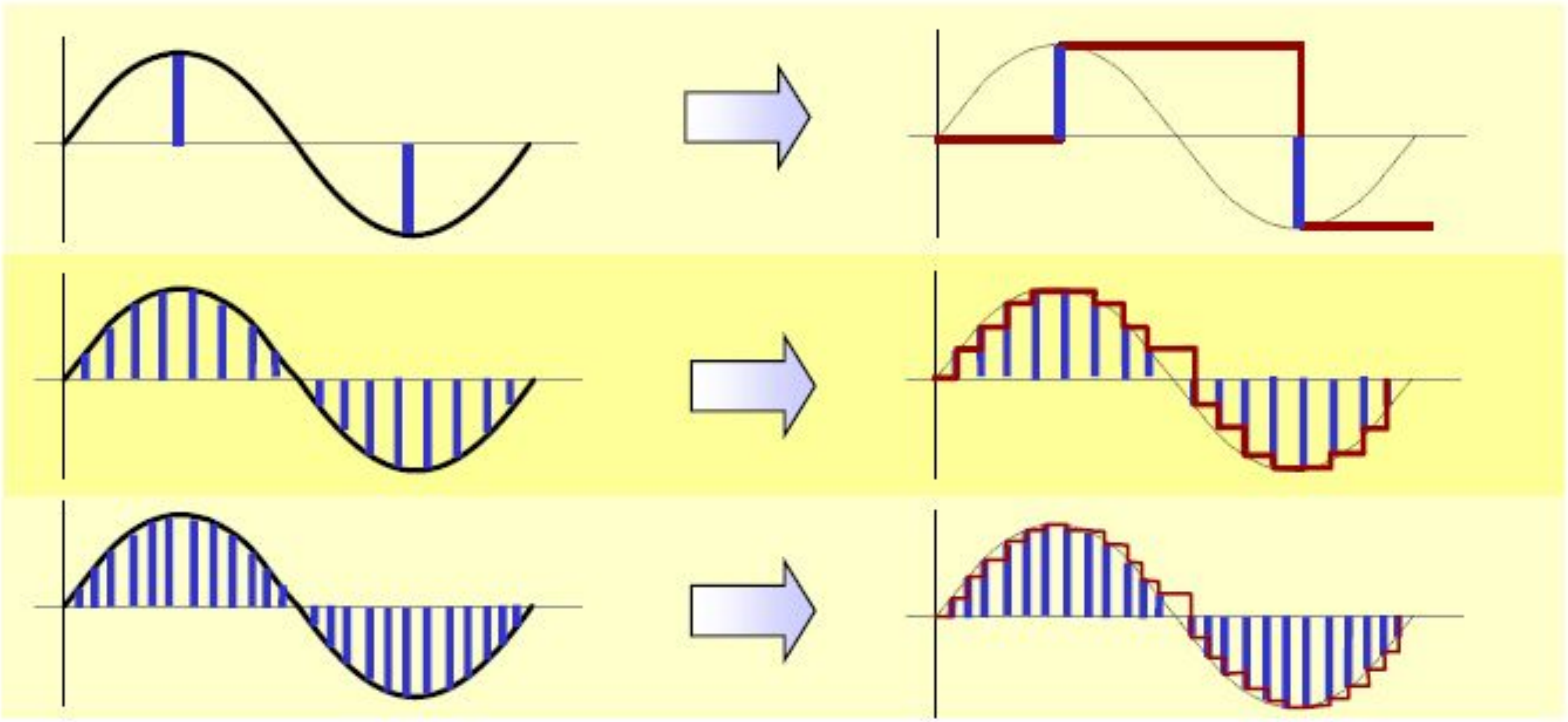
- При вводе непрерывного сигнала в компьютер сигнал дискретизируется и квантуется
- Фонетист всегда имеет дело с дискретными квантованными сигналами
- Методы цифровой обработки сигналов (например, Быстрое Преобразование Фурье) существенно используют свойства дискретных сигналов

Цифровой сигнал – дискретный по времени и квантованный по состоянию сигнал. Описывается квантованной решетчатой функцией $x_q(nT)$, отсчеты которой принимают дискретные значения уровней квантования из интервала $x = [x_{\min}; x_{\max}]$.

Дискретизация



Шаг дискретизации



- Чем выше частота дискретизации, тем ближе форма восстановленного сигнала приближается к оригиналу
- На практике частота дискретизации выбирается исходя из теоремы Котельникова и составляет 8 кГц для речевого сигнала

Дискретные сигналы и системы

Дискретизация по времени
Квантование по уровню

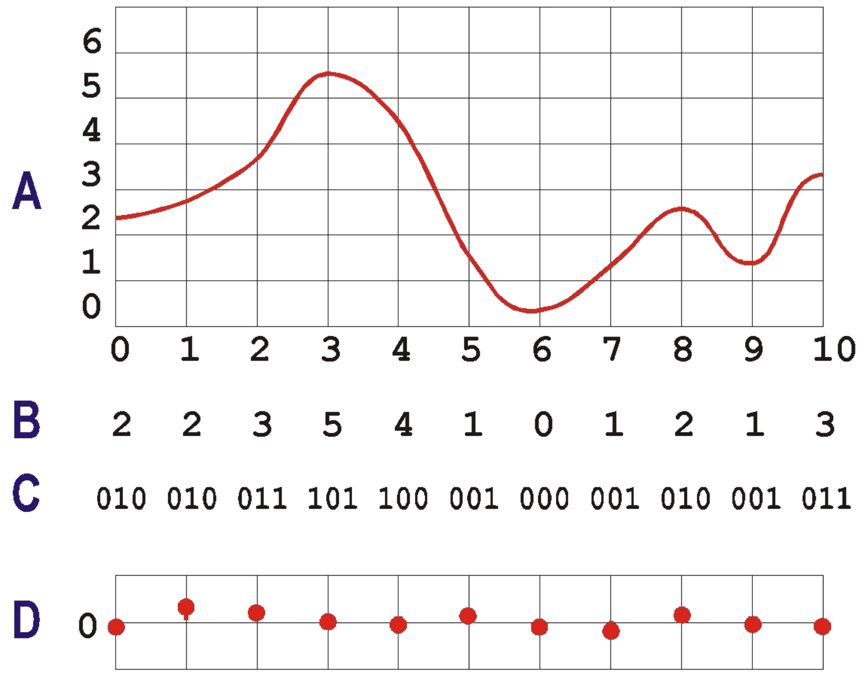


Рис 13а. Дискретизация по времени и квантование по уровню

B – полученная последовательность цифр
C – полученная последовательность двоичных кодовых групп
D – ошибки квантования

Частота дискретизации

Интервал T называют **периодом дискретизации**, а обратную величину – **частотой дискретизации**

$$f_d = \frac{1}{T}$$

Значения дискретной последовательности $x(nT)$ в моменты nT называют **отсчетами**.

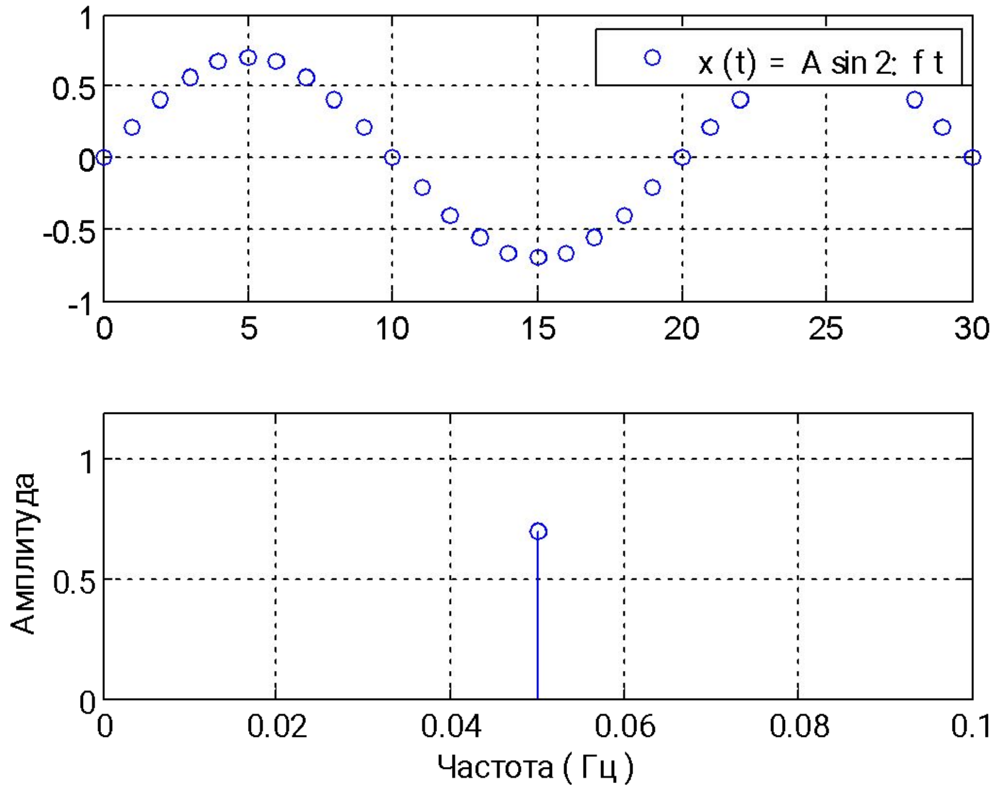
Дискретный синусоидальный сигнал

$$x(nT) = x(n) = A\sin(2\pi fnT) = A\sin(\omega nT)$$

T – период дискретизации
A – амплитуда
ω – круговая частота
f – частота сигнала

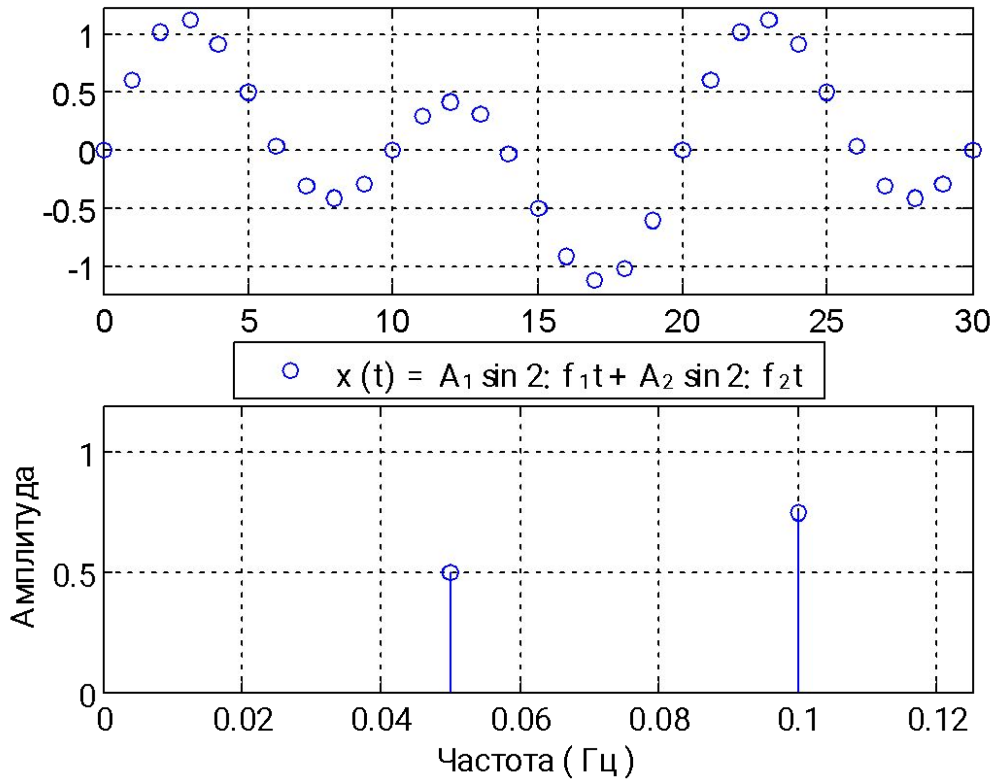
$$\omega = 2\pi f$$

Представление сигналов во временной и частотной области



Один дискретный гармонический сигнал во временной (вверху) области и в частотной (внизу) области.

Представление сигналов во временной и частотной области



Сумма двух дискретных гармонических сигналов во временной и частотной областях.

Частота дискретизации

- **Интервал дискретизации (sampling period) Δt** – интервал времени между двумя соседними временными отсчетами
- **Частота дискретизации (sampling frequency, sampling rate) Fs** = 1/ **Δt**
- Частота дискретизации определяет количество отсчетов в секунду

Пример

- Если частота дискретизации сигнала = 16 кГц, то это означает, что **за 1 секунду запоминаются 16000 отсчетов сигнала**

- Это также означает, что временной интервал между двумя соседними отсчетами равен **0.0000625 секунд (0.0625 миллисекунд)**

Насколько часто нужно запоминать отсчеты непрерывного сигнала?

Частота дискретизации или скорость выборки (sampling rate). Ключевой вопрос: сколько требуется выборок для полного описания сигнала?

При дискретизации с частотой f_s отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизированные значения синусоиды частотой f_0 Гц и синусоиды частотой $f_0 + k \cdot f_s$ Гц, где k – любое положительное или отрицательное число.

Теорема Котельникова

Если спектр непрерывного сигнала не содержит информации выше частоты ***F***, то частота дискретизации должна быть не менее 2***F***

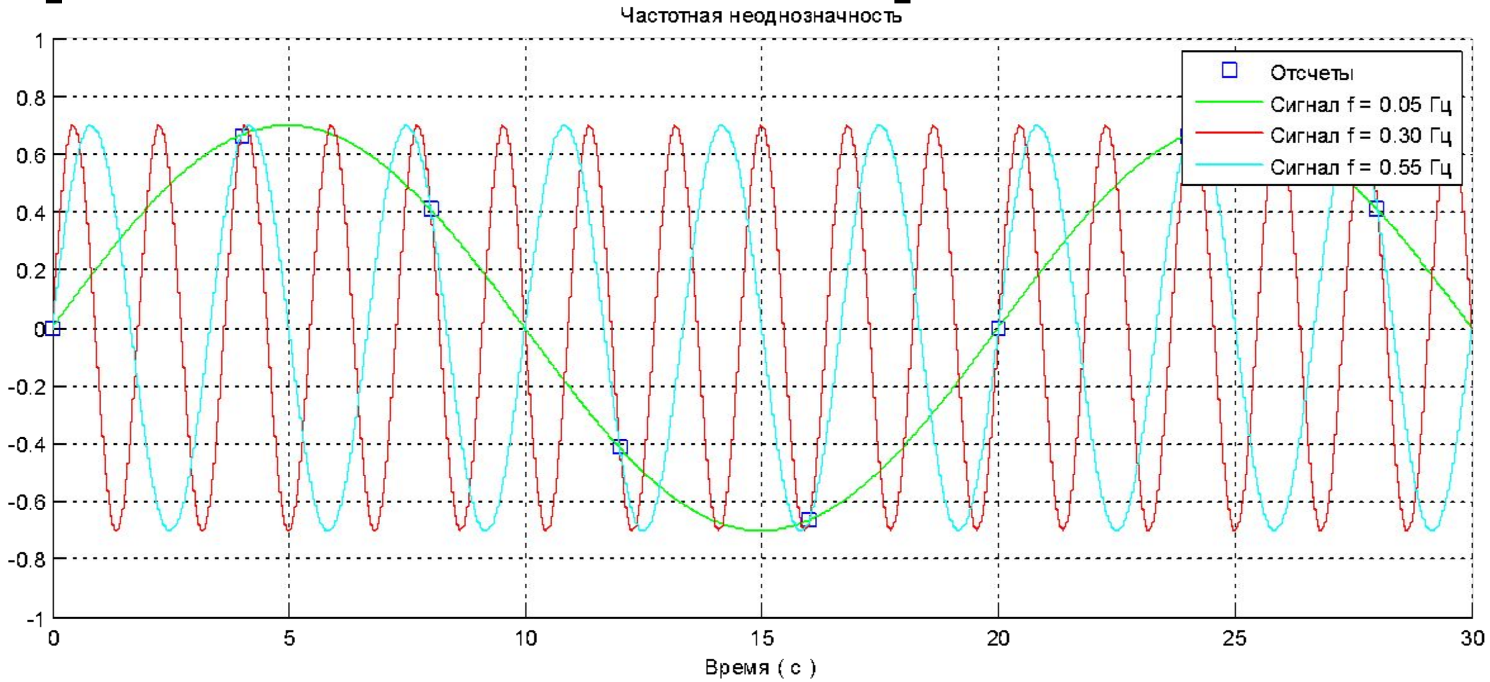
(Частоту ***F*** называют **частотой Найквиста – Nyquist frequency**)

Теорема Котельникова (теорема Найквиста – Шеннона):
если аналоговый сигнал $x(t)$ имеет конечный (ограниченный по ширине) спектр, то он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим отсчётам, взятым с частотой, большей или равной удвоенной верхней частоте f_c: $f \geq 2 f_c$

