Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления

Веремей Е.И.

Введение в задачи исследования и проектирования цифровых систем

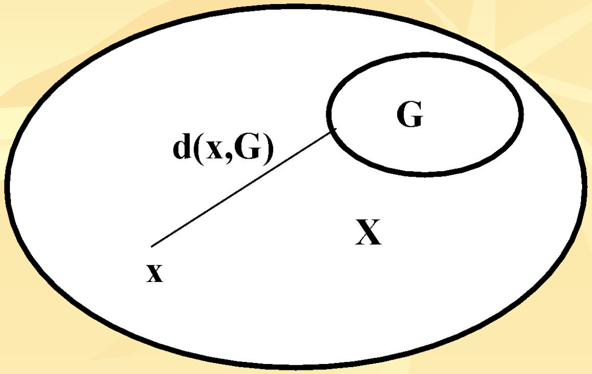
Лекции 14 ─ 16

Раздел 3. Методы синтеза цифровых систем

Методы синтеза цифровых систем

1. Основы оптимизационного подхода

1. Пространство X проектных решений и множество G допустимых проектных решений:



$\mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{G}) = \inf\limits_{\mathbf{g}\in\mathbf{G}} \rho(\mathbf{x},\mathbf{g})$ **– расстояние от произвольной точки x до допустимого множества G**

2. Обобщенная оптимизационная формализация задачи проектирования

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{G}) \to \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$$

3. Обобщенные необходимые условия экстремума:

$\mathbf{dJ}(\mathbf{x},\mathbf{h})$ **- дифференциал Фреше,** $\lim\limits_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| = 0$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{dJ}(\mathbf{x},\mathbf{h}) + \mathbf{r}(\mathbf{x},\mathbf{h}) \ \forall \mathbf{h} \in \mathbf{G}$$

$$\boxed{\mathbf{dJ}(\mathbf{x},\mathbf{h}) = 0}$$

5. Формы необходимых условий экстремума:

– равенство нулю градиента функции многих переменных
– системы дифференциальных уравнений Эйлера
– матричные алгебраические или дифференциальные уравнения Риккати;
– обобщенные операторные уравнения.

Методы синтеза цифровых систем

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n]), \quad \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$$

Модель дискретного объекта

$$\mathbf{u}[n] \in \mathbf{U} \quad \forall n = 0,1,2,...$$

Ограничения на управление

$$\mathbf{x}[n] \in \mathbf{X} \quad \forall n = 0,1,2,...$$

Ограничения на состояние

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mathbf{x}[n] - \mathbf{r}_x[n] \right\| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \left\| \mathbf{u}[n] - \mathbf{r}_u[n] \right\| = 0$$

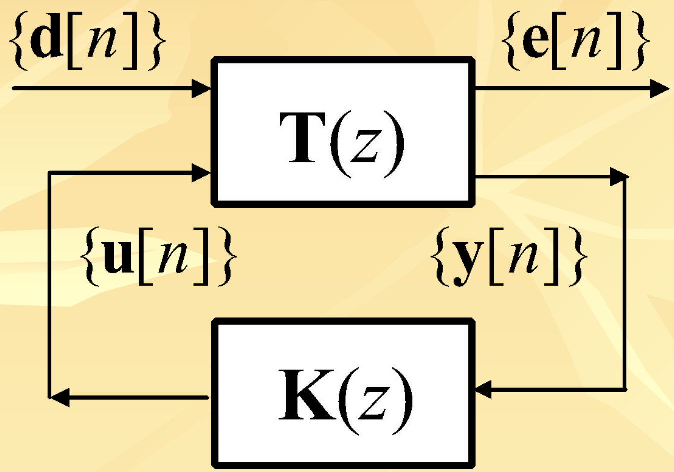
Цель управления

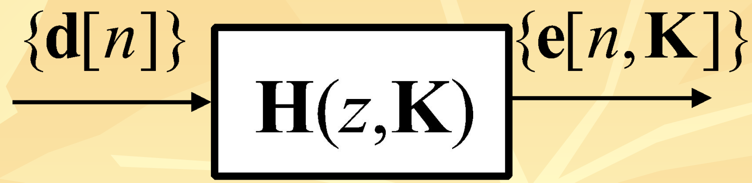
$$J = J(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k])$$

