МАТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ МОМЕНТА В ОБОЗНАЧЕНИЯХ ДИРАКА

Исходные формулы – коммутационные соотношения

$$\left[\hat{j}_i, \hat{j}_k\right] = ie_{ikl}\hat{j}_l$$

$$\left[\hat{\vec{j}}^{\,2}, \hat{j}_k\right] = 0, \quad \hat{\vec{j}}^{\,2} = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2$$

e_{ikl} – абсолютный антисимметричный тензор третьего ранга

Частный случай – пространственный момент импульса

$$\hbar\hat{\vec{j}} = \hbar\hat{\vec{l}} = \left[\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}\right]$$

В дальнейшем величину $\hat{\vec{j}}$ будем называть спиновым моментом или, кратко, моментом.

Одновременно измеримы квадрат момента и одна из проекций. Согласно общепринятым правилам, выберем в качестве «спиновых» квантовых чисел, характеризующих состояние системы выберем следующие

$$\hat{j}_z\left|Jj_z\right\rangle = j_z\left|Jj_z\right\rangle$$

$$\hat{\vec{j}}^{\,2}\left|Jj_z\right\rangle = J^2\left|Jj_z\right\rangle$$

Вводим операторы

$$\hat{j}_{\pm} = \hat{j}_x \pm i \cdot \hat{j}_y, \quad \left[\hat{j}^2, \hat{j}_{\pm} \right] = 0, \quad \left\langle J j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle = \begin{cases} C_{j'_z j_z}, j'_z = j_z \pm 1 \\ 0, \qquad j'_z \neq j_z \pm 1 \end{cases}$$

Матричный элемент коммутатора

$$\left\langle J' j'_z \middle| \left[\hat{j}^2, \hat{j}_{\pm} \right] \middle| J j_z \right\rangle = \left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}^2 \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle - \left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \hat{j}^2 \middle| J j_z \right\rangle =$$

$$\sum_{J'' j''_z} \left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}^2 \middle| J'' j''_z \right\rangle \left\langle J'' j''_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle - \sum_{J'' j''_z} \left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J'' j''_z \right\rangle \left\langle J'' j''_z \middle| \hat{j}^2 \middle| J j_z \right\rangle =$$

$$\sum_{J'' j''_z} J''^2 \left\langle J' j'_z \middle| J'' j''_z \right\rangle \left\langle J'' j''_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle - \sum_{J'' j''_z} J^2 \left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J'' j''_z \right\rangle \left\langle J'' j''_z \middle| J j_z \right\rangle =$$

$$J'^2 \left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle - J^2 \left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle = \left(J'^2 - J^2 \right) \left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle = 0$$

Отличны от нуля только матричные элементы с одинаковым квадратом момента

$$\left\langle J' j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle = \left\langle J j'_z \middle| \hat{j}_{\pm} \middle| J j_z \right\rangle \cdot \delta_{JJ'}$$

Матричные элементы *x,y* -проекций момента

$$\left\langle J'j_z'\right|\hat{j}_x\left|Jj_z\right\rangle=\frac{1}{2}\left[\left\langle Jj_z'\right|\hat{j}_+\left|Jj_z\right\rangle+\left\langle Jj_z'\right|\hat{j}_-\left|Jj_z\right\rangle\right]\cdot\delta_{JJ'}$$

$$\left\langle J'j_z'\right|\hat{j}_y\left|Jj_z\right\rangle=-\frac{i}{2}\left[\left\langle Jj_z'\right|\hat{j}_+\left|Jj_z\right\rangle-\left\langle Jj_z'\right|\hat{j}_-\left|Jj_z\right\rangle\right]\cdot\delta_{JJ'}$$

Матричные элементы проекций момента и их линейных комбинаций отличны от нуля только при одинаковых значениях квадрата момента *J*!

Ограниченность значений z-проекции момента

$$\left\langle Jj_z \middle| \hat{j}^2 - \hat{j}_z^2 \middle| Jj_z \right\rangle = J^2 - j_z^2 = \left\langle Jj_z \middle| \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 \middle| Jj_z \right\rangle =$$

$$\sum_{j_z'} \left\langle Jj_z \middle| \hat{j}_x \middle| Jj_z' \right\rangle \left\langle Jj_z' \middle| \hat{j}_x \middle| Jj_z \right\rangle + \sum_{j_z'} \left\langle Jj_z \middle| \hat{j}_y \middle| Jj_z' \right\rangle \left\langle Jj_z' \middle| \hat{j}_y \middle| Jj_z \right\rangle =$$

$$\sum_{j_z'} \left[\left| \left\langle Jj_z \middle| \hat{j}_x \middle| Jj_z' \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle Jj_z \middle| \hat{j}_y \middle| Jj_z' \right\rangle \right|^2 \right] \geq 0$$

Таким образом

$$j_{\min} \leq j_z \leq j_{\max}$$

Коммутатор

$$\left[\hat{j}_{\pm},\hat{j}_z\right]=\left[\hat{j}_x,\hat{j}_z\right]\pm i\left[\hat{j}_y,\hat{j}_z\right]=ie_{xzy}\cdot\hat{j}_y\pm i\left(ie_{yzx}\cdot\hat{j}_x\right)=-i\cdot\hat{j}_y\ \square\ \hat{j}_x=\square\left(\hat{j}_x\pm i\cdot\hat{j}_y\right)$$

Или

$$\left[\hat{j}_{\pm},\hat{j}_z\right]=\square\,\hat{j}_{\pm}$$

Коммутатор

$$\left[\hat{j}_{+},\hat{j}_{-}\right]=\left[\hat{j}_x+i\cdot\hat{j}_y,\hat{j}_x-i\cdot\hat{j}_y\right]=i\left(\left[\hat{j}_y,\hat{j}_x\right]-\left[\hat{j}_x,\hat{j}_y\right]\right)=$$
$$i\left(ie_{yxz}\cdot\hat{j}_z-ie_{xyz}\cdot\hat{j}_z\right)=2\hat{j}_z$$

