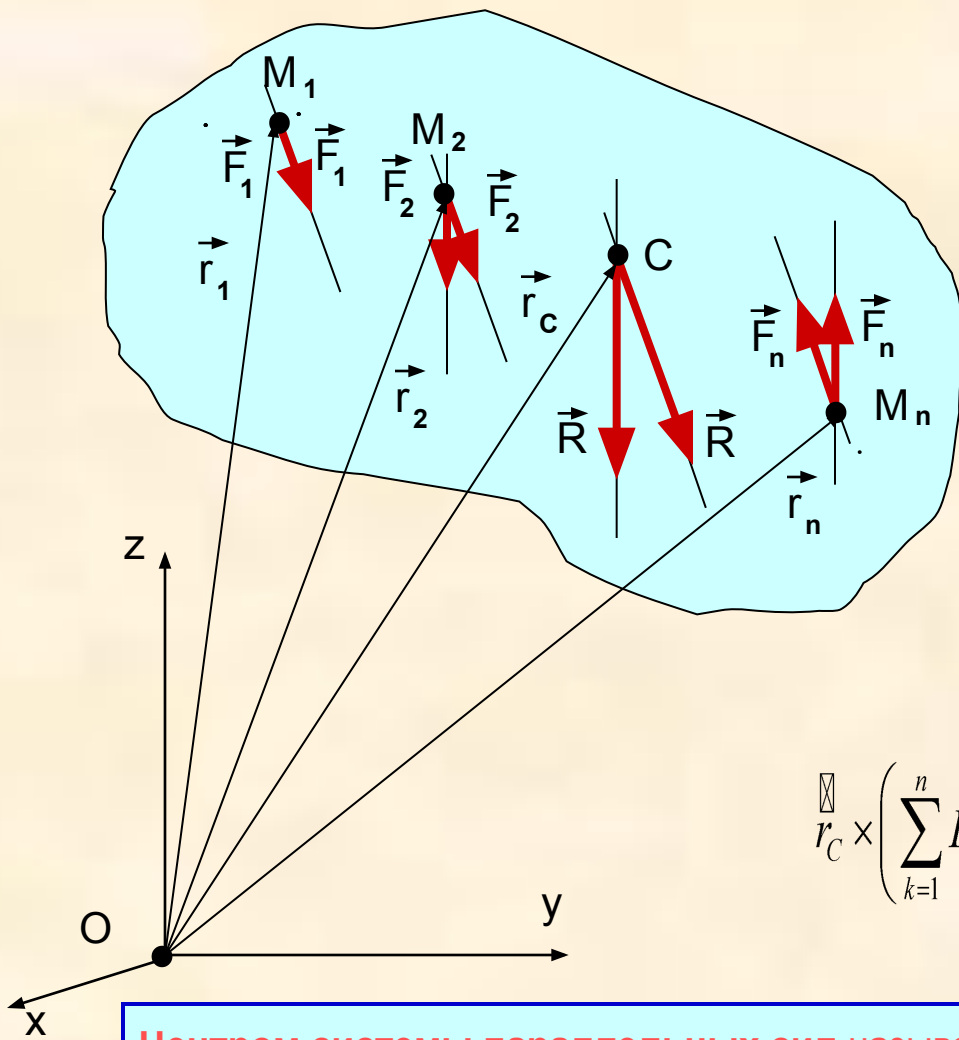


# ЦЕНТР СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ



Теорема Вариньона

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k)$$

$$\vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k$$

Введем единичный вектор  $\vec{e}$ , задающий направления сил.

Тогда  $\vec{F}_k = \begin{cases} \vec{e}_k^* \cdot F & \text{если } F \text{ параллельно } \vec{e}_k \\ -\vec{e}_k^* \cdot F & \text{если } F \text{ антипараллельно } \vec{e}_k \end{cases}$