Функционал качества

Задача синтеза цифровых систем
состоит в формировании управляющей последовательности **u[n]** (n=0,1,2,…) m_s-мерных векторов из определённого класса, которая обеспечивает достижение поставленной цели с учетом заданных ограничений, включая ограничение на функционал качества

Методы синтеза цифровых систем





$$\mathbf{e} = \mathbf{H}(z,\mathbf{K})\mathbf{d},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \hline \mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbf{T}_{11}(z) & \mathbf{T}_{12}(z) \\ \hdashline \mathbf{T}_{21}(z) & \mathbf{T}_{22}(z) \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(s,\mathbf{K}) = \mathbf{T}_{11}(s) + \mathbf{T}_{12}(s)\mathbf{K}(s)[\mathbf{E} - \mathbf{T}_{22}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}\mathbf{T}_{21}(s)$$

$$J = J(\mathbf{u}) = J(\{\mathbf{e}[n,\mathbf{K}]\}) = J(\mathbf{H}(z,\mathbf{K})\{\mathbf{d}[n]\})$$

$$J = J(\mathbf{K}) = \|\mathbf{H}(\mathrm{z},\mathbf{K})\| \to \inf_{\mathbf{K}\in\Omega}, \qquad J_{\mathbf{e}} = J_{\mathbf{e}}(\mathbf{K}) = \|\mathbf{e}(t,\mathbf{K})\| = \|\widetilde{e}(t,\mathbf{K})\| \to \inf_{\mathbf{K}\in\Omega}.$$

Методы синтеза цифровых систем

2. Параметрическая оптимизация с заданием динамического «коридора»

Пусть задан объект управления в виде DLTI системы и регулятор

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ - \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{T}_{11}(z) & \mathrm{T}_{12}(z) \\ \hline \mathrm{T}_{21}(z) & \mathrm{T}_{22}(z) \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{K}(z,\mathbf{h})\mathbf{y}$$

Математическая модель замкнутой системы в частотной области:

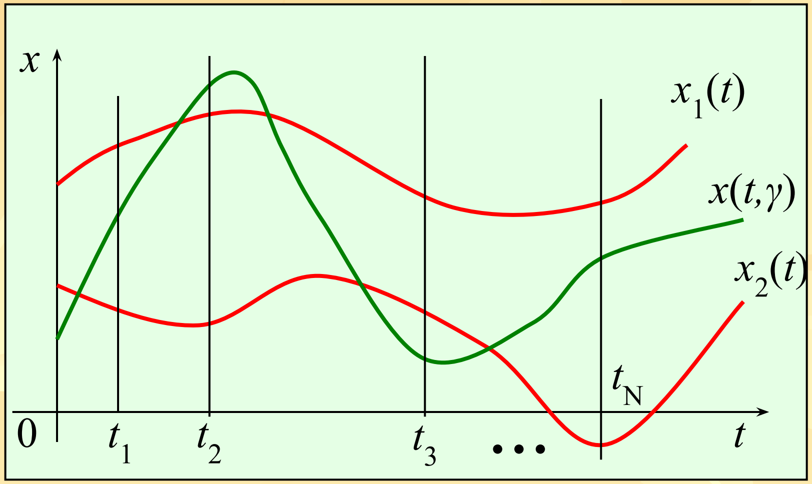
$$\mathbf{e} = \mathbf{H}(z,\mathbf{h})\mathbf{d}$$

$$\mathbf{H}(z,\mathbf{h}) = \mathrm{T}_{11}(z) + \mathrm{T}_{12}(z)\mathbf{K}(z,\mathbf{h})\left[\mathbf{E} - \mathrm{T}_{22}(z)\mathbf{K}(z,\mathbf{h})\right]^{-1}\mathrm{T}_{21}(z)$$

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{d}[n]\} \Longrightarrow x[n,\mathbf{h}] = \left\|\mathbf{e}[n,\mathbf{h}]\right\| = \sqrt{\mathbf{e}'[n,\mathbf{h}]\mathbf{R}\mathbf{e}[n,\mathbf{h}]}$$

