Розділ 2. Теорія відношень

2.1. Поняття відношення. Задання відношень

- *декартів добуток множин*
- *бінарне відношення*
- *способи задання відношень*
- *окремі випадки відношень*

Якщо R – бінарне відношення на множинах X, Y, то факт $(x,y)\in R$ часто записується у вигляді xRy

Способи задання відношень

Нехай $A=\{2, 3, 4, 6\}$, $B=\{4, 6\}$.

$R_1 \subseteq A\times B$, $\quad R_2 \subseteq A\times A$

R_1, R_2 – бути дільником

✔ ***список***

$$R_1 = \{(2,4),(2,6),(3,6),(4,4),(6,6)\},$$
$$R_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\}$$

Способи задання відношень

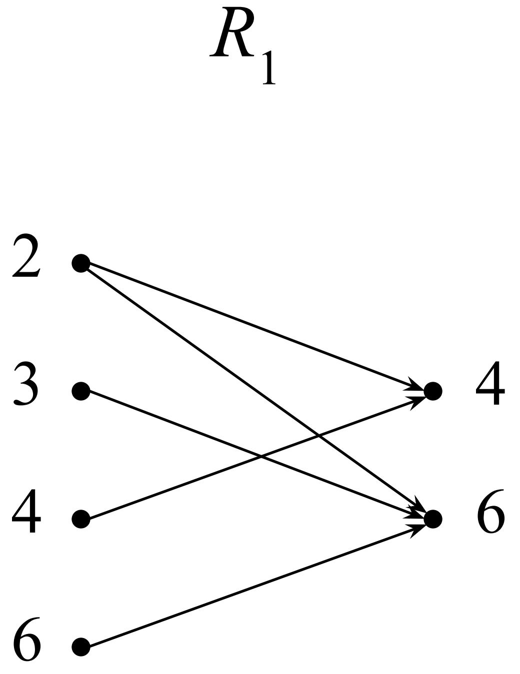
- ***матриця (таблиця)*** $W=W(R)$;
  $w_{ij}=1$, якщо $(x_i, y_j) \in R$ і $w_{ij}=0$, якщо $(x_i, y_j) \notin R$