Применительно к речи

- Считается, что спектральные компоненты выше 3400 Гц не влияют на разборчивость речи
- Поэтому можно приблизительно считать, что выше 4000 Гц информация, нужная для слухового восприятия речи, отсутствует
- Следовательно, минимальная частота дискретизации для речи = **8 кГц**

Проблема выбора частоты



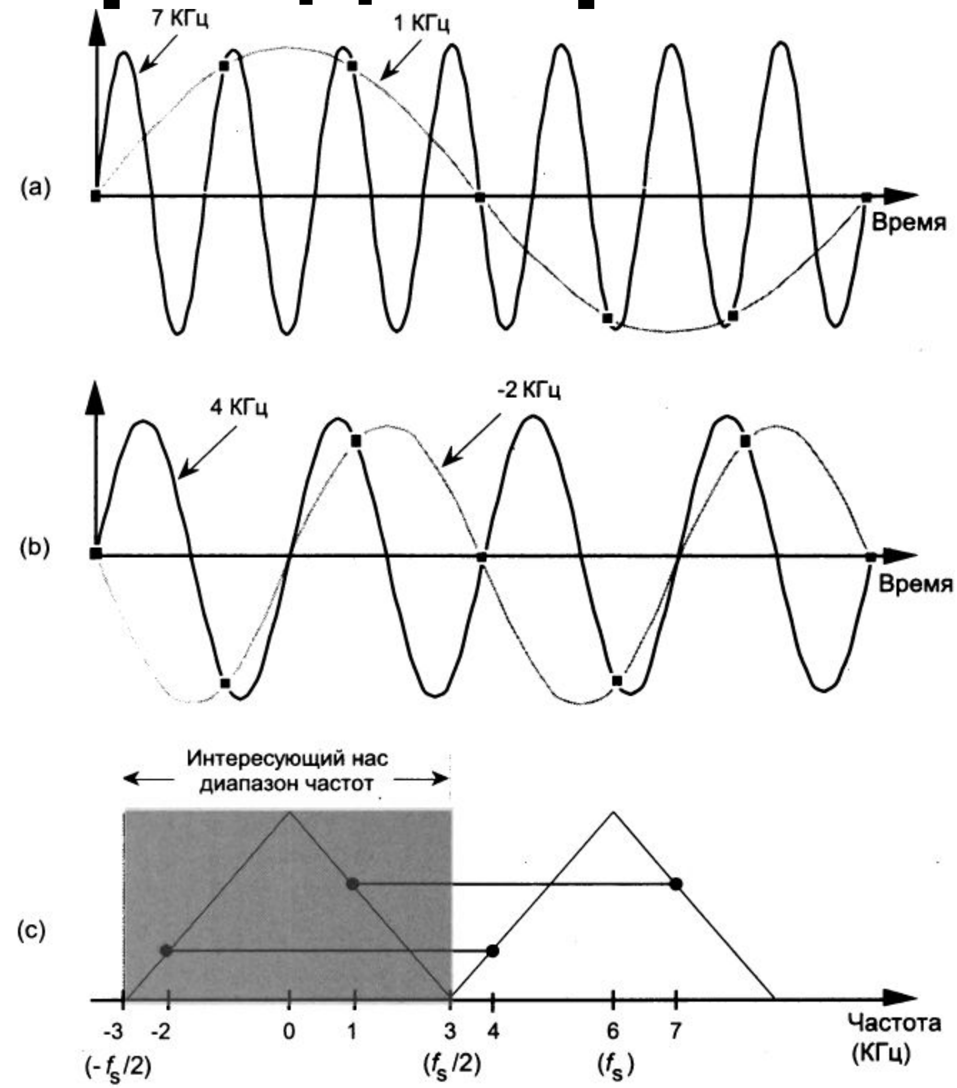
При дискретизации с частотой f_s отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизированные значения синусоиды частотой f_0 Гц и синусоиды частотой $f_0 + k \cdot f_s$ Гц, где k – любое положительное или отрицательное число.

Вопрос: Когда я сложил два числа, я получил сумму четыре. Какие два числа я сложил?

Ответ: Существует бесконечное число двух чисел, которые в сумме дают четыре.

Проблема состоит в том, что никакой алгоритм обработки не может определить, является ли данная последовательность дискретных отсчетов, значения которых показаны точками, результатом дискретизации синусоиды частотой 7 кГц или синусоиды частотой 1 кГц.

Примеры дискретизации



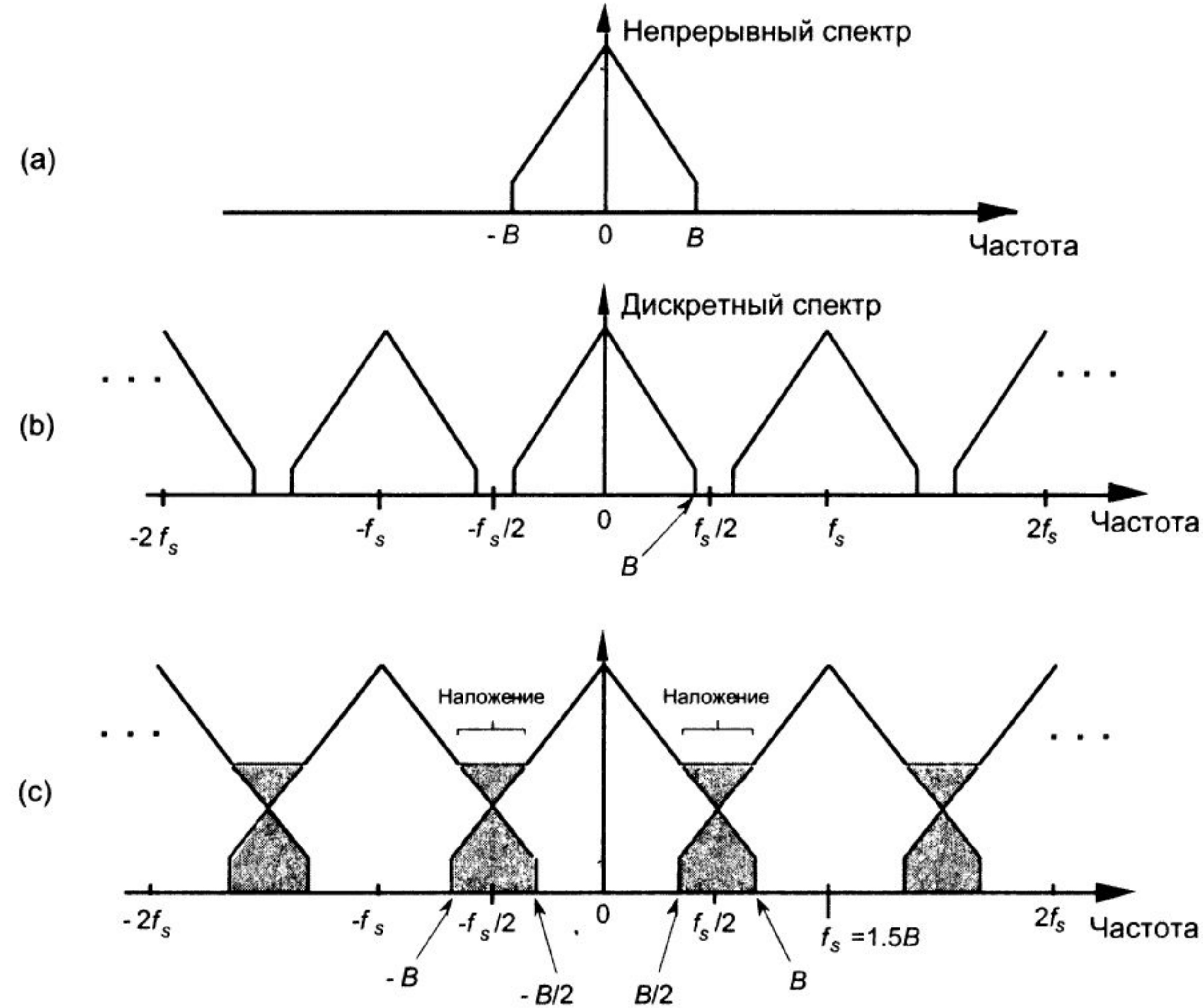
а) Дискретизация синусоиды частотой 7 кГц с частотой 6 кГц
б) Дискретизация синусоиды частотой 4 кГц с частотой 6 кГц
с) Спектральные соотношения, демонстрирующие наложение синусоид с частотами 4 кГц и 7 кГц

Примеры дискретизации

Рассмотрим дискретизацию непрерывного действительного сигнала, спектр которого показан на рисунке (a).
Спектр симметричен относительно частоты 0 Гц и его значения равны 0 для частот выше +B Гц и ниже -B Гц, т. е. это сигнал с ограниченным спектром. Термин «сигнал с ограниченным спектром» означает, что энергия сигнала за пределами диапазона ±B Гц ниже чувствительности системы.

Задавшись частотой дискретизации fs отсчетов в секунду, можно увидеть эффект размножения спектра при дискретизации на рисунке (b), на котором показаны исходный спектр, а также бесконечное количество копий, повторяющихся с периодом f_s Гц.

Примеры дискретизации



a) Спектр исходного непрерывного сигнала

b) Размножение спектра дискретного сигнала при $f_s / 2 > B$

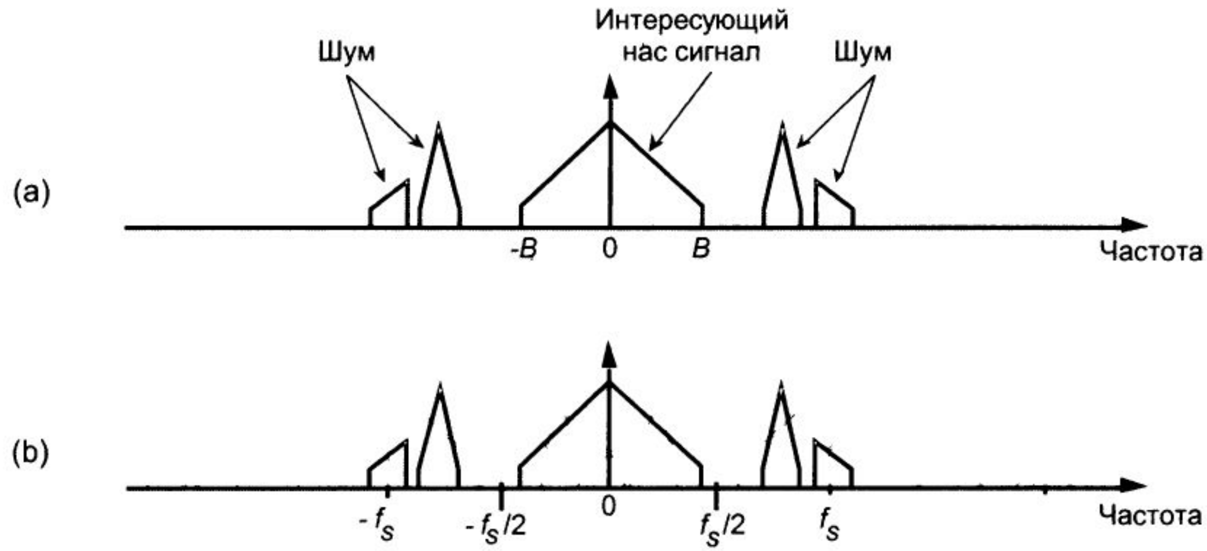
c) Наложение частот при слишком низкой частоте дискретизации, т.к. $f_s / 2 < B$

Примеры дискретизации

Если сигнал представляется последовательностью дискретных значений, его спектр принимает размноженную форму.
Размноженные спектры реально существуют☺

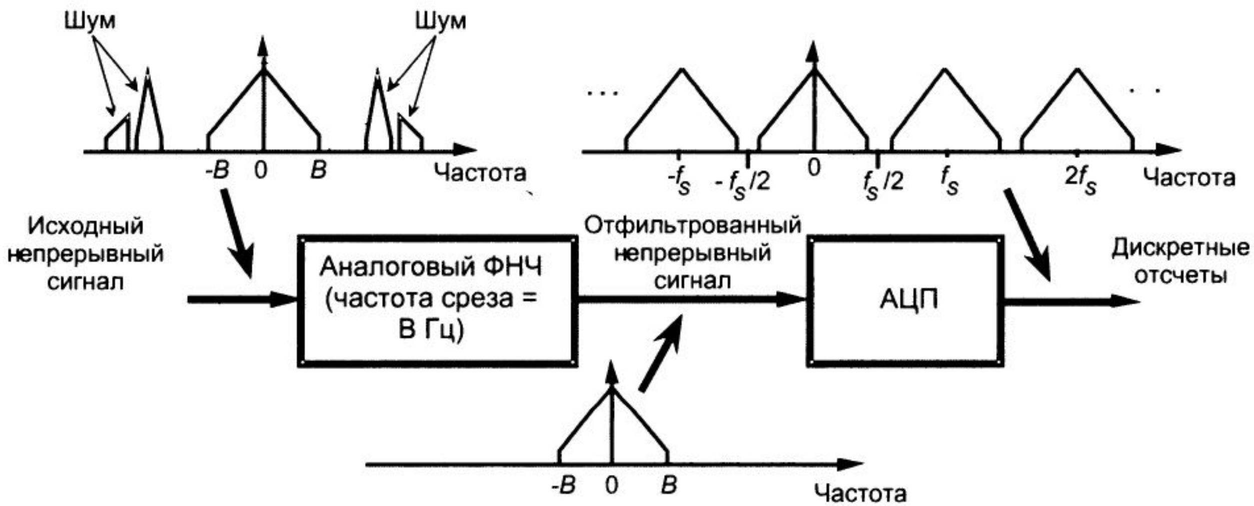
В практических схемах АЦП f_s всегда берется больше 2B, чтобы оставить разделительный промежуток в районе частот заворота $\pm f_s/2$.
Понизим частоту дискретизации до величины $f_s/2$= 1.5B Гц. Спектральный результат такой дискретизации показан на рисунке (c). Копии спектра теперь перекрывают исходный спектр с центром на частоте 0 Гц.
Во-первых, нижняя и верхняя границы копий спектра с центральными частотами $+f_s$ и $-f_s$ теперь лежат в интересующей нас полосе частот. Дискретные отсчеты, связанные со спектром, показанным на рисунке (c), больше не представляют корректно исходный сигнал. Спектральная информация в полосах частот от -B до -B/2 и от B/2 до B Гц искажена.
Второй эффект, иллюстрируемый рисунком (c), состоит в том, что весь спектр исходного непрерывного сигнала сосредоточен в полосе частот между -fs/2 и + fs/2.
Это ключевое свойство показано на рисунке (b). Любая энергия, расположенная выше +B Гц и ниже -B Гц в спектре исходного непрерывного сигнала, показанного на рисунке (a), всегда после дискретизации окажется в интересующей нас полосе частот, независимо от частоты дискретизации. По этой причине на практике необходимы непрерывные (аналоговые) фильтры нижних частот.