5

Методы синтеза цифровых систем

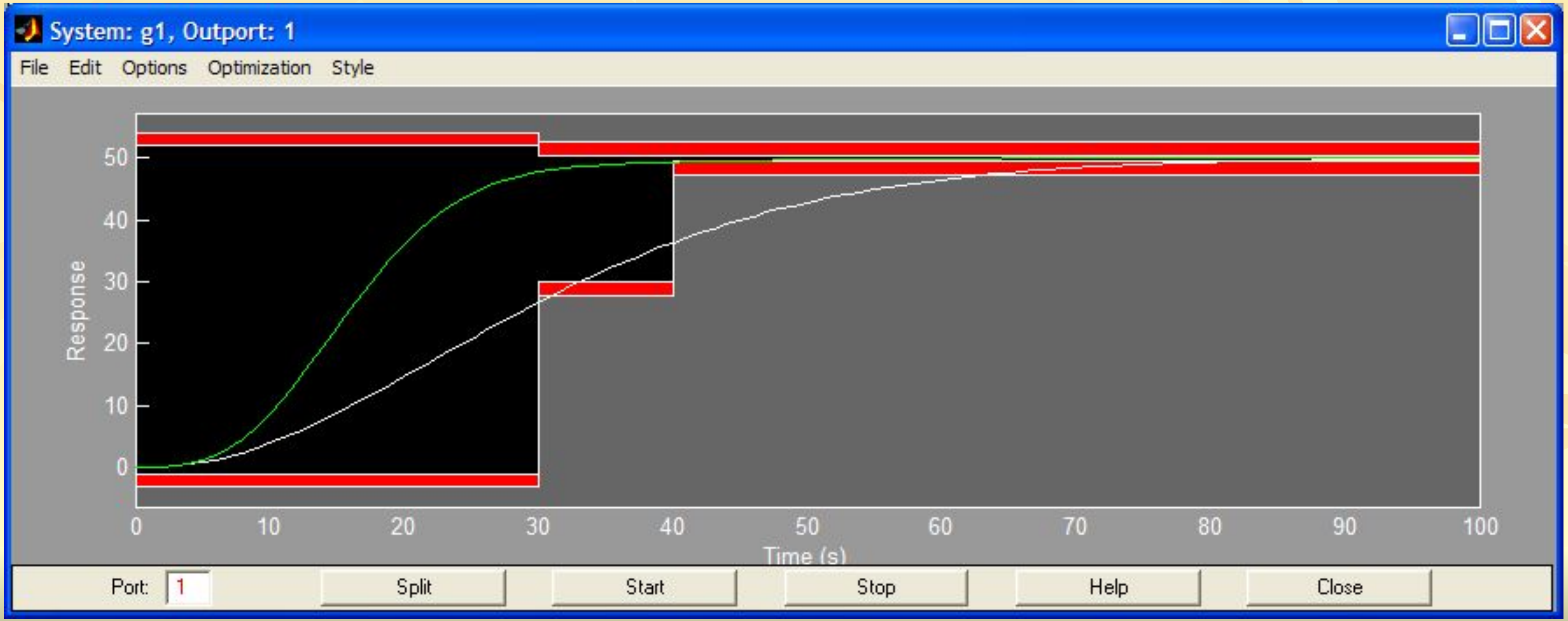


$$x_2[n] < x[n,\mathbf{h}] < x_1[n] \quad \forall n \in [0,N]$$

$$\alpha_n(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & if \quad x_2[n] \le x[n,\mathbf{h}] \le x_1[n]; \\ x[n,\mathbf{h}] - x_1[n], & if \ x[n,\mathbf{h}] > x_1[n]; \\ x_2[n] - x[n,\mathbf{h}], & if \ x[n,\mathbf{h}] < x_2[n]. \end{cases}$$

$$\alpha(\mathbf{h}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(\mathbf{h})$$

$$\alpha(\mathbf{h}) \to \min_{\mathbf{h}\in E^p}$$



Методы синтеза цифровых систем

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] \Longrightarrow \det(\mathbf{E}z - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \Delta(z) \Longrightarrow \mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k$$

DLTI-система | **Желаемый хар. полином** | **Регулятор по состоянию**

Пример:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8123 & 0.0362 & -0.0913 \\ -0.0970 & 0.8872 & 0.1374 \\ 0.0156 & -0.1642 & 0.8813 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.0029 \\ -0.0115 \\ -0.0586 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}_\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.785 \\ 0.988 + 0.173j \\ 0.988 - 0.173j \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы A

Период дискретности: T=0.025c

Корни желаемого характеристического полинома:

$$\mathbf{z}_\Delta = \gamma \mathbf{z}_\mathbf{A} \qquad \gamma = 1.04,\ \gamma = 0.8,\ \gamma = 0.6,$$