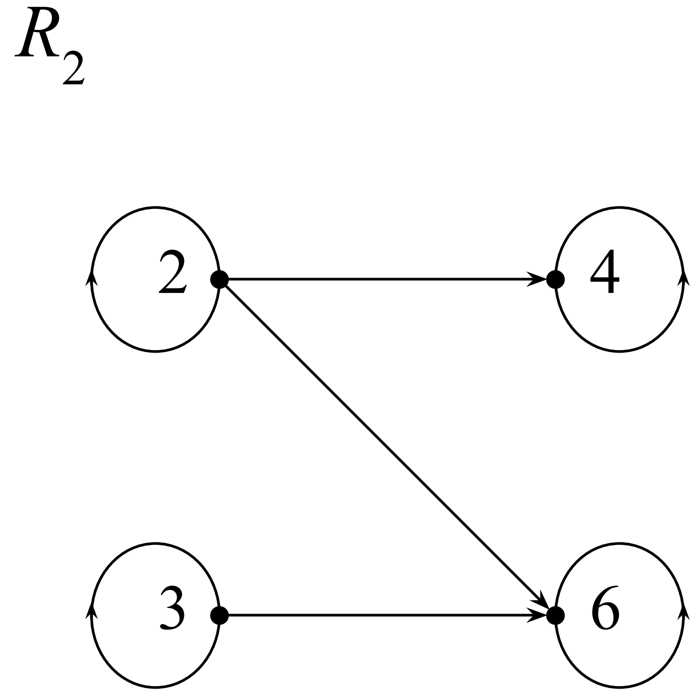
R_1	4	6
2	1	1
3	0	1
4	1	0
6	0	1

R_2	2	3	4	6
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0
6	0	0	0	1

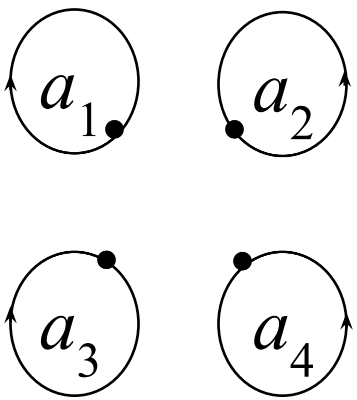
Способи задання відношень

✔ ***граф***

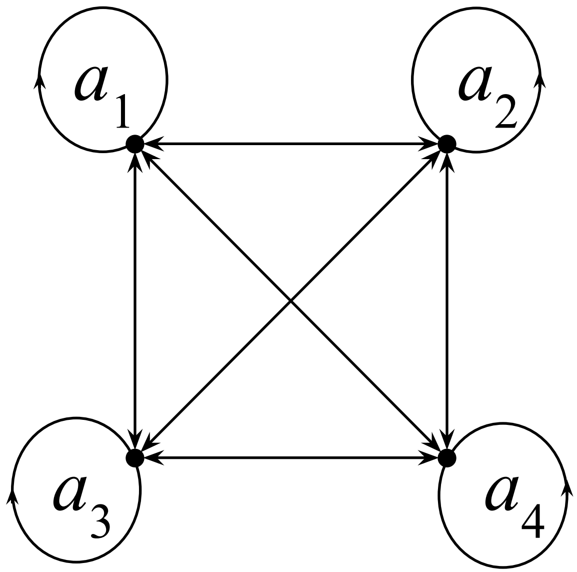




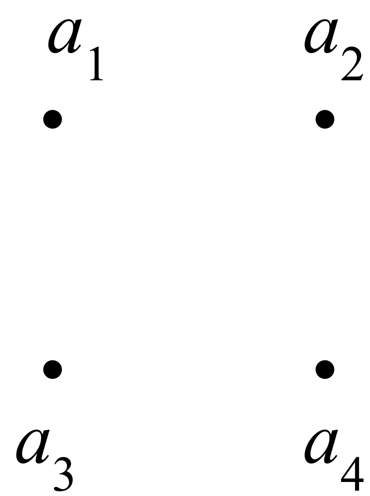
Окремі випадки відношень



Тотожне відношення



Повне відношення
$R = A^2$



Порожнє відношення
$R = \varnothing$

2.2. Операції над відношеннями

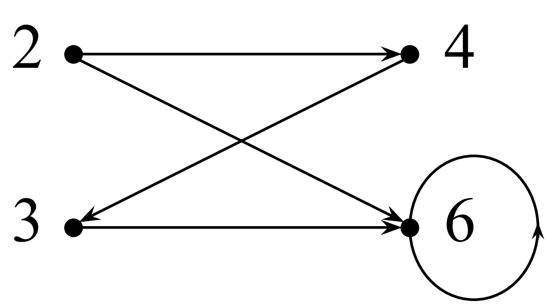
- *обернене відношення*
- *композиція відношень*
- *степінь відношення*
- *переріз відношення*
- *фактор-множина*

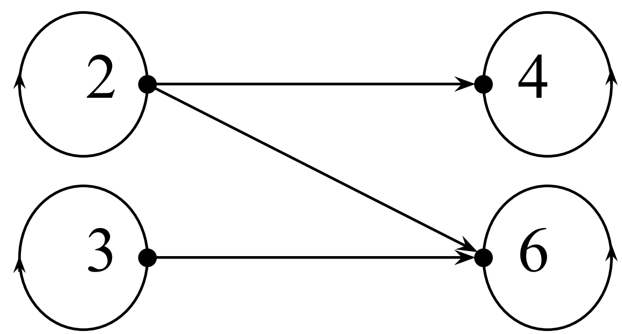
Нехай $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $R_1, R_2 \subseteq A \times A$

$R_1 = \{(2,4),(2,6),(4,3),(3,6),(6,6)\}$,
$R_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\}$

R_1	2	3	4	6
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	1	0	0
6	0	0	0	1

R_2	2	3	4	6
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0
6	0	0	0	1

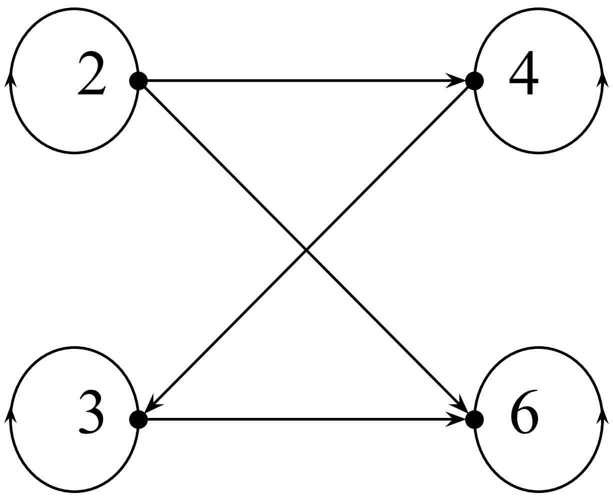




об'єднання $R_1 \cup R_2$

$$R_1 \cup R_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,3),(4,4),(6,6)\}$$