Примеры дискретизации



Размножение спектра:
a) Спектр смеси сигнала с шумом
b) Спектр дискретного сигнала, в котором шум искажает полезный сигнал

Примеры дискретизации

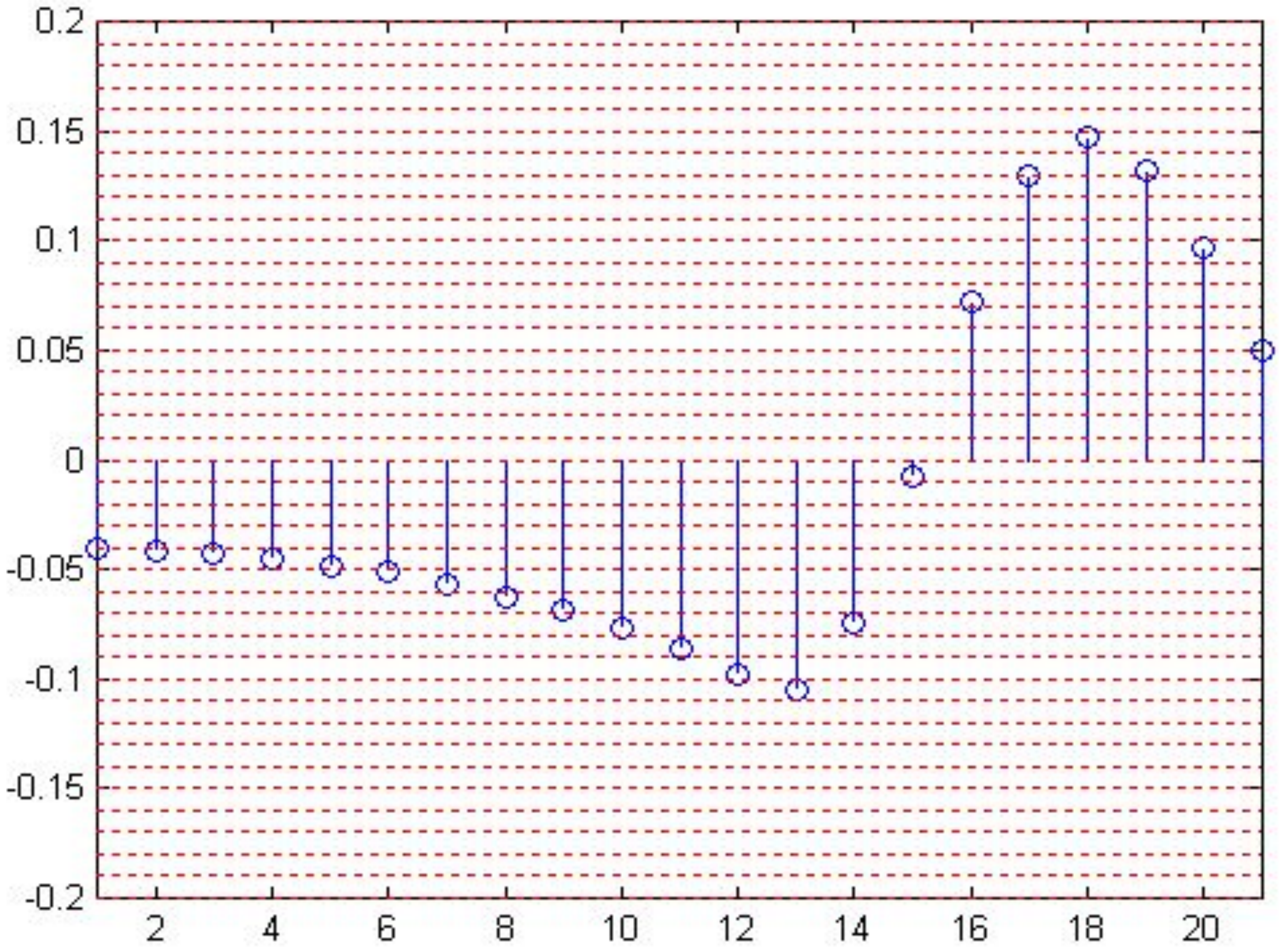


Низкочастотная фильтрация перед дискретизацией с частотой f_s Гц

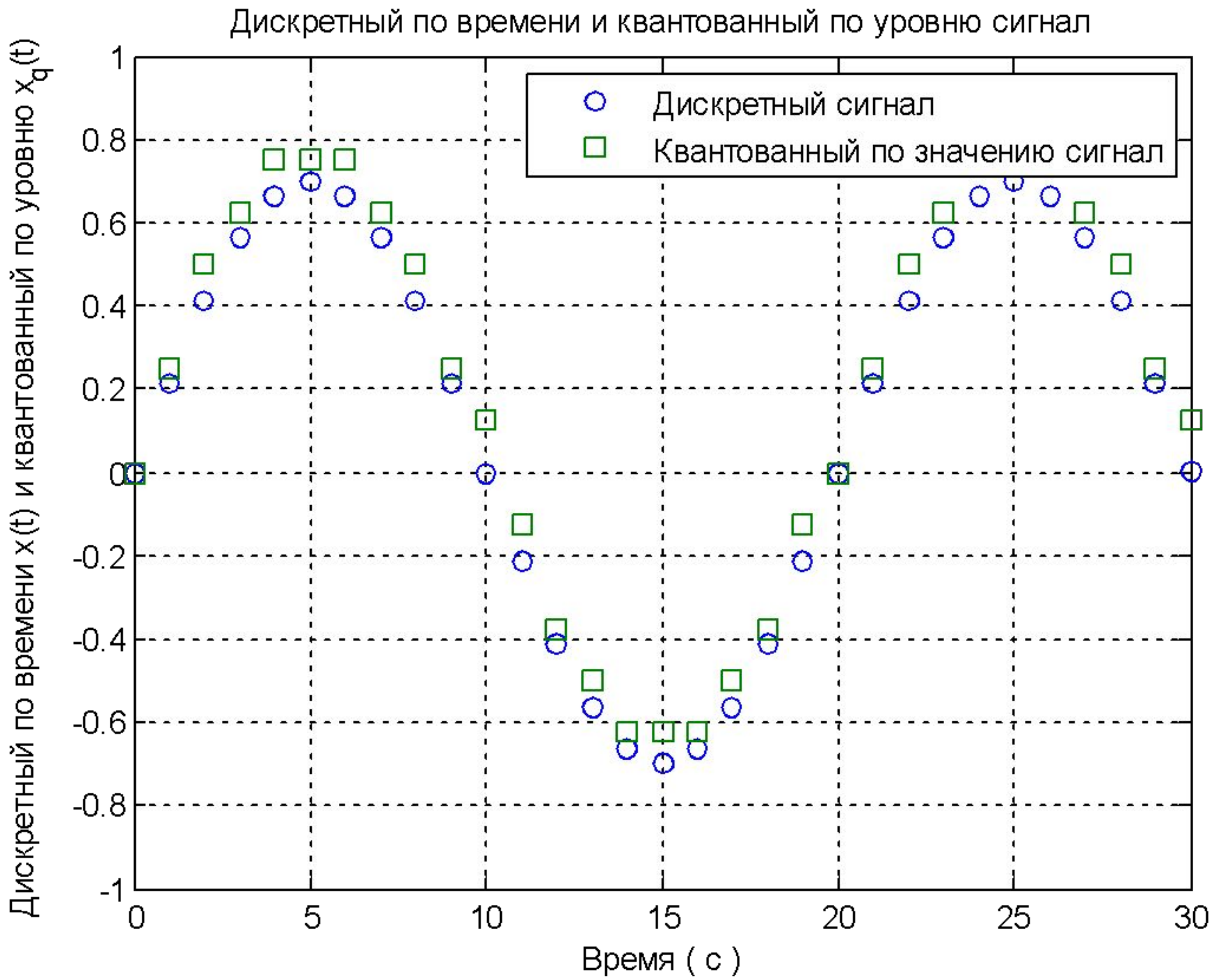
Ресэмплирование

- **Ресэмплирование (resampling)** – переход от одной частоты дискретизации к другой

Квантование



Квантование



Период дискретизации $T = 1$ с,

Частота дискретизации $f_d = 1$ Гц,

Шаг квантования $\Delta = 0{,}125$

Интервалов квантования $N = 16$

Квантование

- Исходно имеется дискретный набор возможных значений амплитуд (**уровней квантования**)
- Квантование сводится к тому, что значение амплитуды каждого отсчета сигнала **округляется** до ближайшего дискретного уровня
- В память записываются не исходные значения амплитуды, а округленные

Квантование

- Чем больше уровней квантования, тем меньше ошибка, возникающая из-за округления (т.наз. **шум квантования**)
- Количество уровней квантования обычно определяется количеством бит на амплитуду
- Если количество бит на амплитуду = ***n***, то общее количество уровней квантования = 2^n

Пример

- Пусть используется квантование 16 бит / отсчет (16 бит на отсчет)
- Это означает, что общее количество уровней квантования = 2^{16} = 65536 уровней
- Из этого числа половина уровней используется для округления положительных значений амплитуд, а другая половина – отрицательных значений

Квантование сигнала по уровню

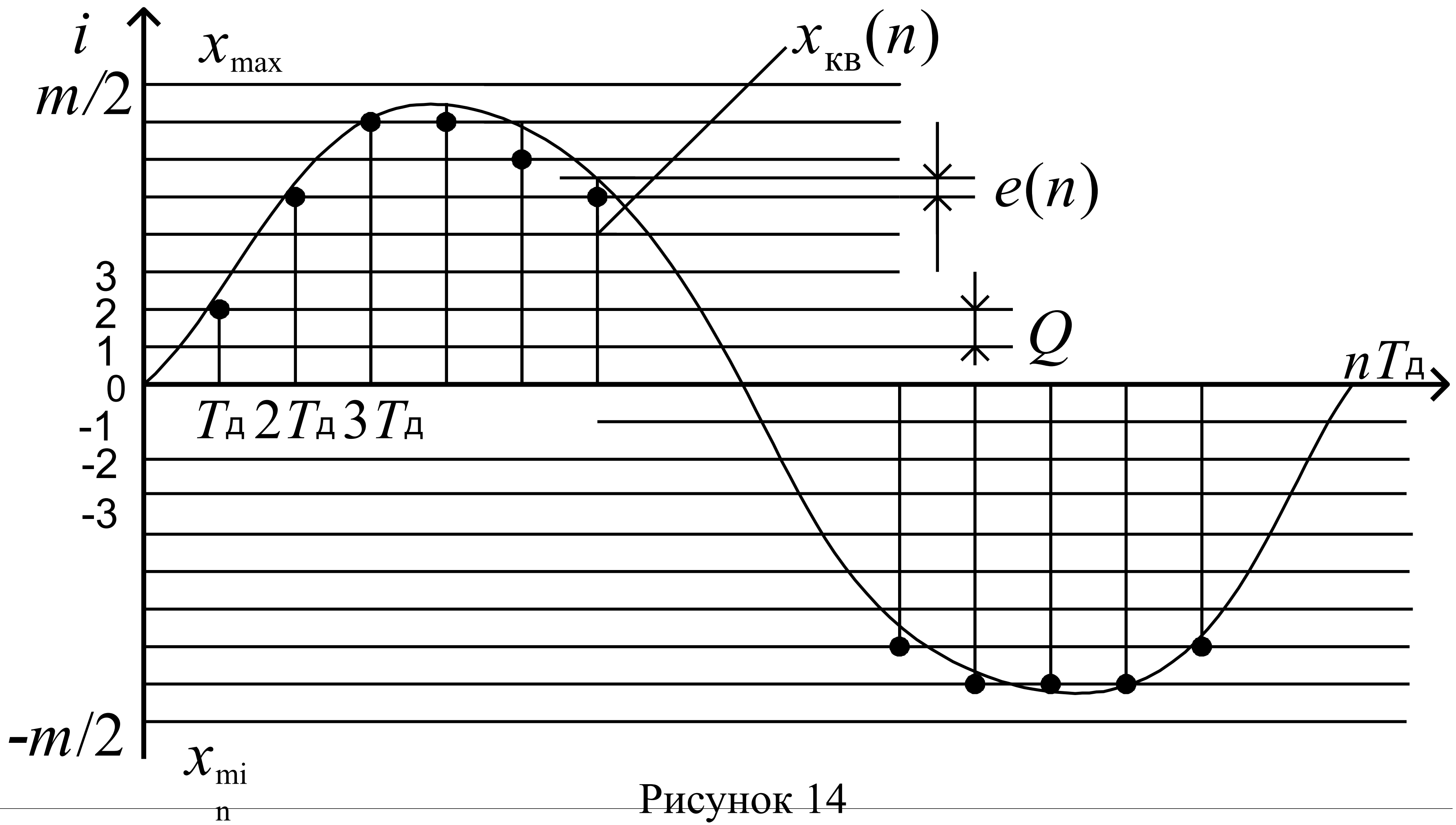


Рисунок 14

Квантование

Число уровней = 2^{n}

Рисунок 15

ИКМ

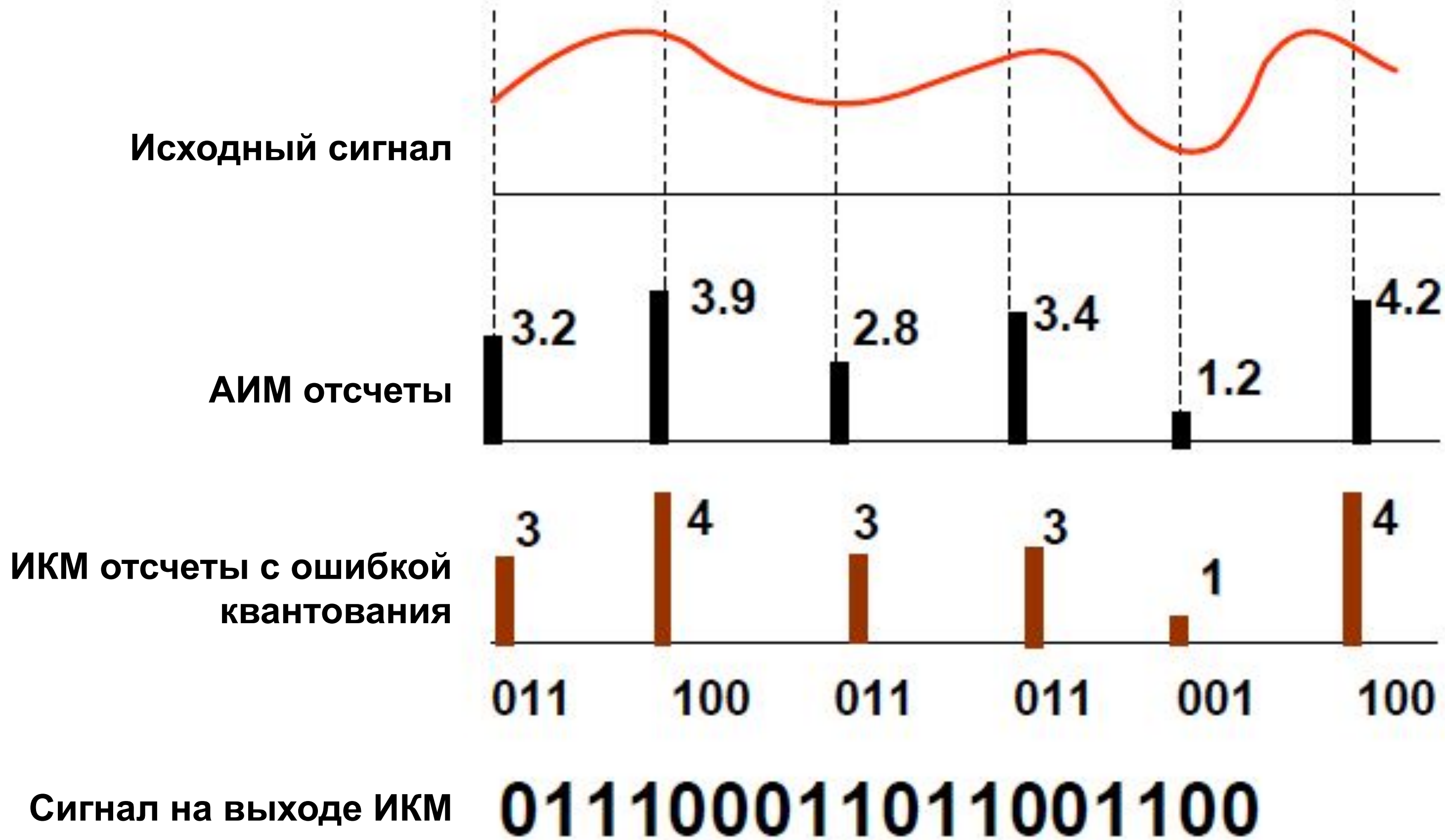


Рисунок 16

Ошибки квантования

- Преобразование непрерывного по уровню сигнала в цифровой - это операция *квантования* (*quantization*). Термин "квантование" происходит от латинского слова "*quantum*", что означает "сколько". Квантование – это преобразование непрерывного по уровню сигнала в цифровой сигнал с конечным количеством числовых разрядов.
- Разность между выходным сигналом квантователя и аналоговым входным сигналом представляет собой неустранимую *погрешность (ошибку, шум) квантования по уровню*

$$e(t) = y(t) - x(t)$$

.

- При квантовании округлением ошибка

$$-\frac{q}{2} \le e(t) < \frac{q}{2}$$

- Максимальное значение погрешности квантования равно

$$e_{max}(t) = \pm\frac{q}{2}.$$

- Кроме квантования округлением (*rounding*) применяется также квантование усечением (*truncation*). Оно более простое. Ненужные разряды (цифры) при этом просто отбрасываются, но максимальная погрешность квантования удваивается $0 \le e(t) < q$, $e_{max}(t) = \pm q$.

