# Алгебра

Кабанов Александр Николаевич
к.ф.-м.н., доцент кафедры кибернетики

# 3. Линейные пространства

# Линейное пространство

- Множество элементов $V$ называется линейным или векторным пространством над действительными числами, если выполняются следующие условия.
- На множестве $V$ определена замкнутая операция суммы элементов, т.е. любым двум элементам $x$, $y$ из пространства $V$ ставится в соответствие некоторый элемент $z$ из пространства $V$, который называется их суммой и обозначается $z = x + y$.

# Линейное пространство

- На множестве $V$ определена замкнутая операция умножения элемента на число, т.е. любому элементу $x$ из пространства $V$ и любому действительному числу $\lambda$ ставится в соответствие некоторый элемент $z$ из пространства $V$, который называется произведением числа $\lambda$ на элемент $x$ и обозначается $z = \lambda \cdot x = \lambda x$.
- На множестве должны быть справедливы следующие аксиомы.
- Коммутативность сложения: $x + y = y + x$.
- Ассоциативность сложения: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

# Линейное пространство

- Дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
- Дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
- Ассоциативность умножения на число: $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.
- Существование нейтрального элемента по умножению на число: $1 \cdot x = x$.

# Линейное пространство

- Существование нейтрального элемента по сложению, т.е. в пространстве $V$ существует такой элемент $0$, что $x + 0 = x$ для любого элемента $x$ из пространства $V$.
- Существование противоположного элемента по сложению, т. е. для любого элемента $x$ из пространства $V$ существует такой элемент $(–x)$ в пространстве $V$, что $x + (–x) = 0$.

# Пример линейного пространства

- Тривиальным примером линейного пространства будет так называемое пустое пространство – пространство состоящее из одного 0.
- Другим примером является пространство n-мерных векторов, т.е. векторов, состоящих из n компонент или координат.

# Линейная комбинация

- Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – элементы линейного пространства V.
- Элемент $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$, где коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – произвольные действительные числа, называется линейной комбинацией элементов $a_1, \ldots, a_n$.
- Линейная комбинация, в которой все коэффициенты одновременно равны нулю, называется тривиальной.

# Линейная зависимость

- Элементы называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.
- Если линейная комбинация элементов может быть равна 0, только если все коэффициенты равны 0, то такие элементы называются линейно независимыми.

# Свойства линейной зависимости

- Если среди элементов есть такой, который является линейной комбинацией части остальных, то весь набор элементов является линейно зависимым.
- Если среди элементов есть нулевой, то элементы линейно зависимы.
- Если элемент является линейной комбинацией линейно независимых элементов, то коэффициенты в его разложении определяются единственным образом.

# Базис

- Набор элементов линейного пространства называется базисом этого пространства, если эти элементы линейно независимы, а добавление любого другого элемента делает набор линейно зависимым.
- В общем случае базис в пространстве можно выбрать разными способами. Базисов может быть даже бесконечное множество.
- Но количество элементов в любом базисе одного и того же пространства $V$ всегда одинаково. Это число называется размерностью линейного пространства и обозначается $\dim V$.

# Разложение по базису

- **Теорема (о разложении вектора по базису):** Каждый элемент линейного пространства можно представить в виде линейной комбинации элементов выбранного базиса, и притом единственным образом.
- Эта линейная комбинация называется разложением элемента (или вектора) по базису. А коэффициенты в линейной комбинации называются координатами этого элемента (или вектора).

# Разложение по базису

- Таким образом, если $a_1, \ldots, a_n$ – базис линейного пространства V, то элемент x можно единственным образом представить в виде $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$.
- Для упрощения записи элемент x можно записывать как совокупность его координат в этом базисе $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
- Для того, чтобы при работе с базисом не запутаться в координатном представлении элементов, набор базисных элементов необходимо упорядочить, т.е. пронумеровать.
- Очевидно, что по-разному упорядоченный базис будет давать разные координатные представления одного и того же элемента.

# Уточнение определения

- Таким образом, следует уточнить определение базиса.
- Базисом называется ***упорядоченный*** линейно независимый набор элементов линейного пространства, через линейную комбинацию которых можно представить любой элемент пространства.

# Проверка базиса

- Пусть у нас есть n-мерное линейное пространство V.
- Чтобы ответить на вопрос, является ли данный набор элементов базисом, для начала нужно обратить внимание на их количество.
- Если их меньше, чем n, то для базиса этого точно недостаточно. Если больше, то набор точно линейно зависим. В обоих случаях базисом набор не будет.

# Проверка базиса

- Если элементов в наборе ровно n, то нужно составить из координатных представлений элементов матрицу и найти ее ранг.
- Если ранг меньше, чем n, то набор линейно зависим и, следовательно, базисом не является.
- Если же ранг равен n, то элементы линейно независимы, и поскольку их n, то они по определению будут составлять базис.

# Дополнение до базиса

- **Теорема (о дополнении до базиса):** Пусть в $n$-мерном линейном пространстве $V$ выбран набор $k$ линейно независимых элементов ($k < n$). Тогда в пространстве $V$ существуют $n - k$ элементов, добавление которых к этому набору даст базис линейного пространства $V$.

# Переход к новому базису

- Пусть $B_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $B_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$ – старый и новый базисы линейного n-мерного пространства.
- Каждый вектор нового базиса можно выразить через старый базис: $f_i = a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n$, $1 \le i \le n$.
- Получаем систему уравнений:

$$f_1 = a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n,$$

$$\ldots$$

$$f_n = a_{n1}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

# Матрица перехода

- Эту систему можно записать в матричном виде:

$$(f_1,\dots,f_n)=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Матрица, стоящая справа, называется матрицей перехода от старого базиса к новому и обозначается T.