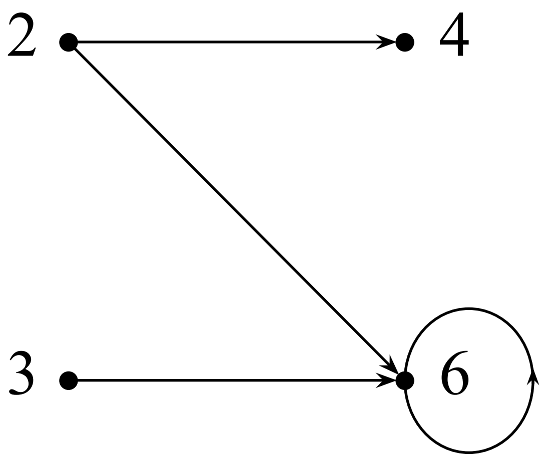
$R_1 \cup R_2$	2	3	4	6
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
6	0	0	0	1



перетин $R_1 \cap R_2$

$$R_1 \cap R_2 = \{(2,4),(2,6),(3,6),(6,6)\}$$

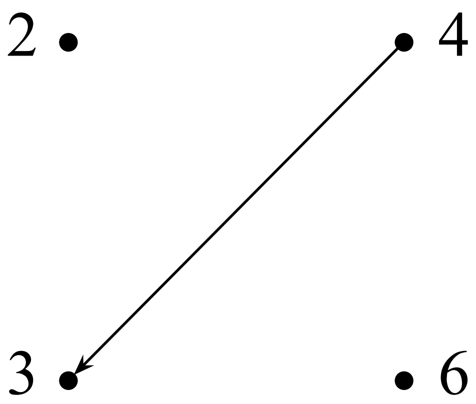
$R_1 \cap R_2$	2	3	4	6
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0
6	0	0	0	1



різниця $R_1 \setminus R_2$

$$R_1 \setminus R_2 = \{(3,4)\}$$

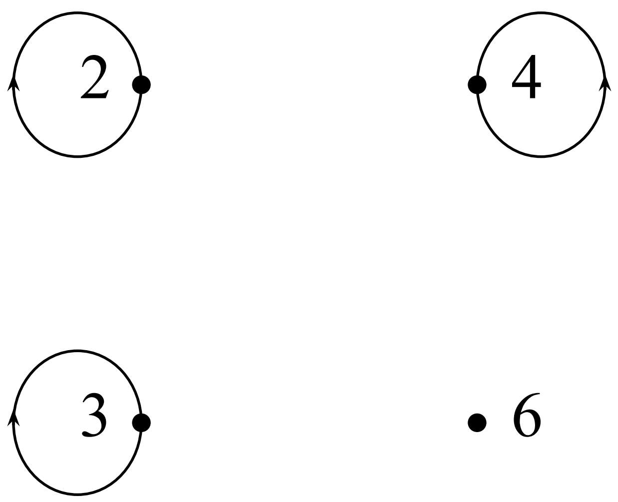
$R_1 \setminus R_2$	2	3	4	6
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	1	0	0
6	0	0	0	0



різниця $R_2 \setminus R_1$

$$R_2 \setminus R_1 = \{(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

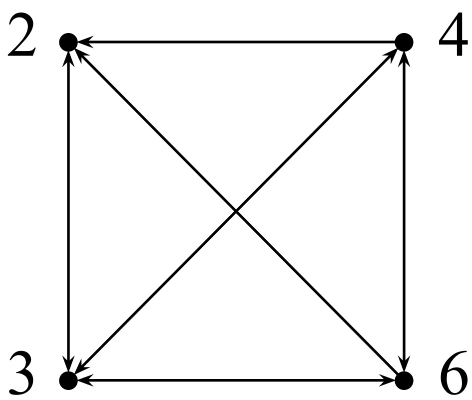
$R_2 \setminus R_1$	2	3	4	6
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0
6	0	0	0	0



доповнення □ R_2

□ $R_2 = \{(2,3),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3),$
$(4,6),(6,2),(6,3),(6,4)\}$