Дискретные сигналы и системы

Квантование по уровню

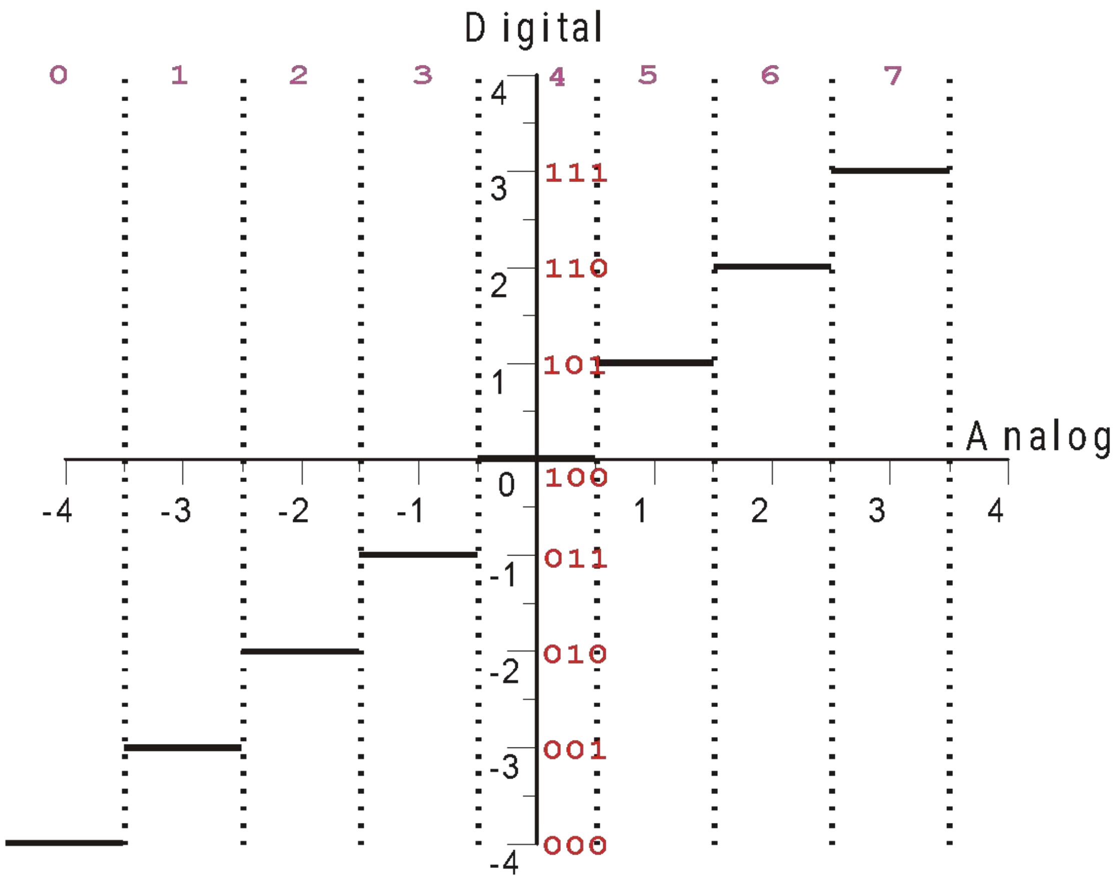
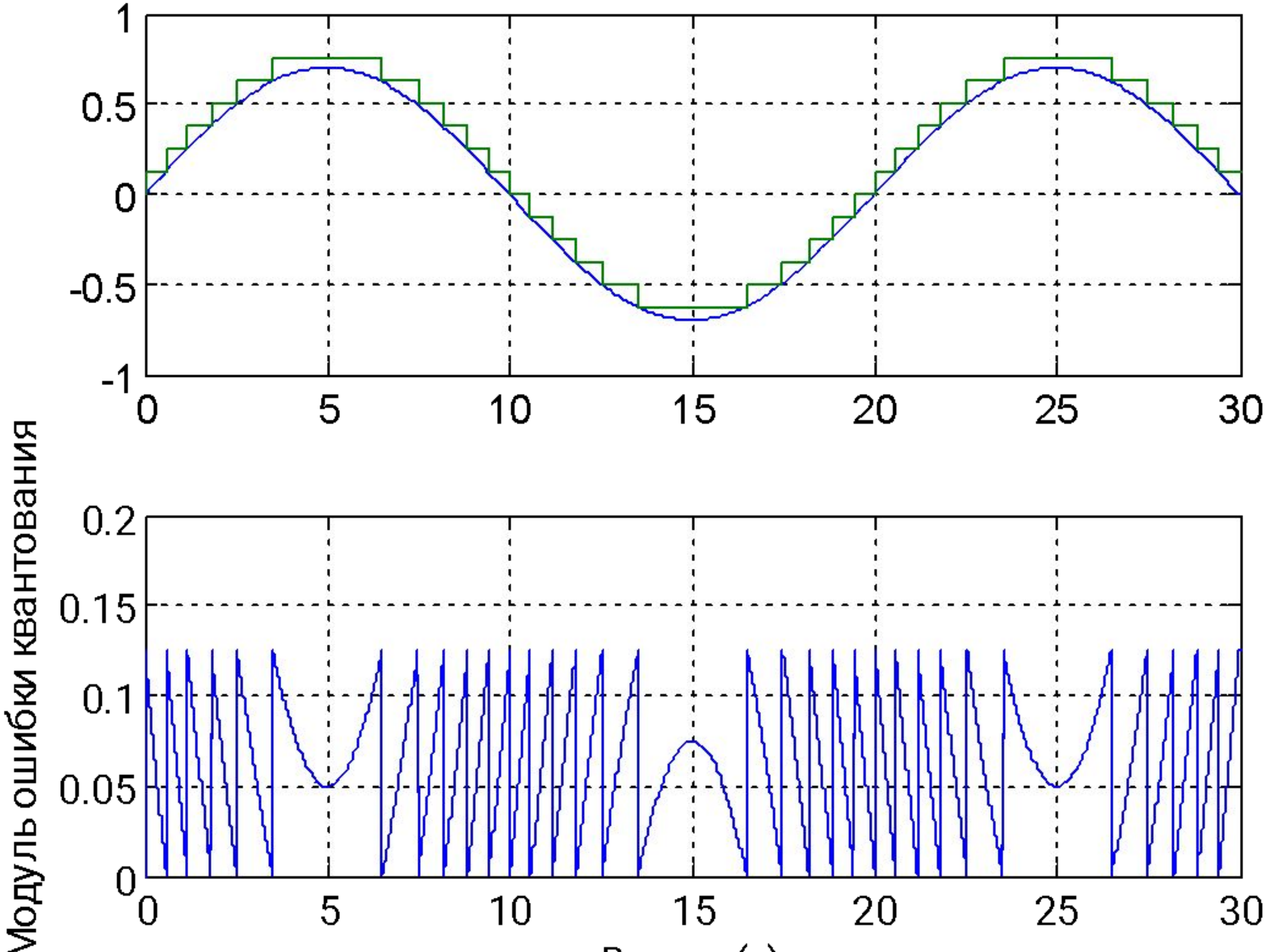


Рис 17 - Получение двоичных кодовых групп

Ошибка квантования



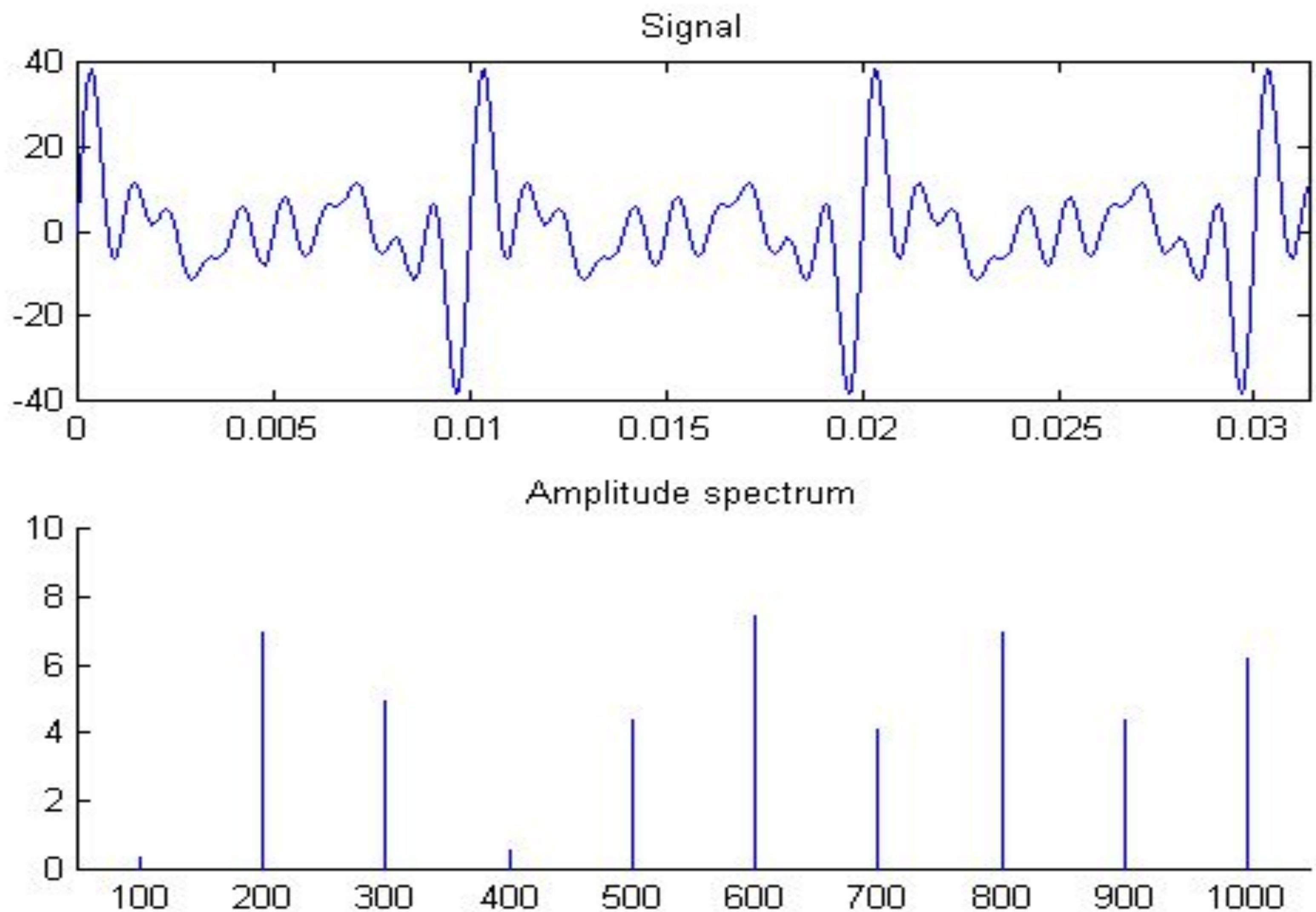
Теорема Фурье

Всякое периодическое колебание частоты *F* можно получить в результате суммирования бесконечного числа гармоник с частотами *F, 2F, 3F, 4F, …,* и **специально подобранными** амплитудами и фазами

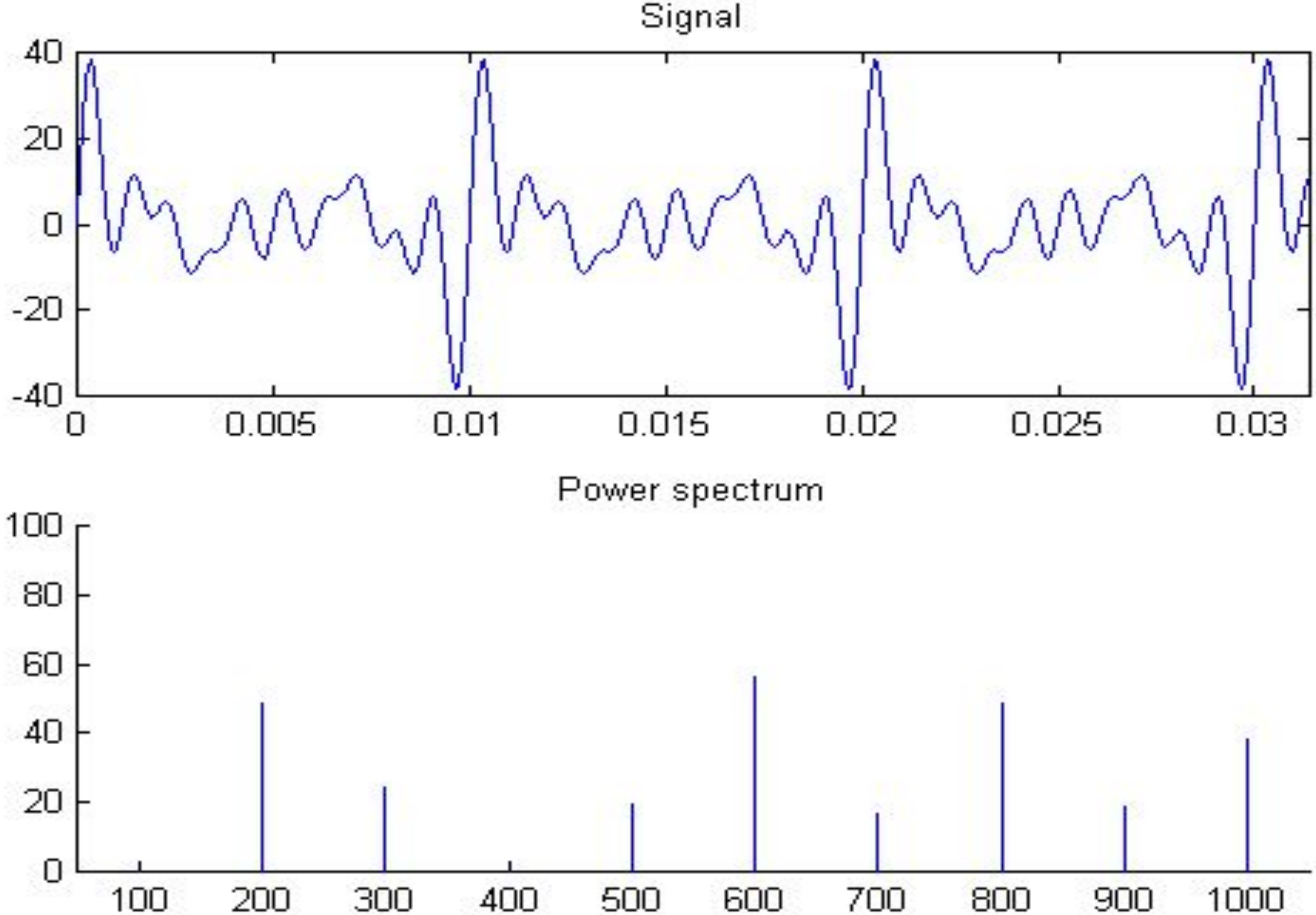
$x(t) = A_0 + A_1 sin(2πFt + ϕ_1) + A_2 sin(2π2Ft + ϕ_2) + A_3 sin(2π3Ft + ϕ_3) + …$ (и т. д.) ИЛИ