# Матрица перехода

- Таким образом, матрица перехода состоит из координат разложения векторов нового базиса по старому базису, записанных ***<u>по столбцам</u>***.
- Свойства матрицы перехода:

1. Матрица перехода является невырожденной.
2. Если T – матрица перехода от старого базиса к новому, то матрица перехода от нового базиса к старому будет равна $T^{-1}$.

# Координаты вектора в новом базисе

- Пусть вектор x имеет координаты $(x_1, \ldots, x_n) = x_e$ в старом базисе.
- Координаты этого же вектора в новом базисе можно выразить через матрицу перехода T от старого базиса к новому:

$$x_f = T^{-1}x_e.$$

- Другими словами, $x_f = T_{f \to e}x_e$.

# Подпространство

- Если подмножество линейного пространства удовлетворяет всем свойствам пространства, то оно называется подпространством.
- Любое линейное пространство обладает как минимум двумя подпространствами: нулевым подпространством и подпространством, совпадающим с самим пространством.
- Эти 2 подпространства называются тривиальными.

# Сумма подпространств

- Суммой подпространств U и V линейного пространства L называется подпространство

$$U+V = \{x = u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

- Если для любого элемента x из суммы подпространств разложение $x = u + v$ единственно, то такая сумма называется прямой и обозначается $U \oplus V$.
- Сумма подпространств может быть прямой, только если подпространства U и V не пересекаются между собой.

# Пересечение подпространств

- Пересечение подпространств U и V линейного пространства L так же будет подпространством.
- Размерности подпространств связаны следующим отношением:

$$\dim (U+V) = \dim U + \dim V - \dim (U \cap V)$$

# Линейная оболочка

- Линейной оболочкой векторов называется совокупность всех линейных комбинаций этих векторов.
- Если $X$ – некоторое множество векторов, то его линейная оболочка обозначается $L(X)$.
- Свойства линейной оболочки:

1. $X \subseteq L(X)$.
2. Если $X$ – множество из линейного пространства $V$, то $L(X) \subseteq V$ и $L(X)$ – подпространство пространства $V$.

# Евклидово пространство

- Линейное пространство называется евклидовым, если любым двум векторам $x$ и $y$ из пространства ставится в соответствие некоторое число, обозначаемое $(x, y)$ и называемое их скалярным произведением.

# Скалярное произведение

- Скалярное произведение может задаваться любым образом – главное, чтобы выполнялись следующие условия для любых векторов $x$, $y$, $z$ и любого действительного числа $\lambda$:

1. $(x, y) = (y, x)$.
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
3. $(\lambda \cdot x, y) = \lambda \cdot (x, y)$.
4. $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$.
5. $(x, x) = 0$, если $x = 0$.

# Норма

- Длиной или нормой вектора $x$ в евклидовом пространстве называется число

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

- В 2-х- и 3-хмерном векторном пространстве это понятие имеет ясный геометрический смысл.

# Угол

- Углом между векторами *x* и *y* в евклидовом пространстве называется число ϕ, косинус которого определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

# Свойства нормы

- Для любого вектора $x$ и любого действительного числа $\lambda$ выполняются следующие условия:

1. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (неравенство Коши-Буняковского)
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

# Ортогональные вектора

- Два ненулевых вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0.
- Для 2-х- и 3-хмерного векторного пространства ортогональность векторов означает их перпендикулярность.
- Неравенство треугольника для ортогональных векторов превращается в равенство: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

# Ортонормированная система

- Система векторов называется ортогональной, если все вектора системы попарно ортогональны.
- Система векторов называется нормированной, если норма каждого вектора системы равна 1.
- Если система векторов одновременно ортогональная и нормированная, то такая система называется ортонормированной.

# Ортонормированная система

- **Замечание:** Чтобы нормировать вектор, нужно разделить его на его норму.
- Таким образом, если $x$ – вектор евклидова пространства, то его нормированная версия $e = x \,/\, \|x\|$.

# Ортобазис

- **Теорема (о независимости ортонормированной системы):** Любая ортонормированная система векторов линейна независима.
- **Теорема (о существовании ортобазиса):** В любом n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.
- Таким образом, любую линейно независимую систему векторов можно преобразовать в ортонормированную.
- Алгоритм, позволяющий это сделать, называется методом ортогонализации Грама-Шмидта.

# Метод Грама-Шмидта

- Пусть мы имеем базис пространства $f_1, f_2, \ldots, f_n$.
- Будем создавать новый ортогональный базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$.
- Нормируя его, получим ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
- Возьмем в качестве вектора $g_1$ вектор $f_1$ и нормируем его, разделив на длину. Таким образом,

$$g_1 = f_1,\ e_1 = g_1/\|g_1\|.$$

# Метод Грама-Шмидта

- В качестве вектора $g_2$ возьмем вектор $f_2 – (f_2, e_1)·e_1$.
- Несложно проверить, что если этот вектор умножить скалярно на $e_1$, то в результате получится 0, т.е. вектор $g_2$ и $e_1$ ортогональны.
- Таким образом,

$$g_2 = f_2 – (f_2, e_1)·e_1,\ e_2 = g_2/\|g_2\|.$$

# Метод Грама-Шмидта

- Далее, в качестве вектора $g_3$ возьмем вектор, ортогональный одновременно и $e_1$, и $e_2$.

$$g_3 = f_3 - (f_3, e_1)\cdot e_1 - (f_3, e_2)\cdot e_2,\ e_3 = g_3/\|g_3\|.$$

- И так далее.
- Общая формула выглядит следующим образом:

$$g_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} (f_k, e_k) \cdot e_k.$$

$$e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}.$$