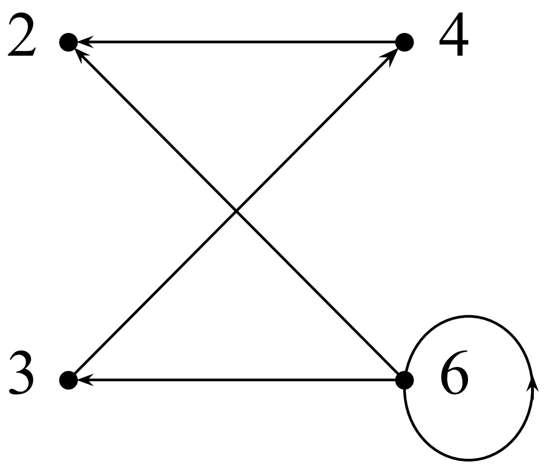
□ R_2	2	3	4	6
2	0	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	1
6	1	1	1	0



обернене R_1^{-1}

$R_1^{-1} = \{(3,4),(4,2),(6,2),(6,3),(6,6)\}$

R_1^{-1}	2	3	4	6
2	0	0	0	0
3	0	0	1	0
4	1	0	0	0
6	1	1	0	1



композиція

Нехай R і S — відношення, такі, що $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, де X, Y, Z — деякі множини.

- ***Композицією відношень*** R і S називається відношення $S \circ R$, що складається з упорядкованих пар (x, z), $x \in X$, $z \in Z$, для яких існує елемент $y \in Y$, такий, що виконуються умови $(x, y) \in R$, $(y, z) \in S$.

Зауваження: для пари $(x, z) \in S \circ R$ «проміжних» елементів Y може бути кілька, однак їх кількість (якщо вона не нульова) не впливає на вид композиції $S \circ R$.

Властивості композиції відношень :

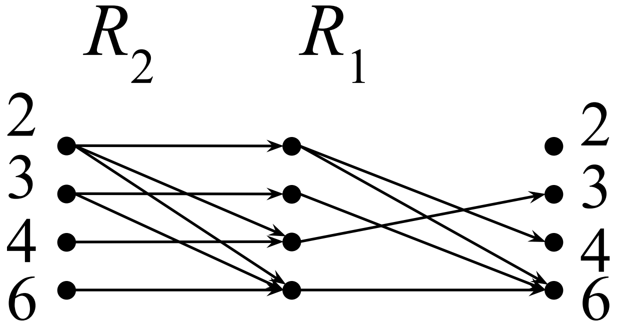
- не виконується закон комутативності
  $S \circ R \neq R \circ S$
- виконується закон асоціативності
  $S \circ (R \circ D) = (S \circ R) \circ D = S \circ R \circ D$
- правило розрахунку оберненого відношення
  $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

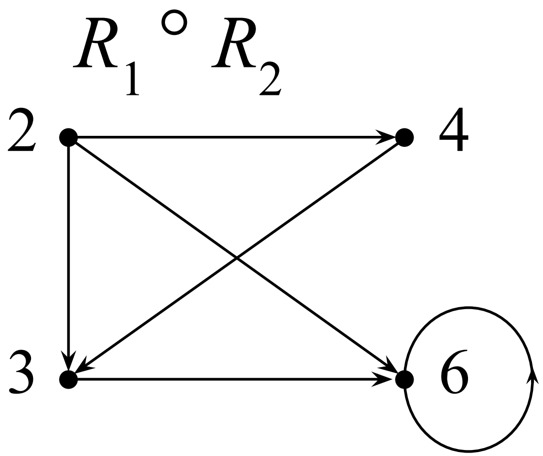
Матриця композиції відношень $S \circ R$ утворюється як добуток матриць відношень S і R з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

композиція $R_1 \circ R_2$

$$R_1 \circ R_2 = \{(2,3),(2,4),(2,6),(4,3),(3,6),(6,6)\}$$

$R_1 \circ R_2$	2	3	4	6
2	0	1	1	1
3	0	0	0	1
4	0	1	0	0
6	0	0	0	1





степінь R^n

- ***n*-й степінь відношення** $R \subseteq X \times X$ позначається R^n і визначається рекурсивно так:
  R^0 — тотожне відношення на множині X;
  $R^n = R^{n\text{-}1} \circ R$, для $n = 1, 2, \ldots$