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kFt + \varphi_k)$$

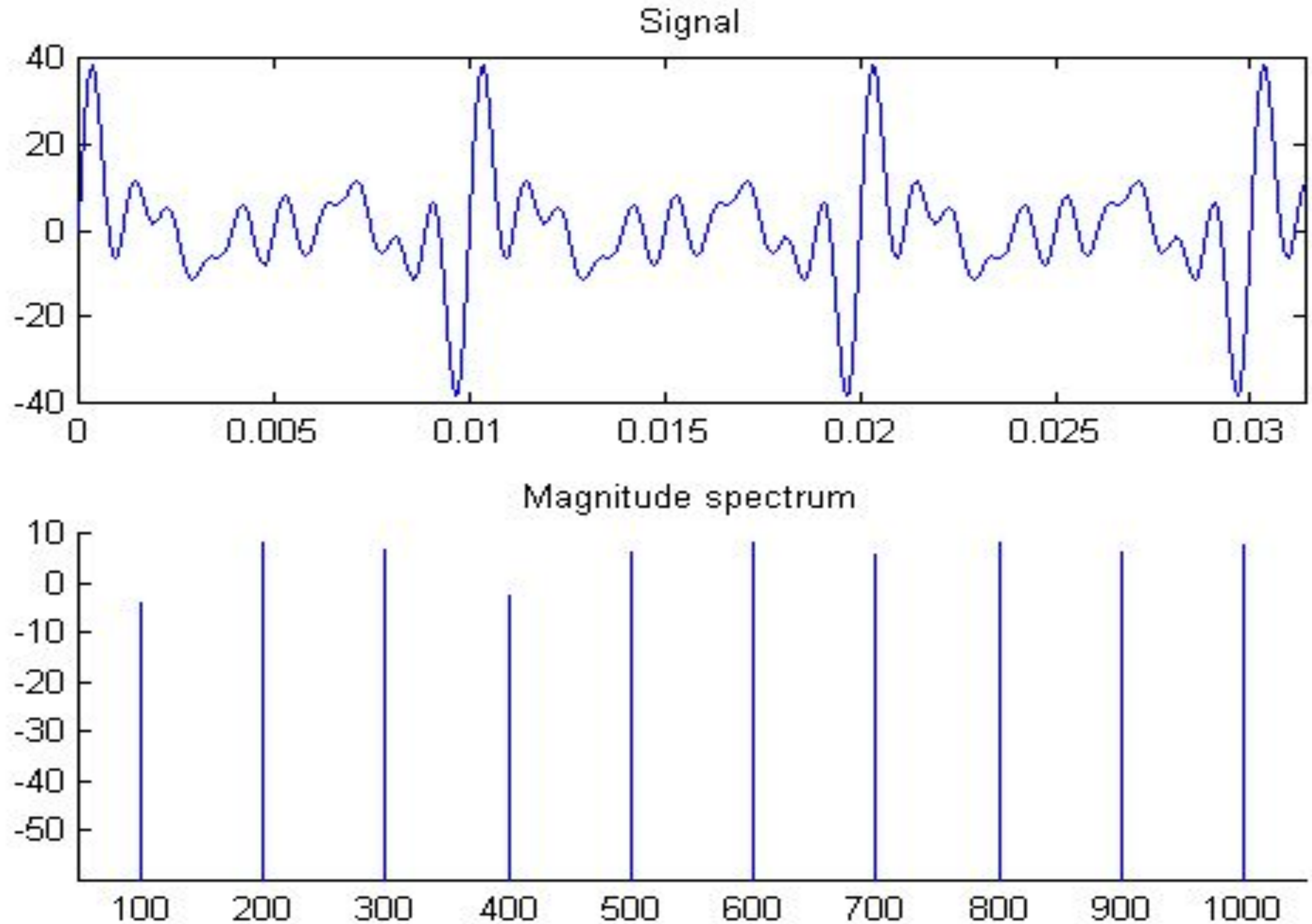
Амплитудно-частотный спектр



Спектр мощности



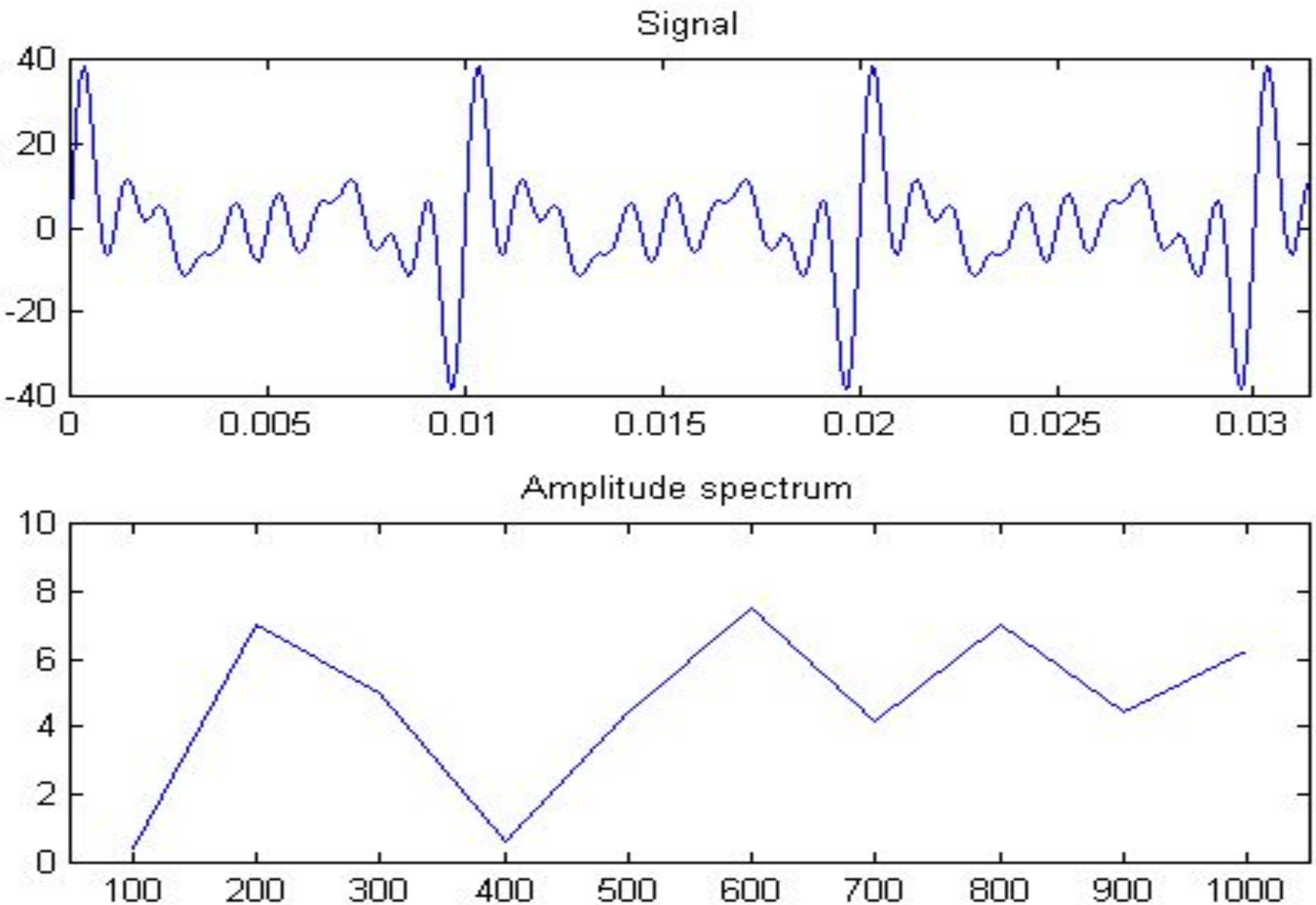
Логарифмический спектр



Перевод в дециббеллы

- Имеем дискретный набор гармоник
- Для каждой гармоники считаем десятичный логарифм от амплитуды данной гармоники
- Умножаем результат на 10
- Получаем логарифмический спектр в дециббеллах (дБ)

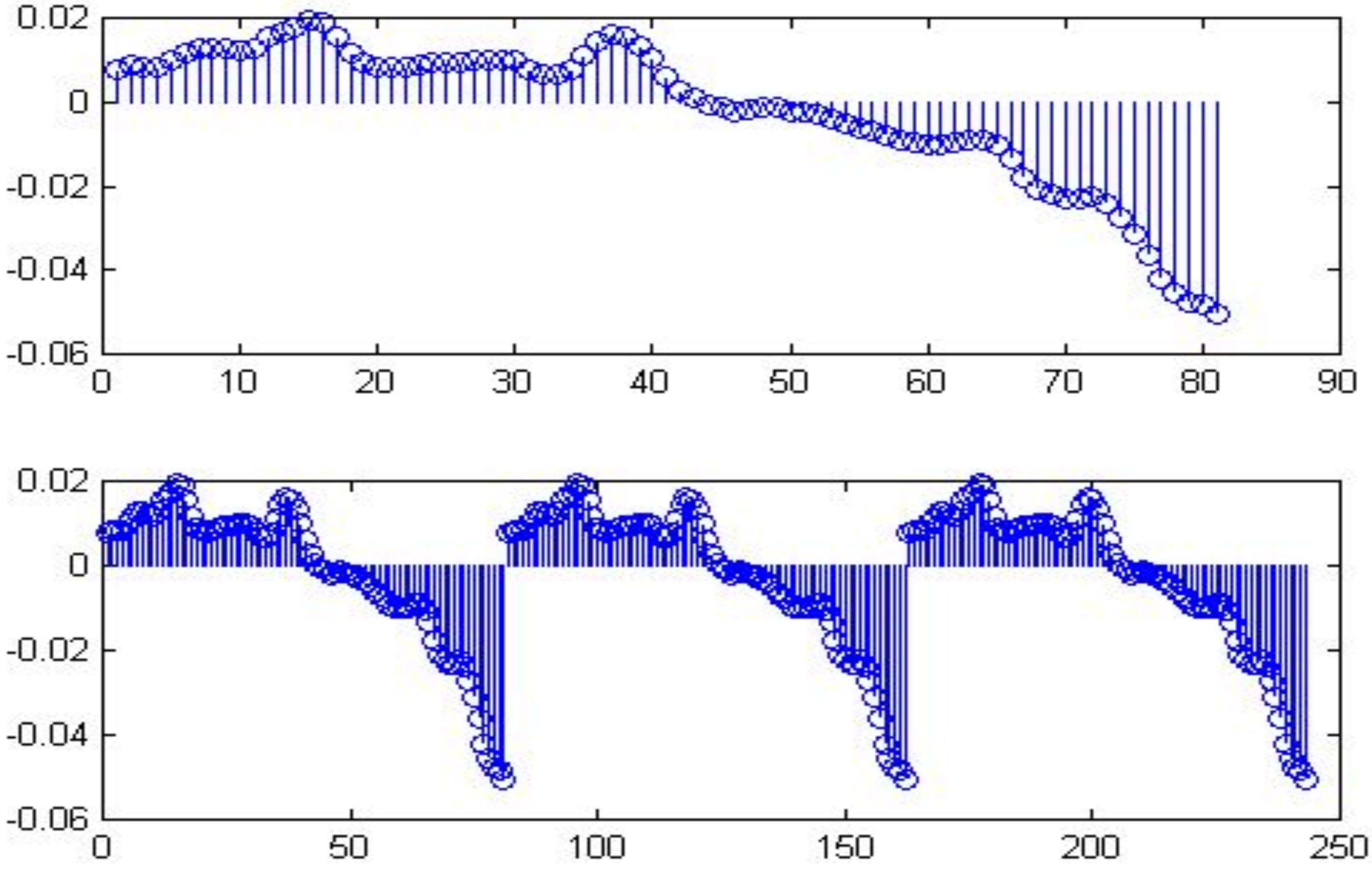
Огибающая спектра (spectral envelope)



Периодическое продолжение

С точки зрения спектрального анализа дискретных сигналов, **ЛЮБОЙ** дискретный сигнал считается **периодически продолженным**

Пример – исходный и периодически продолженный сигналы



Периодическое продолжение

- Любой сигнал (вне зависимости от того, является ли он физически периодически или нет) рассматривается как **периодически продолженный (= периодический)**
- Для БПФ и участок гласного, и участок фрикативного будут равно периодическими

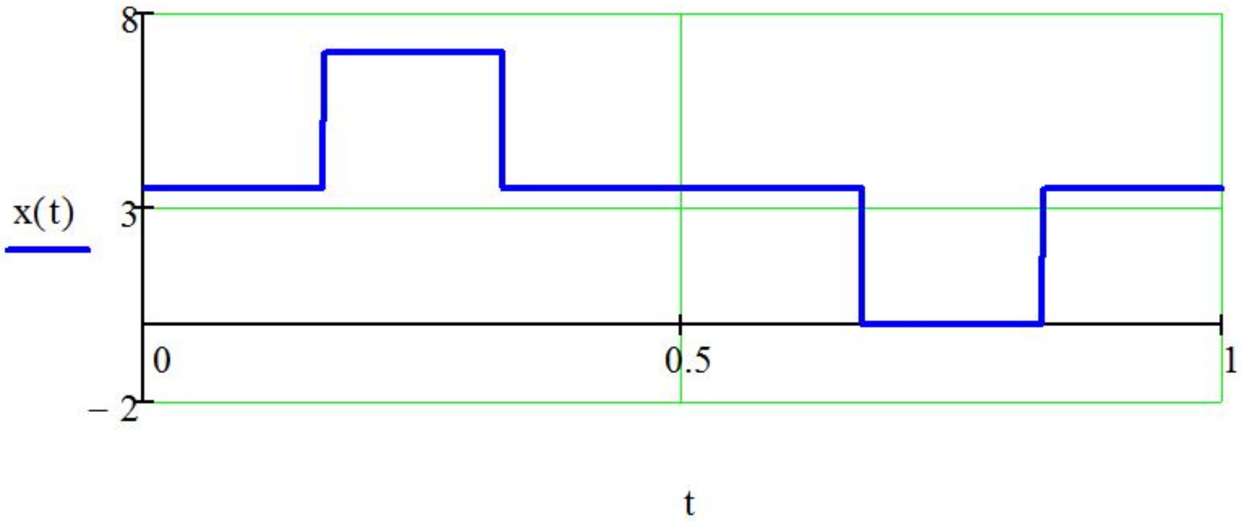
Теорема Фурье

- Раз любой дискретный сигнал рассматривается как периодический (с периодом ***T***, равным длительности сигнала), то к нему можно применить теорему Фурье
- Следовательно, любой дискретный сигнал может быть представлен как сумма гармоник с частотами ***(1/T), (2/T), (3/T), (4/T)*** и т.д.

Пример

- Пусть длительность ***T*** анализируемого сигнала = 20 миллисекунд (0.02 секунд). Тогда сигнал может быть представлен в виде суммы гармоник с частотами 50 Гц (1 / 0.02), 100 Гц (2 / 0.02), и т.д.

Пример



Вычислим амплитуды разложения в ряд Фурье и построим линейчатый график амплитудного спектра

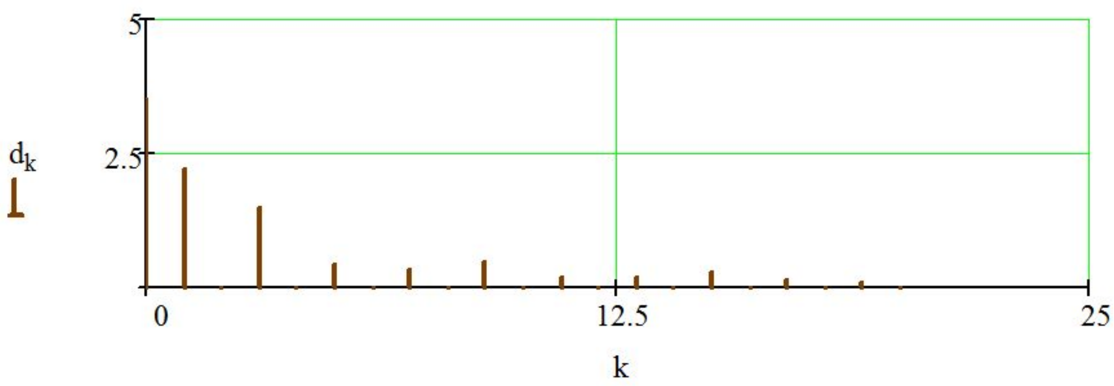
Пример

$T := 1$

$$k := 1 \,..\, 100 \qquad a_k := \frac{2}{T}\cdot\int_0^T x(t)\cdot\cos\left(k\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{T}\cdot t\right)dt \qquad b_k := \frac{2}{T}\cdot\int_0^T x(t)\cdot\sin\left(k\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{T}\cdot t\right)dt$$

$$k := 0 \,..\, 20$$

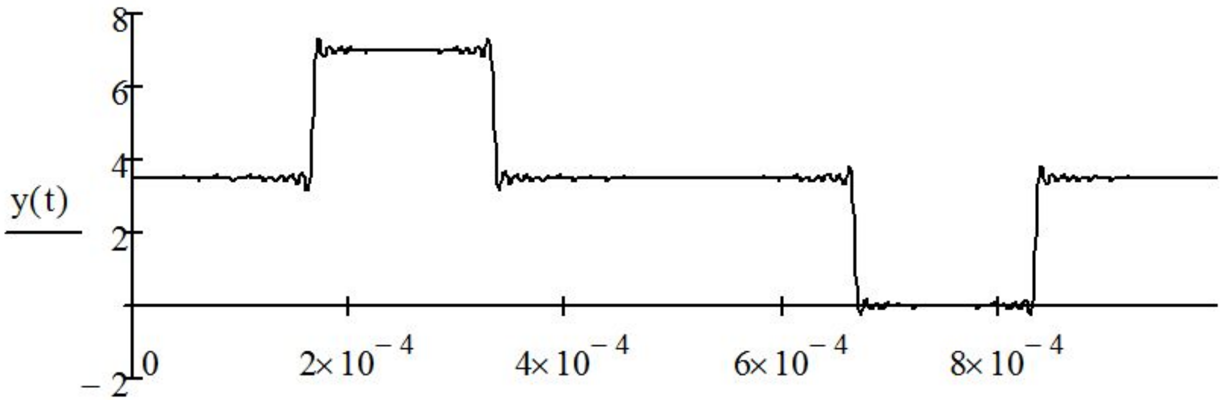
$$d_k := \begin{cases} \frac{1}{T}\cdot\int_0^T x(t)\,dt & \text{if } k = 0 \\ \sqrt{\left(a_k\right)^2 + \left(b_k\right)^2} & \text{if } k \geq 1 \end{cases}$$



Вычислим амплитуды разложения в ряд Фурье и построим линейчатый график амплитудного спектра

Пример

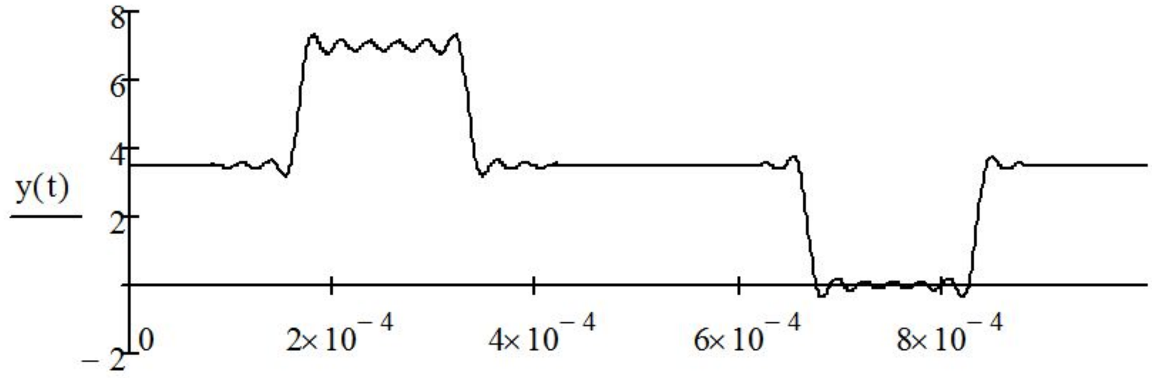
$$y(t) := \sum_{k=1}^{100} \left(a_k \cdot \cos\left(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t\right) \right) + d_0$$



По амплитудам разложения a_k, b_k восстановим исходный сигнал, используя ряд Фурье и построим графики

Пример

$$y(t) := \sum_{k=1}^{35} \left(a_k \cdot \cos\left(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} \cdot t\right)\right) + d_0$$



По амплитудам разложения a_k, b_k восстановим исходный сигнал, используя ряд Фурье и построим графики

Дискретное преобразование Фурье

- **Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) (Discrete Fourier Transform, DFT)** – результат применения теоремы Фурье к дискретному сигналу
- ДПФ позволяет вычислить спектр сигнала по самому сигналу
- **Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)** позволяет вычислить сигнал по его спектру

Дискретное преобразование Фурье (discrete Fourier transform, DFT)

- Имеем исходную последовательность N комплексных чисел (например, значения сигнала в N точках выборки) x_0, x_1, ... x_{N-1} . Последовательность N комплексных чисел X_0, X_1, ... X_{N-1}, вычисляемых из исходной по формулам:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-\frac{2\pi i}{N} kn) \qquad k = 0,\dots, N-1 \tag{21}$$

называется дискретным преобразованием Фурье (DFT) исходной последовательности.
Обратное дискретное преобразование Фурье (Inverse discrete Fourier transform, IDFT) дается формулой:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(\frac{2\pi i}{N} kn) \qquad n = 0,\dots, N-1 \tag{22}$$

Дискретное преобразование Фурье (discrete Fourier transform, DFT)

- Нормировочный множитель 1/N и знаки экспонент в DFT и IDFT—это соглашения, различающиеся в разных реализациях. Единственное требование – знаки должны быть противоположны, а произведение нормировочных множителей должно быть 1/N.