Или

$$\left[\hat{j}_{+},\hat{j}_{-}\right]=2\hat{j}_z$$

Выберем состояние с заданной z-проекцией

$$\hat{j}_z \left| Jj_z \right\rangle = j_z \left| Jj_z \right\rangle$$

Построим из него новое состояние

$$\hat{j}_+ \left| Jj_z \right\rangle$$

Подействуем на него оператором z- проекции

$$\hat{j}_z \left(\hat{j}_+ \left| Jj_z \right\rangle \right) = \left(\hat{j}_+ \hat{j}_z + \hat{j}_+ \right) \left| Jj_z \right\rangle = \left(j_z + 1 \right) \left(\hat{j}_+ \left| Jj_z \right\rangle \right)$$

Таким образом

$$\hat{j}_+ \left| Jj_z \right\rangle = \lambda_{Jj_z} \left| Jj_z + 1 \right\rangle$$

Из ограниченности z-проекции момента следует

$$\hat{j}_+ \left| Jj_{\max} \right\rangle = 0, \quad \hat{j}_- \left| Jj_{\min} \right\rangle = 0$$

Но

$$\hat{\vec{j}}^2 = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\hat{j}_+ + \hat{j}_- \right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\hat{j}_+ - \hat{j}_- \right)^2 + \hat{j}_z^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\hat{j}_+ \hat{j}_- + \hat{j}_- \hat{j}_+ \right) + \hat{j}_z^2$$

Или

$$\hat{\vec{j}}^2 = \hat{j}_+ \hat{j}_- + \hat{j}_z^2 - \hat{j}_z = \hat{j}_- \hat{j}_+ + \hat{j}_z^2 + \hat{j}_z$$

Поэтому

$$\hat{\vec{j}}^2 \left| Jj_{\max} \right\rangle = J^2 \left| Jj_{\max} \right\rangle = \left(\hat{j}_- \hat{j}_+ + \hat{j}_z^2 + \hat{j}_z \right) \left| Jj_{\max} \right\rangle = j_{\max} \left(j_{\max} + 1 \right) \left| Jj_{\max} \right\rangle$$

$$\hat{\vec{j}}^2 \left| Jj_{\min} \right\rangle = J^2 \left| Jj_{\min} \right\rangle = \left(\hat{j}_+ \hat{j}_- + \hat{j}_z^2 - \hat{j}_z \right) \left| Jj_{\min} \right\rangle = j_{\min} \left(j_{\min} - 1 \right) \left| Jj_{\min} \right\rangle$$

Или

$$j_{\max}^2 + j_{\max} - j_{\min}^2 + j_{\min} = 0$$

$$\left(j_{\max} + j_{\min}\right)\left(j_{\max} - j_{\min} + 1\right) = 0$$

Обращаем в нуль второй сомножитель

$$j_{\max} - j_{\min} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad j_{\max} = j_{\min} - 1 < j_{\min}\,!$$

Поэтому выбираем

$$j_{\max} = -j_{\min} = j$$

Таким образом для собственных значений квадрата момента находим

$$J^2 = j\left(j+1\right)$$

ВАЖНЕЙШЕЕ СЛЕДСТВИЕ

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$$

Матричные элементы «повышающего» и «понижающего» операторов

Рассмотрим диагональный элемент

$$\left\langle jj_z \right| \hat{j}_+ \hat{j}_- \left| jj_z \right\rangle = \sum_{j'_z} \left\langle jj_z \right| \hat{j}_+ \left| jj'_z \right\rangle \left\langle jj'_z \right| \hat{j}_- \left| jj_z \right\rangle =$$

$$\left\langle jj_z \right| \hat{j}_+ \left| jj_z - 1 \right\rangle \left\langle jj_z - 1 \right| \hat{j}_- \left| jj_z \right\rangle = \left| \left\langle jj_z \right| \hat{j}_+ \left| jj_z - 1 \right\rangle \right|^2$$

С другой стороны

$$\left\langle jj_z \right| \hat{j}_+ \hat{j}_- \left| jj_z \right\rangle = \left\langle jj_z \right| \hat{j}^2 - \hat{j}_z^2 + \hat{j}_z \left| jj_z \right\rangle = j(j+1) - j_z^2 + j_z =$$
$$(j + j_z)(j - j_z + 1)$$

Используя неопределённость фазы волновой функции, находим

$$\left\langle jj_z \right| \hat{j}_+ \left| jj_z - 1 \right\rangle = \left\langle jj_z - 1 \right| \hat{j}_- \left| jj_z \right\rangle = \sqrt{(j + j_z)(j - j_z + 1)}$$

Контрольный вопрос. Чему равно?

$$\hat{j}_+ \left| jj_z - 1 \right\rangle = ? \qquad \hat{j}_- \left| jj_z \right\rangle = ?$$

Вспомогательные формулы

$$\hat{j}_+ \left| jj_z \right\rangle = \lambda_{jj_z} \left| jj_z + 1 \right\rangle$$

$$\left\langle jj_z \right| \hat{j}_+ \left| jj_z - 1 \right\rangle = \lambda_{jj_z - 1} \left\langle jj_z \middle| jj_z \right\rangle$$

Ответ

$$\hat{j}_+ \left| jj_z - 1 \right\rangle = \sqrt{(j + j_z)(j - j_z + 1)} \left| jj_z \right\rangle$$

$$\hat{j}_- \left| jj_z \right\rangle = \sqrt{(j + j_z)(j - j_z + 1)} \left| jj_z - 1 \right\rangle$$