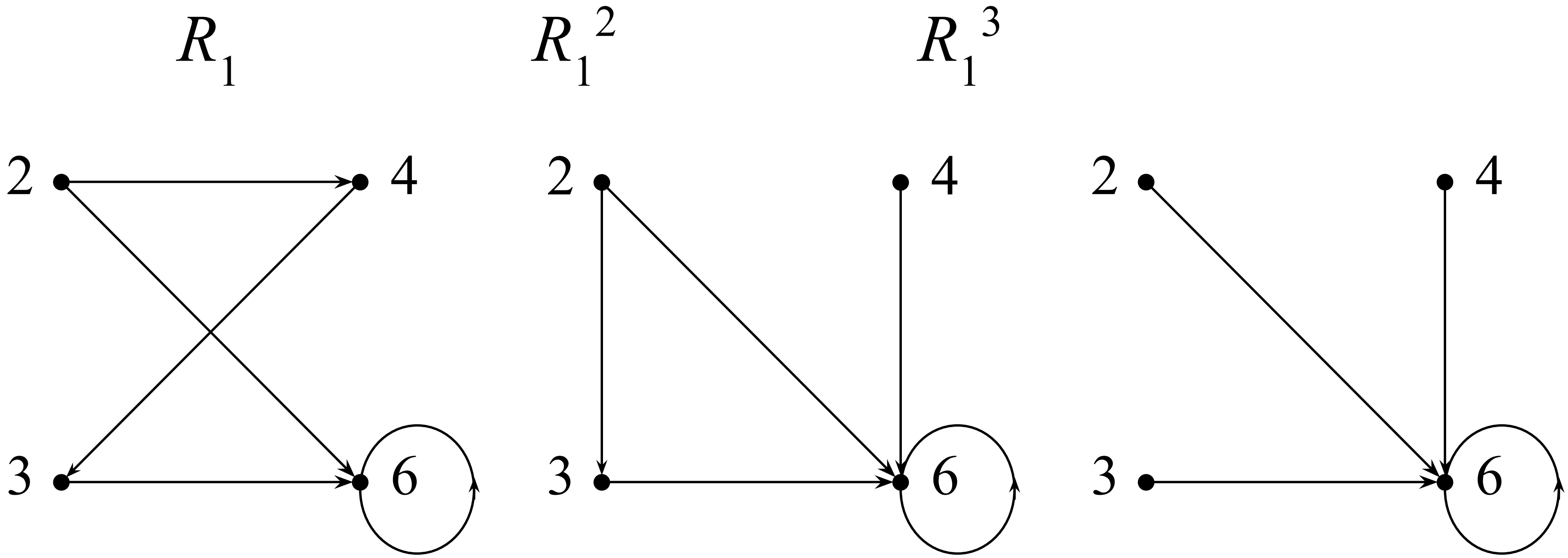
Із визначення маємо:
$R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R^2 \circ R$.

Графічне трактування степеня відношення:

в графі відношення R^n є дуга з x в y, якщо в графі R з вершини x у вершину y веде хоча б один маршрут довжини n (що складається з n дуг).

степінь $R_1^{\,2}$, $R_1^{\,3}$

$$R_1^{\,2} = \{(2,3),(2,6),(3,6),(4,6),(6,6)\}$$
$$R_1^{\,3} = \{(2,6),(3,6),(4,6),(6,6)\}$$



переріз $R(x)$, фактор-множина

Нехай $R \subset X \times Y$—відношення на множинах X і Y.

- ***Перерізом відношення R(x)*** за $x \in X$ є множина $R(x) \subseteq Y$, що складається з елементів $y \in Y$, таких, що $(x, y) \in R$.
- Об'єднання перерізів за елементами деякої підмножини $Z \subset X$ називається ***перерізом R(Z) відносно підмножини Z***.
- Множина, що складається з перерізів відношення $R \subseteq X \times Y$ за кожним елементом з X, називається ***фактор-множиною*** множини Y за відношенням R $Y/R = \{R(x), \forall x \in X\}$.

перерізи $R_2(x)$

R_2	2	3	4	6
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0
6	0	0	0	1

$R_2(2) = \{2,4,6\}$
$R_2(3) = \{3,6\}$
$R_2(4) = \{4\}$
$R_2(6) = \{6\}$

фактор-множина

$A/R_2 = \{R_2(x),\ \forall x \in A\} = \{\{2,4,6\},\ \{3,6\},\ \{4\},\ \{6\}\}$