Определение ДПФ

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(-j\frac{2\pi k n}{N}\right)}$$

комплексные гармоники

номер гармоники

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N\tau} \quad \left(\bar{\omega}_k = \frac{2\pi k}{N}\right)$$

частота (нормированная частота) k-ой гармоники

Дискретный спектр

$$\boxed{\{X(k)\}}$$

комплексный спектр дискретного сигнала

$$\boxed{\{|X(k)|\}}$$

амплитудный спектр дискретного сигнала

$$\boxed{\left\{\phi(k) = \arctan\left(\frac{ImX(k)}{ReX(k)}\right)\right\}}$$

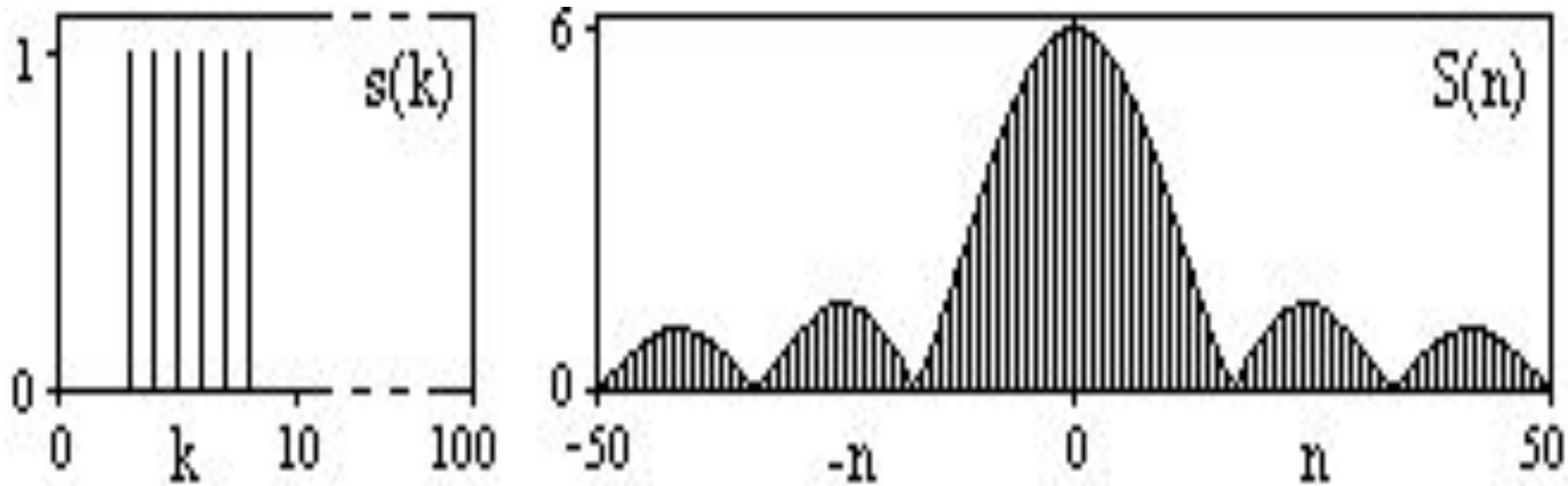
фазовый спектр дискретного сигнала

Обратное ДПФ

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(j \frac{2\pi k n}{N}\right)}$$

Пример ДПФ

Пример: На интервале T= [0,99], N=100, задан дискретный сигнал $s(k) = \sum_{i=3}^{8} \delta(k-i)$ - прямоугольный импульс с единичными значениями на точках k от 3 до 8. Форма сигнала и модуль его спектра в главном частотном диапазоне, вычисленного по формуле $S(n) = \sum_{k=0}^{99} s(k) \times \exp(-i2\pi kn/100)$ с нумерацией по n от -50 до +50 с шагом по частоте, соответственно, $\Delta\omega = 2\pi/100$, приведены на рисунке ниже.



Быстрое преобразование Фурье

- **Быстрое преобразование Фурье (БПФ) (Fast Fourier Transform, FFT)** – способ «быстрого» вычисления ДПФ за счет одного математического трюка
- **Обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ) (Inverse Fast Fourier Transform, IFFT) -** способ «быстрого» вычисления ОДПФ за счет одного математического трюка
- Общее количество операций в БПФ – примерно
- Например, для 256 отсчетов имеем количество операций 2048 операций (вместо 65536 для ДПФ)

$$N \log_2 N$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

БПФ есть математически эквивалентный, но более быстрый алгоритм вычисления ДПФ. Основная идея – можно достичь экономии в расчетах, если сначала разбить исходный ряд на два более коротких, выполнить ДПФ для них, а потом определенным образом собрать полное ДПФ. Соответственно можно получить еще большую экономию, если при расчете ДПФ от половинок исходного сигнала, тоже разделить каждую половинку на две части. И т.д. Особенность БПФ – требования к длине реализации N. Для достижения максимальной эффективности требуется чтобы N было степенью двойки, т.е. 32,64,128,256,512, и т. д. Если в исходном сигнале число отсчетов N не кратно степени 2, то сигнал следует искусственно дополнить до ближайшей степени 2 нулями либо средним значением по имеющейся части.

В чем трюк?

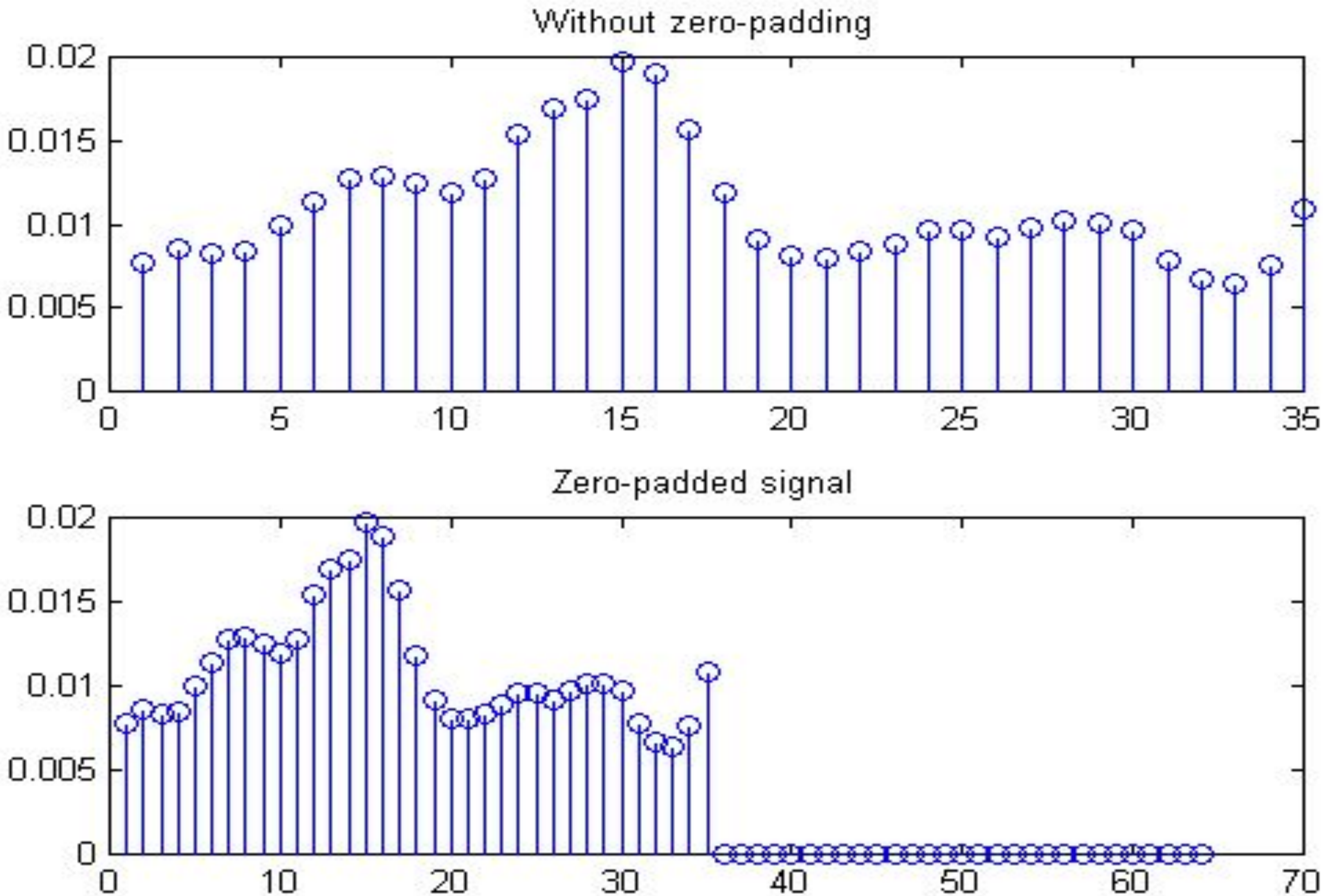
Если длина сигнала в отсчетах есть степень двойки (например, 256 отсчетов = 2^8, 512 отсчетов = 2^9), то количество операций можно существенно сократить

БПФ

- Таким образом, для эффективного использования БПФ длина сигнала в отсчетах должна быть **64** или **128** или **256** или **512** или **1024** или **2048** и т.д.

- Как этого добиться в действительности?

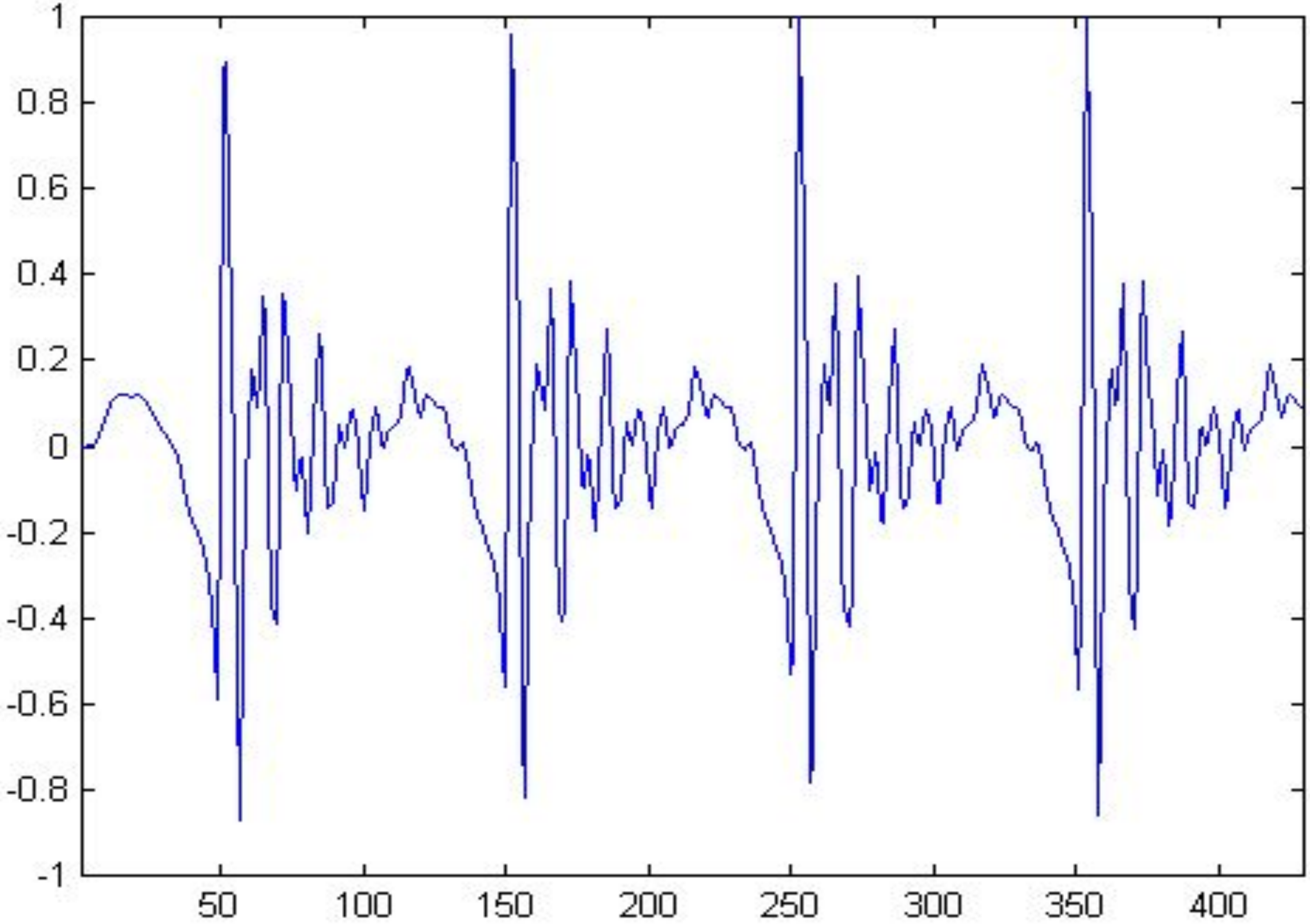
Дополнение нулями (zero-padding)