4. Вопросы синтеза цифровых систем

Уравнения замкнутой системы

$$\mathbf{x}[n+1] = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}[n] + \mathbf{B} \cdot d \cdot u_e[n]$$

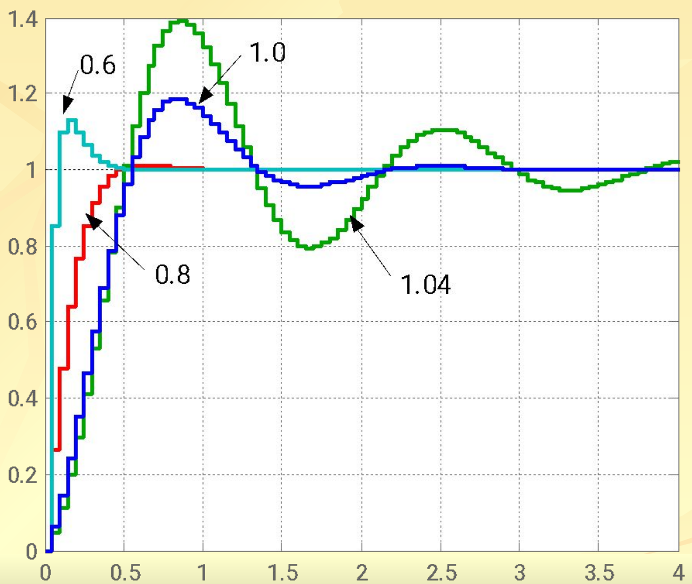
$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{Cx}[n] \qquad \mathbf{C} = (\ 0.3126 \quad 2.6903 \quad 0.2897)$$

$$d = 1/\mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$$

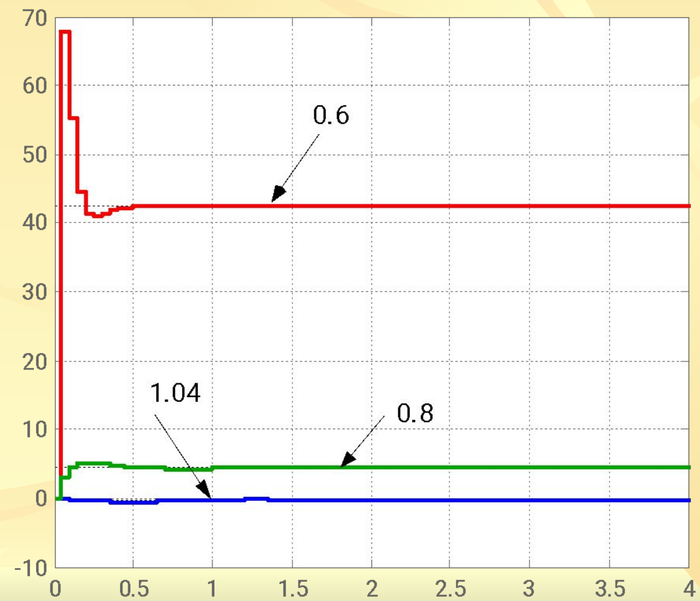
- нормирующий множитель

Переходные процессы в замкнутой системе для различных величин γ

а) по выходной переменной



б) по управлению



4. Вопросы синтеза цифровых систем

DLTI-объект

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] \qquad \mathbf{x} \in E^{n_s},\ \mathbf{u} \in E^{m_s}$$

$$\mathbf{u}[n] = \mathbf{K}\mathbf{x}[n]$$

Регулятор по состоянию дискретного объекта

Квадратичный функционал, заданный на движениях замкнутой системы:

$$J = J(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{x}'[n]\mathbf{R}\mathbf{x}[n] + \gamma^2 \mathbf{u}'[n]\mathbf{Q}\mathbf{u}[n] \right)$$

$$J = J(\mathbf{x},\mathbf{u}) = J(\mathbf{K}) \to \min_{\mathbf{K} \in \Omega_{\mathbf{K}}}$$

Задача LQR-оптимального синтеза

$\Omega_{\mathbf{K}}$ ***– множество матриц размера $m_s \times n_s$ с постоянными компонентами, для которых собственные числа матрицы A-BK расположены в открытом единичном круге на комплексной плоскости***

4. Вопросы синтеза цифровых систем

Ограничения:

1. Пара (A,B) стабилизируемая

2. $R \geq 0$, $Q > 0$

3. Пара $(R, A-BQ^{-1}B^{T})$ не должна иметь неуправляемой части с полюсами на единичной окружности