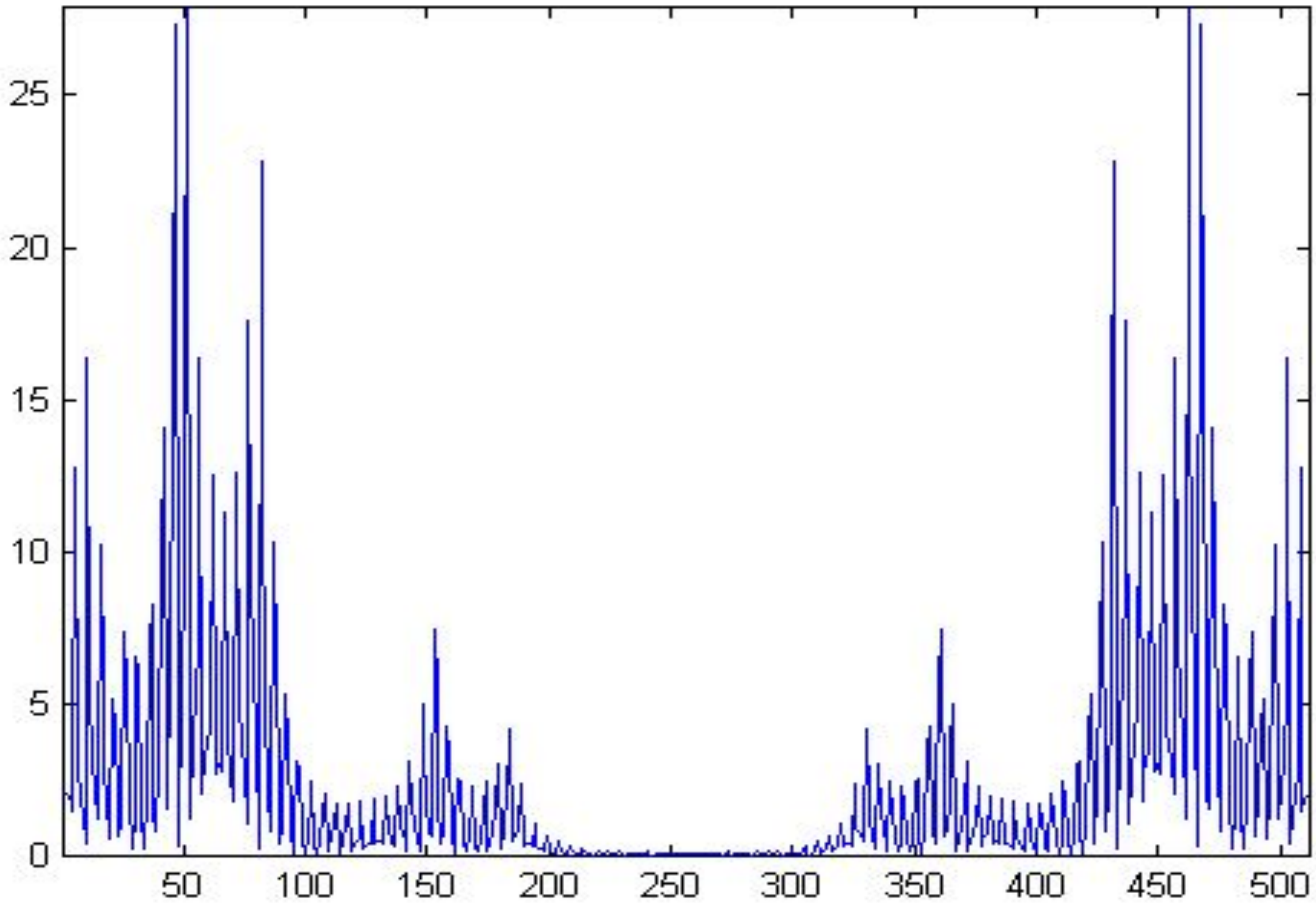
MATLAB

- ***Y = fft(x)*** - без дополнения нулями (может вычислять ОЧЕНЬ медленно, если длина сигнала ***x*** в отсчетах не равна степени двойки)
- ***Y = fft(x, N)*** – с дополнением нулями до ***N*** (где ***N*** – число, равное степени двойки, и большее, чем исходная длина сигнала ***x*** в отсчетах)
- ***X = ifft(Y)*** – ОБПФ

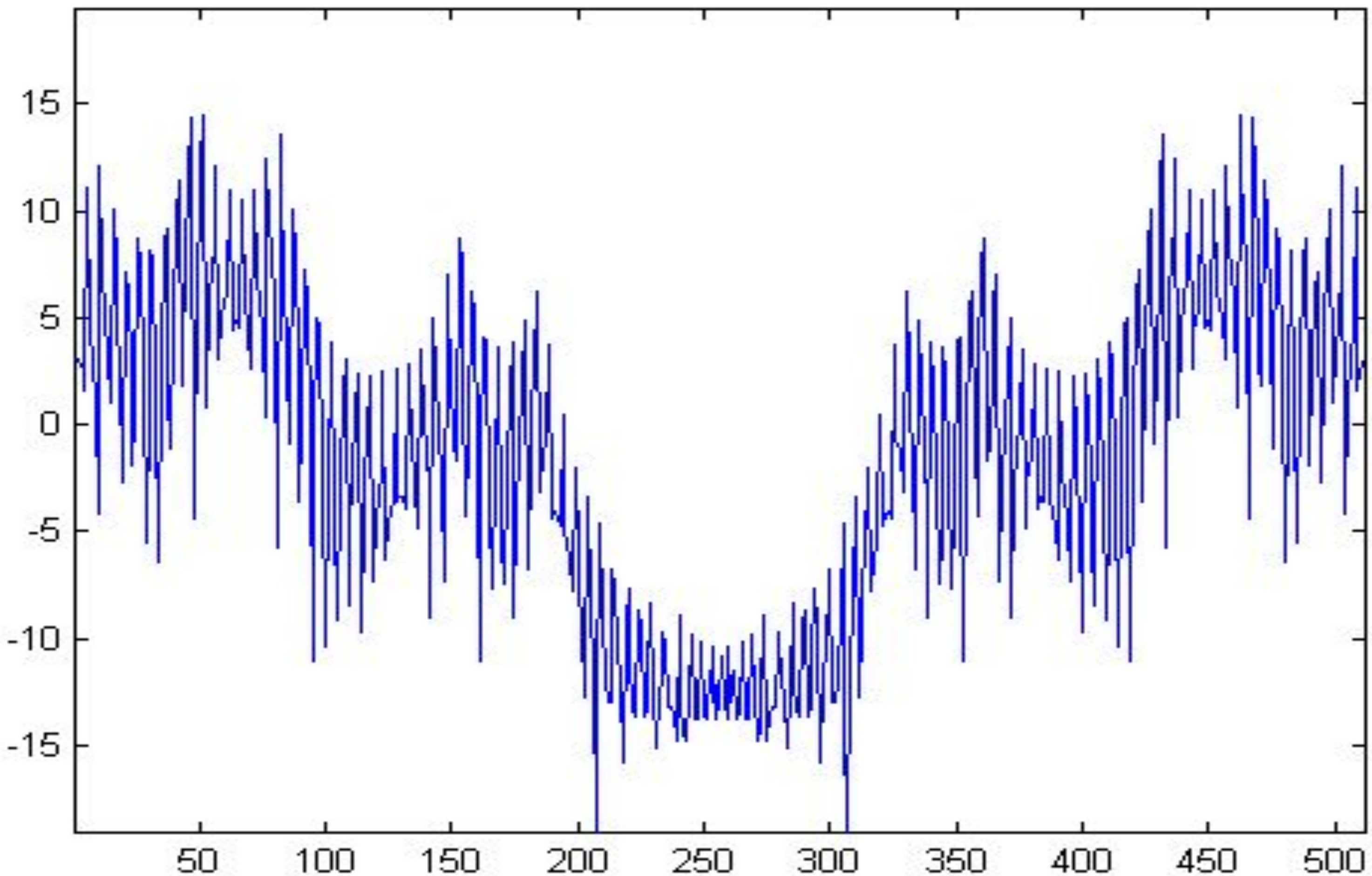
Пример



512-БПФ (амплитудный спектр)



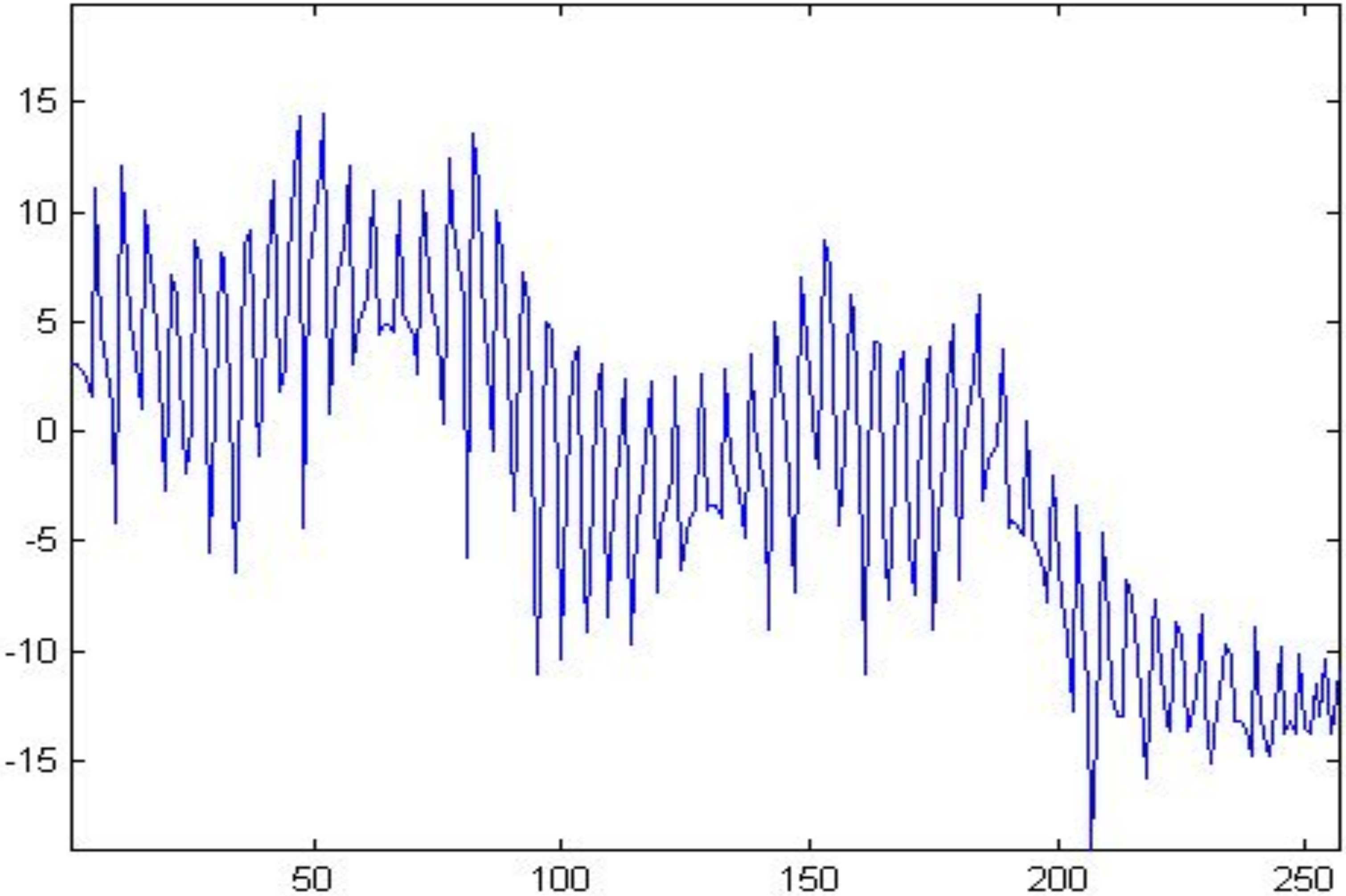
512-БПФ (логарифмический спектр)



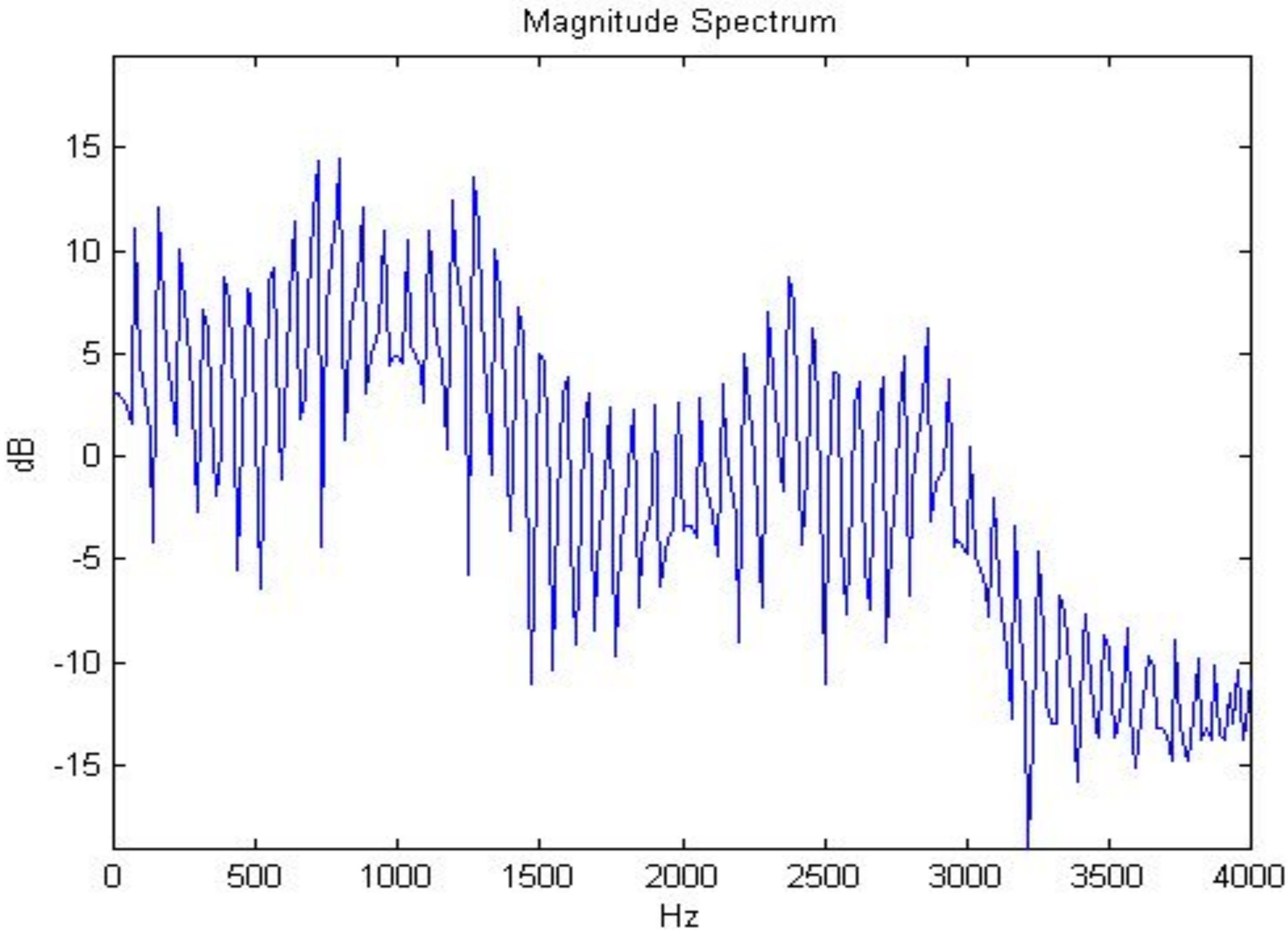
Свойство 3

- БПФ-спектр симметричен относительно срединной гармоники (например, 256-й гармоники для 512-точечного БПФ)
- Соответствующая частота = половине частоты дискретизации
- Например, для частоты дискретизации 16 кГц БПФ-спектр симметричен относительно частоты 8 кГц
- Необходимо вычислять спектр только до половины частоты дискретизации

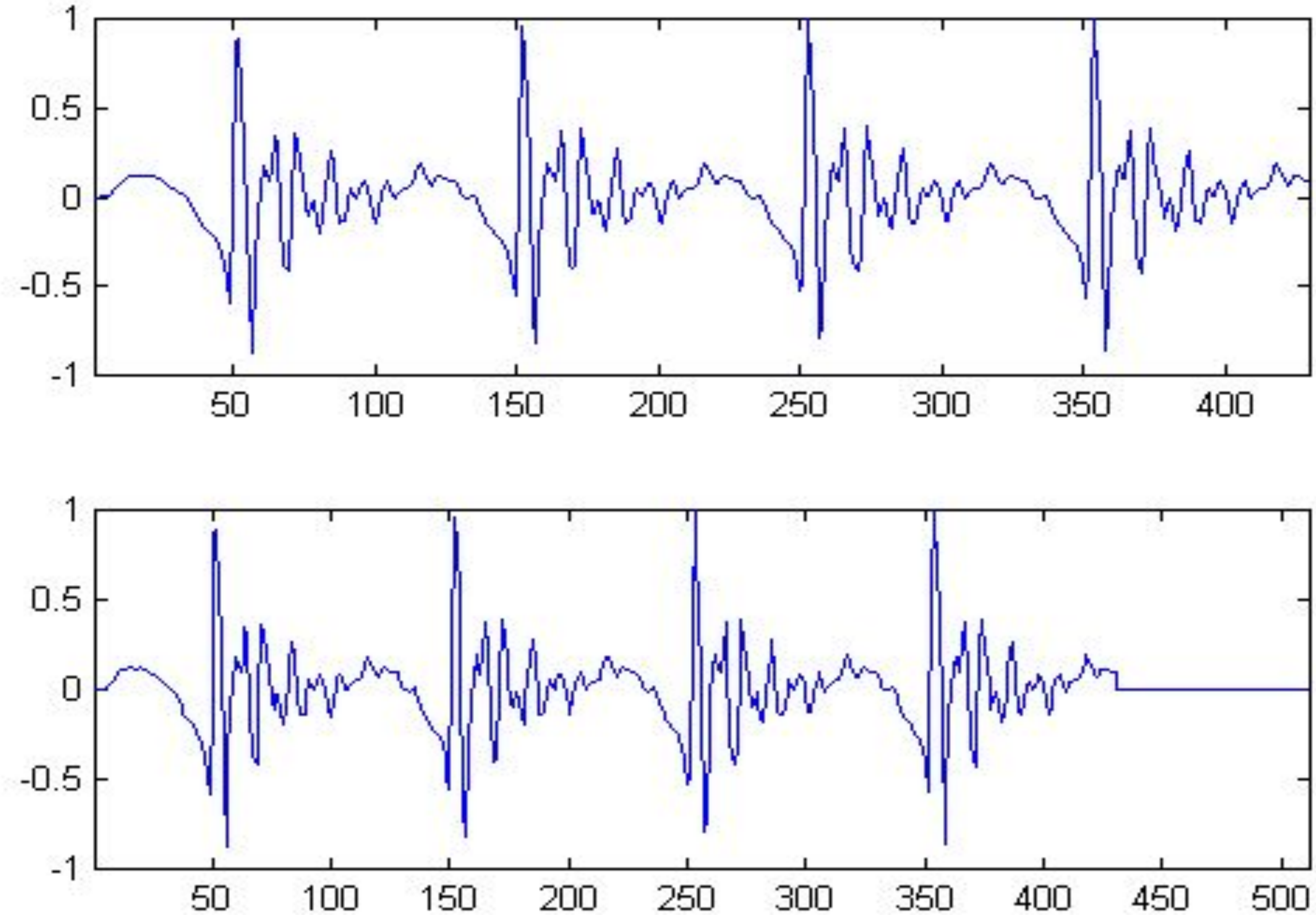
512-БПФ, физический спектр



512-БПФ


Magnitude Spectrum
15
10
5
0
-5
-10
-15
dB
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Hz

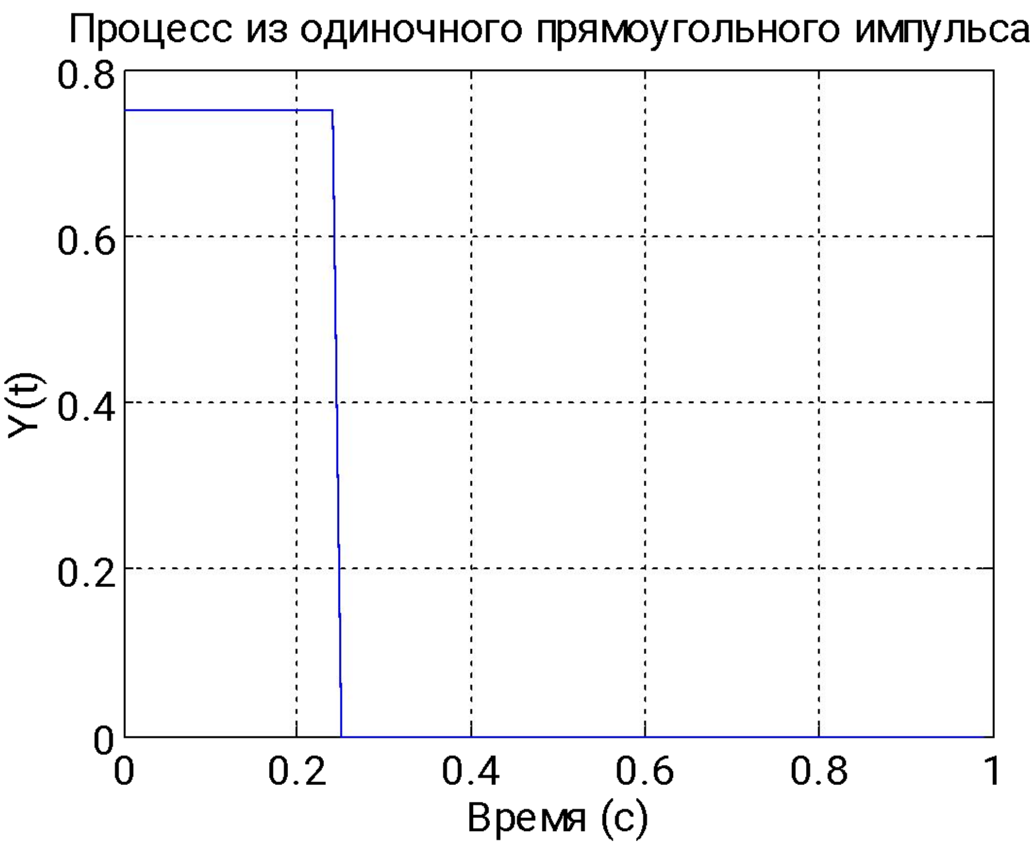
ОБПФ


1
0.5
0
-0.5
-1
50 100 150 200 250 300 350 400
1
0.5
0
-0.5
-1
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500

Что нужно помнить

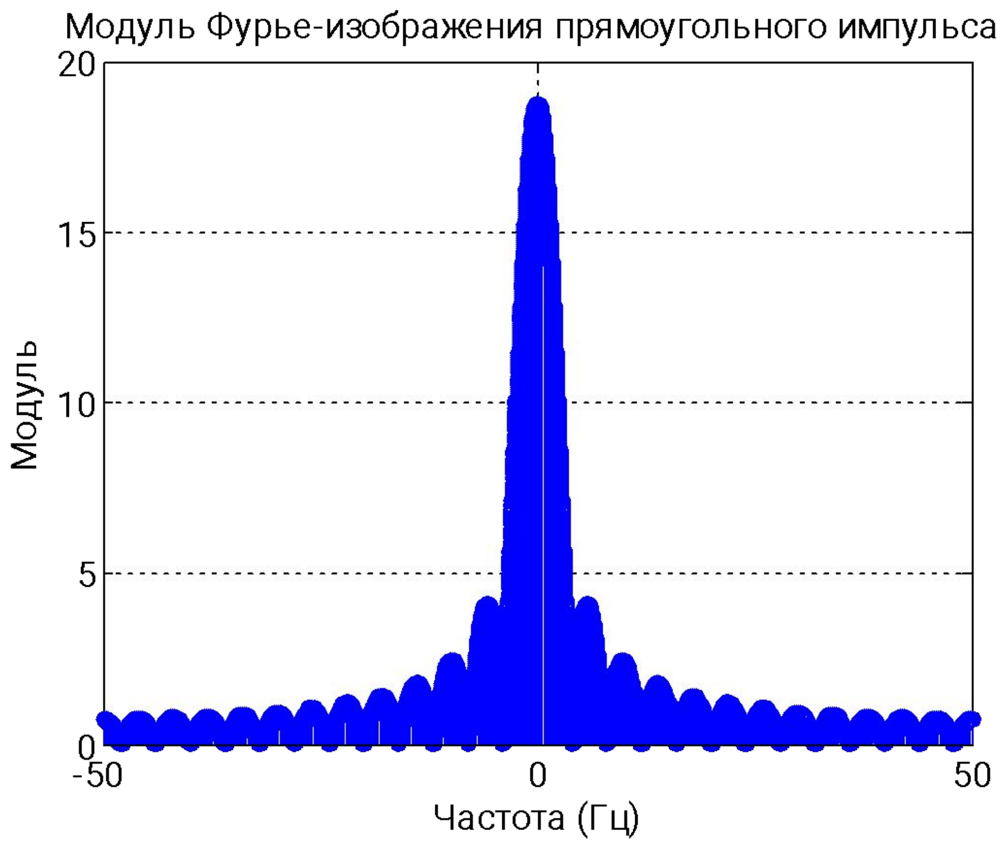
- Если длина сигнала в отсчетах = ***N***, в секундах = ***T***, то сигнал можно представить суммой из ***N*** гармоник с частотами ***1/T***, ***2/T***, ***3/T***, …, ***N/T***
- БПФ-спектр нужно вычислять до гармоники с частотой ***N/(2T)***
- Если частота дискретизации сигнала = ***Fs***, то БПФ-спектр вычисляется до частоты ***Fs/2***
- Если ***N*** – не степень двойки, то необходимо дополнить нулями сигнал до ближайшего числа, являющегося степенью двойки (в **MATLAB** это делается автоматически)

Фурье-изображение прямоугольного импульса



Сформируем процесс, состоящий из одиночного прямоугольного импульса. Зададим шаг дискретизации Ts=0.01c, длительность процесса T=100c, амплитуду импульса A=0.75 и его ширину w=0.5c:

Фурье-изображение прямоугольного импульса



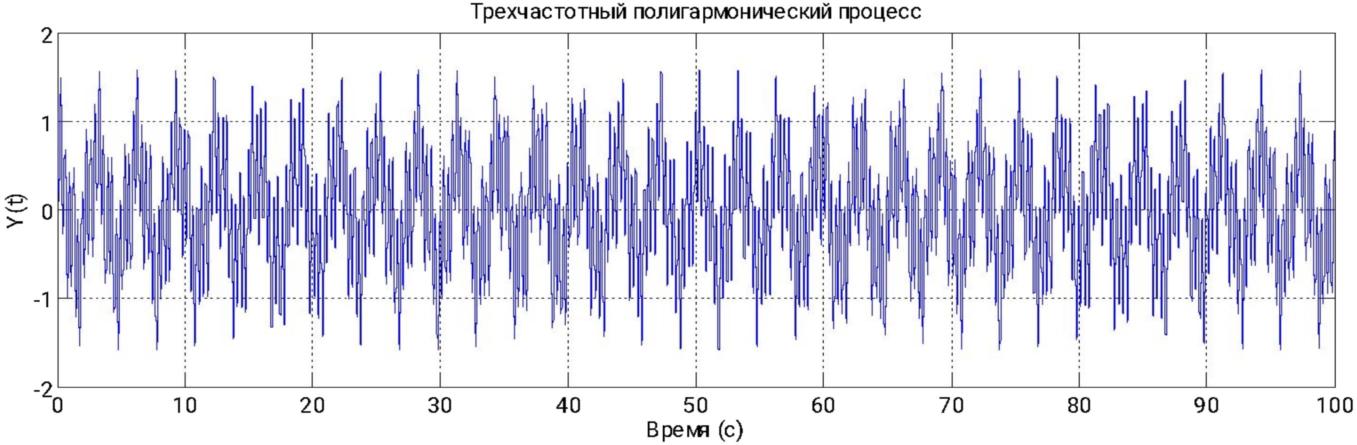
Сформируем процесс, состоящий из одиночного прямоугольного импульса. Зададим шаг дискретизации Ts=0.01с, длительность процесса T=100с, амплитуду импульса A=0.75 и его ширину w=0.5с:

Фурье-изображение полигармонического процесса

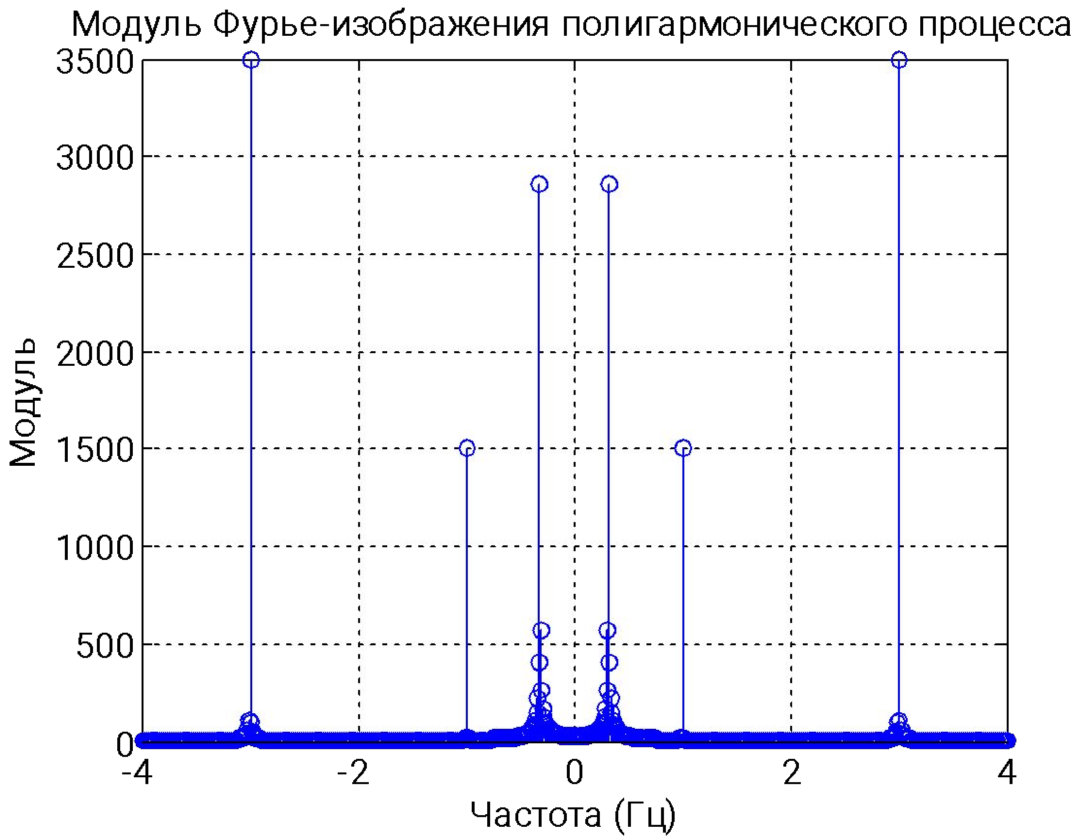
Рассмотрим пример трехчастотных гармонических колебаний - с частотою 1/π, 1 и 3 Гц и амплитудами соответственно 0.6, 0.3 та 0.7:

$$y(t) = 0.6 \cdot \cos(2t) + 0.3\sin(2\pi t) + 0.7\cos(6\pi t + \pi / 4).$$

Найдем Фурье-изображение этого процесса и выведем графики самого процесса, модуля его Фурье-изображения, а также действительную и мнимую части:

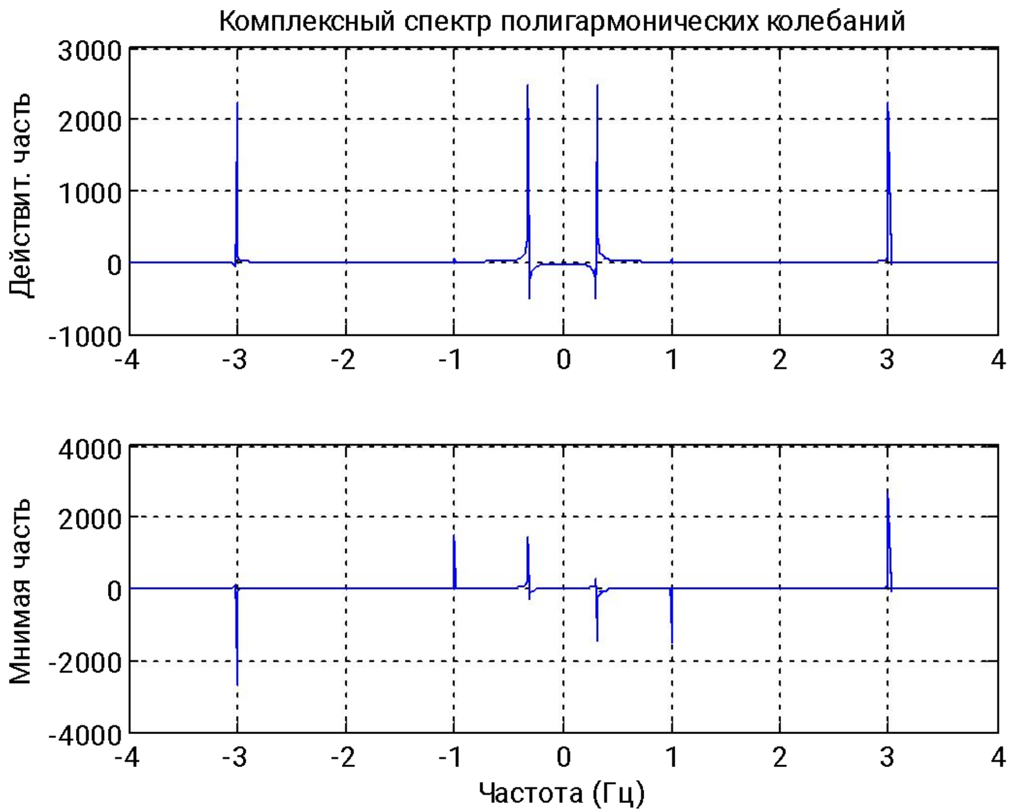


Фурье-изображение полигармонического процесса



Результат Фурье-преобразования мало что говорит об амплитудах гармонических составляющих. Это обусловлено *различием между определениями Фурье-изображения и комплексного спектра*. Поэтому *для незатухающих (установившихся, стационарных) колебаний* любого вида намного *удобнее находить не Фурье-изображение, а его величину, деленную на число точек в реализации*.

Фурье-изображение полигармонического процесса



Результат Фурье-преобразования мало что говорит об амплитудах гармонических составляющих. Это обусловлено *различием между определениями Фурье-изображения и комплексного спектра*. Поэтому *для незатухающих (установившихся, стационарных) колебаний* любого вида намного *удобнее находить не Фурье-изображение, а его величину, деленную на число точек в реализации*.