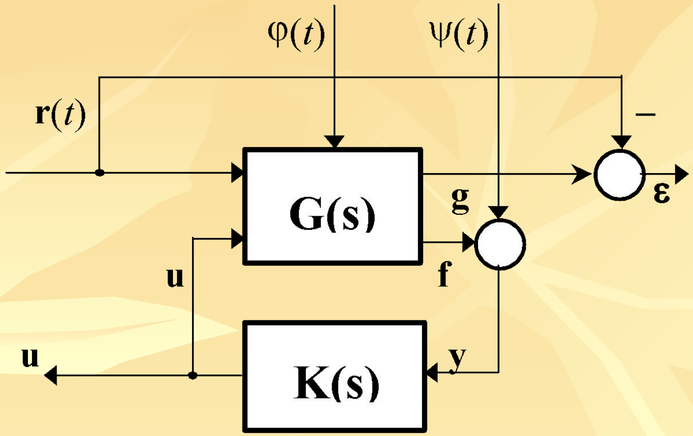
Решение задачи LQR-оптимального синтеза:

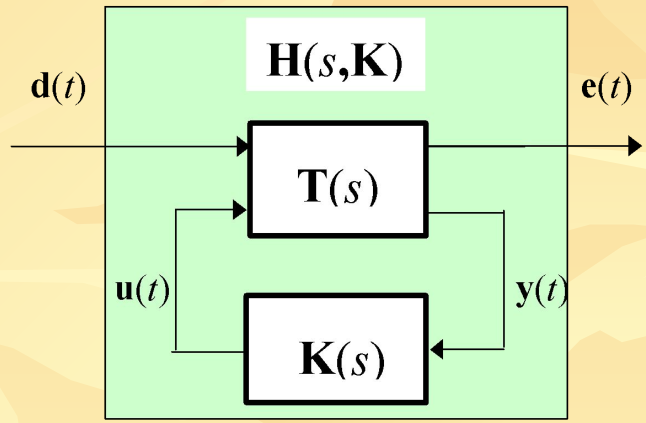
$$\mathbf{K}_{opt} = (\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}\mathbf{B} + \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}\mathbf{B}$$

Здесь матрица S – решение матричного алгебраического уравнения Риккати:

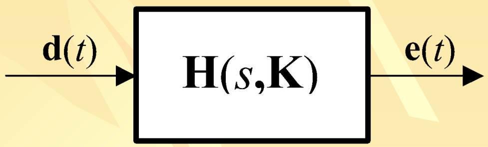
$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{S} - \mathbf{A}^{T}\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}\mathbf{B}(\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}\mathbf{B} + \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{S}\mathbf{B} + \mathbf{R} = 0$$

4. Вопросы синтеза цифровых систем





$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}=\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}.$$



Объект: $\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \hline \mathbf{y}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{T}_{11}(s) & \mathbf{T}_{12}(s)\\ \hline \mathbf{T}_{21}(s) & \mathbf{T}_{22}(s)\end{array}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}$

Регулятор: $\mathbf{u}=\mathbf{K}(s)\mathbf{y}$

$$\Longrightarrow\quad \mathbf{e}=\mathbf{H}(s,\mathbf{K})\mathbf{d}$$

$$\mathbf{H}(s,\mathbf{K})=\mathbf{T}_{11}(s)+\mathbf{T}_{12}(s)\mathbf{K}(s)[\mathbf{E}-\mathbf{T}_{22}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}\mathbf{T}_{21}(s)$$

$$\boxed{\mathbf{I}=\mathbf{I}(\mathbf{K})=\|\mathbf{H}(\mathrm{s},\mathbf{K})\|\to\inf_{\mathbf{K}\in\Omega},}$$

$$\|\mathbf{H}\|_2=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}\left[\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(-j\omega)\mathbf{H}(j\omega)\right]d\omega}\quad\Longrightarrow\quad \|H\|_2=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2\,d\omega}$$ для SISO-систем

$$\|\mathbf{H}\|_\infty=\sup_{\omega\in[0,\infty)}\overline{\sigma}(\omega)$$ $\overline{\sigma}(\omega)$ – макс. синг. число $\mathbf{H}(j\omega)$ $\Longrightarrow$ $\|H\|_\infty=\max\limits_{\omega\in[0,\infty)}|H(j\omega)|$ для SISO-систем

4. Вопросы синтеза цифровых систем