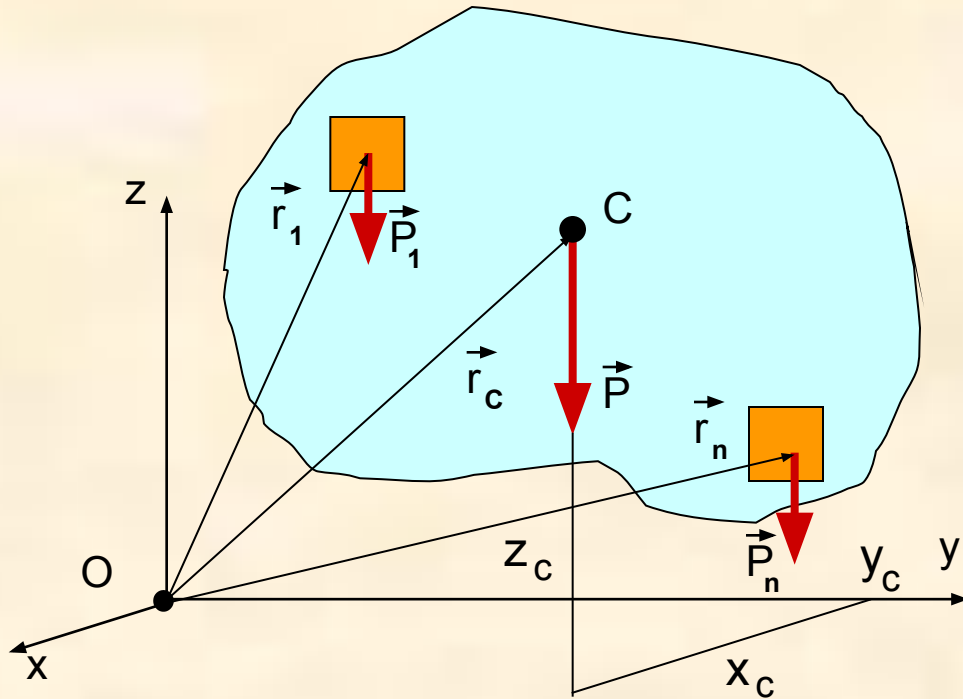
$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n F_k^* \vec{e} = \left( \sum_{k=1}^n F_k^* \right) \vec{e}$$

$$\vec{r}_C \times \left( \sum_{k=1}^n F_k^* \right) \vec{e} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times F_k^* \vec{e} \Rightarrow \vec{r}_C \cdot \left( \sum_{k=1}^n F_k^* \right) \times \vec{e} = \left( \sum_{k=1}^n \vec{r}_k F_k^* \right) \times \vec{e}$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{r}_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}$$

**Центром системы параллельных сил** называют геометрическую точку, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любом повороте всех этих сил вокруг точек их приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол.

# ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Центром тяжести твердого тела называют геометрическую точку, неизменно связанную с телом и являющуюся центром системы параллельных сил тяжести, действующих на все частицы этого тела.

Разобьём тело на элементарные объёмы, тогда вес тела

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta V_k = \int_{(V)} \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Используя формулы, определяющие центр параллельных сил тяжести, действующих на отдельные элементарные объёмы тела, получим:

$$\bar{r}_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \gamma_k \Delta V_k}{\sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta V_k} = \frac{1}{P} \int_{(V)} \bar{r} \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Для однородного тела удельный вес  $\gamma(x, y, z) = \gamma = const.$

$$\bar{r}_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \Delta V_k}{\sum_{k=1}^n \Delta V_k} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \bar{r} dx dy dz.$$

# ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Координаты центра тяжести однородного тела:

$$x_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta V_k}{\sum_{k=1}^n \Delta V_k} = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dx dy dz; y_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta V_k}{\sum_{k=1}^n \Delta V_k} = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dx dy dz; z_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k \Delta V_k}{\sum_{k=1}^n \Delta V_k} = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dx dy dz.$$

Если однородное твердое тело можно разбить на конечное число частей простейшей геометрической формы, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести

**объёма**

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{\sum_{k=1}^n V_k}; y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k V_k}{\sum_{k=1}^n V_k}; z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{\sum_{k=1}^n V_k},$$

**площади**

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{\sum_{k=1}^n S_k}; y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{\sum_{k=1}^n S_k}; z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k S_k}{\sum_{k=1}^n S_k},$$

**ЛИНИИ**

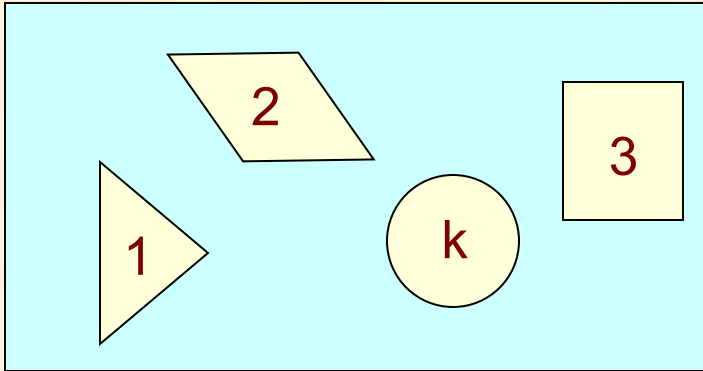
$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k L_k}{\sum_{k=1}^n L_k}; y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k L_k}{\sum_{k=1}^n L_k}; z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k L_k}{\sum_{k=1}^n L_k}.$$

Здесь  $V_k, S_k, L_k$  - соответственно объёмы, площади и длины частей, на которые разбито данное тело, а  $x_k, y_k, z_k$  - координаты центров тяжести этих частей.

# ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Метод отрицательных весов.

Это разновидность метода разбиения на части т.к. условно считается, что полости имеют отрицательные веса.



**Радиус-вектор центра тяжести тела с полостями:**

$$\vec{r}_{\Pi} = \frac{\vec{P} - r_k P_k - r_2 P_2 - \vec{r} P}{P - P_k - P_2 - \vec{r} P}$$

Введем обозначения:

$P_{\Pi}$  - вес тела с полостями,  
 $\vec{r}_{\Pi}$  - радиус-вектор центра тяжести

тела, содержащего полости

$P_k, P_2, \vec{r}, P$  - вес полостей,

заполненных веществом тела,

$\vec{r}_k, \vec{r}_2, \vec{r}$  - радиус-векторы центров

тяжести полостей.

Тогда вес сплошного тела

$P = P_{\Pi} + P_1 + P_2 + \vec{r} P + P_k$ , а радиус- вектор

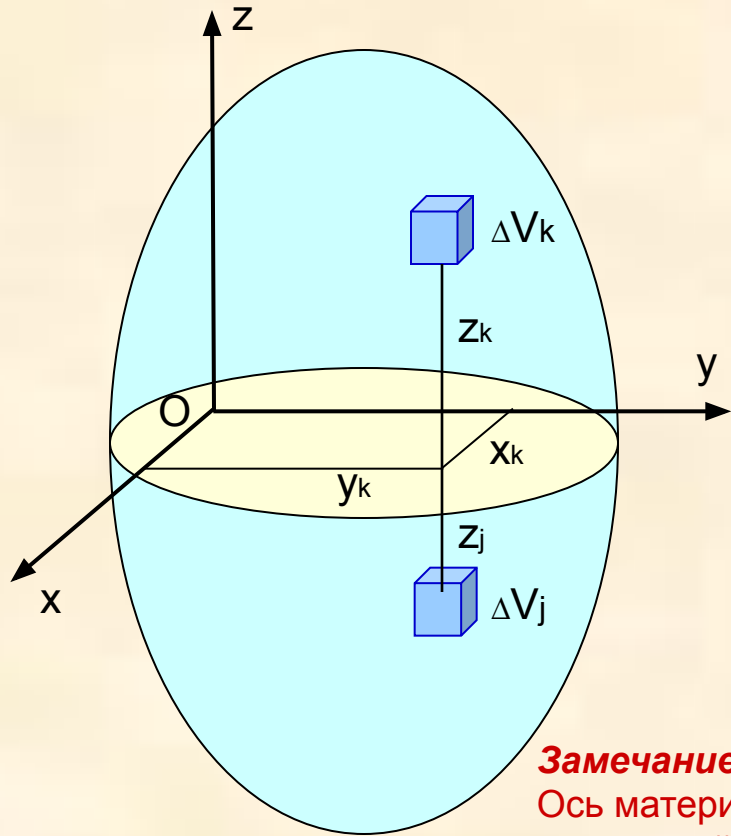
центра тяжести сплошного тела:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_{\Pi} P_{\Pi} + \vec{r}_1 P_1 + \vec{r}_2 P_2 + \vec{r} P + \vec{r}_k P_k}{P_{\Pi} + P_1 + P_2 + \vec{r} P + P_k}$$

# ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Использование материальной симметрии.

Если однородное твердое тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то центр тяжести этого тела лежит соответственно или в плоскости или на оси или в центре симметрии.



Пусть однородное твердое тело имеет плоскость материальной симметрии.

Совместим эту плоскость с координатной плоскостью  $xOy$ .

Разобьём тело на элементарные объёмы, так что  $\Delta V_k = \Delta V_j$ , при этом  $x_j = x_k$ ,  $y_j = y_k$ ,  $z_j = -z_k$ .

Тогда  $z_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n z_i \Delta V_i = 0$ .

Таким образом доказано, что центр тяжести тела лежит в плоскости материальной симметрии.

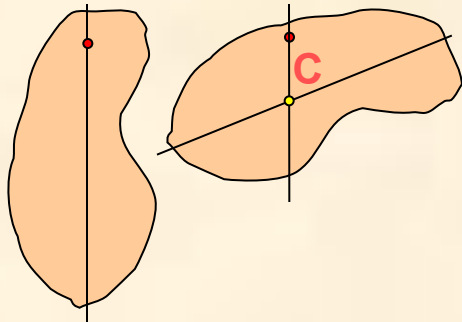
### **Замечание.**

Ось материальной симметрии тела является линией пересечения двух плоскостей симметрии, а центр материальной симметрии – точкой пересечения трех плоскостей симметрии. Поэтому, в силу выше доказанного центр тяжести тела должен лежать на оси материальной симметрии или в центре материальной симметрии тела.

# ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

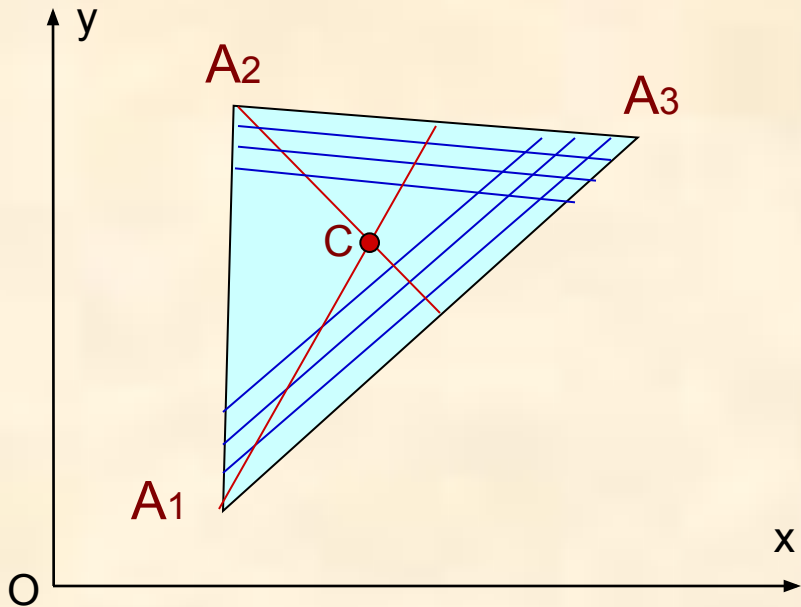
## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

**Метод подвешивания** – экспериментальный метод, основанный на том, что при подвешивании тела или фигуры за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса. Для определения положения центра тяжести плоской фигуры достаточно ее подвесить поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечений этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.



# ПРИМЕРЫ

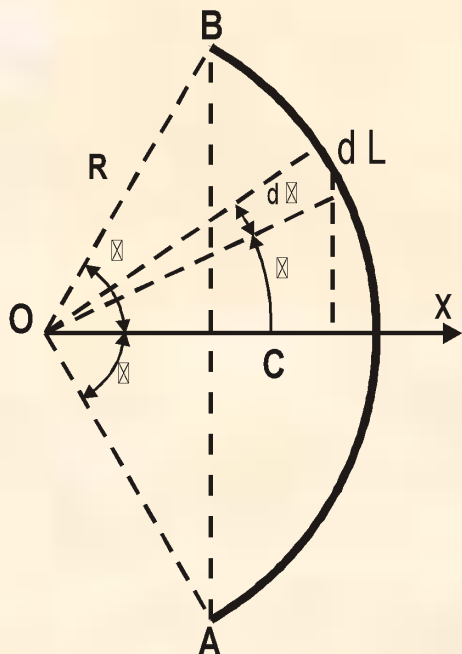
## 1) Центр тяжести треугольника



$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3). \end{cases}$$

# ПРИМЕРЫ

2) Дуга окружности.

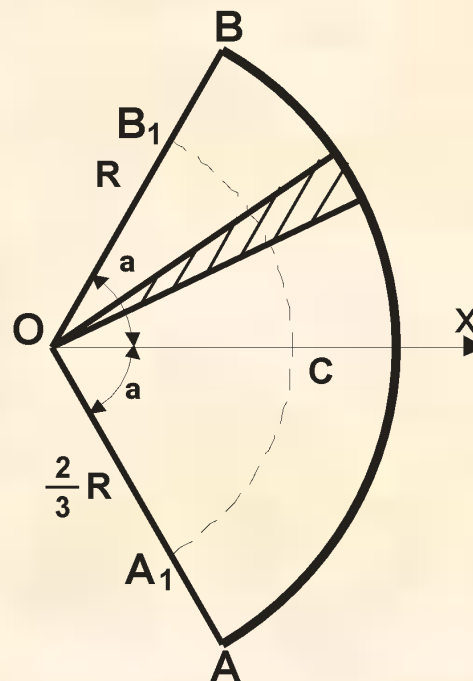


$$dL = R d\varphi ; x = R \cos \varphi ;$$

$$x_C = \frac{\int_{(L)} x dL}{\int_{(L)} dL} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{R \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

$$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

3) Сектор круга.

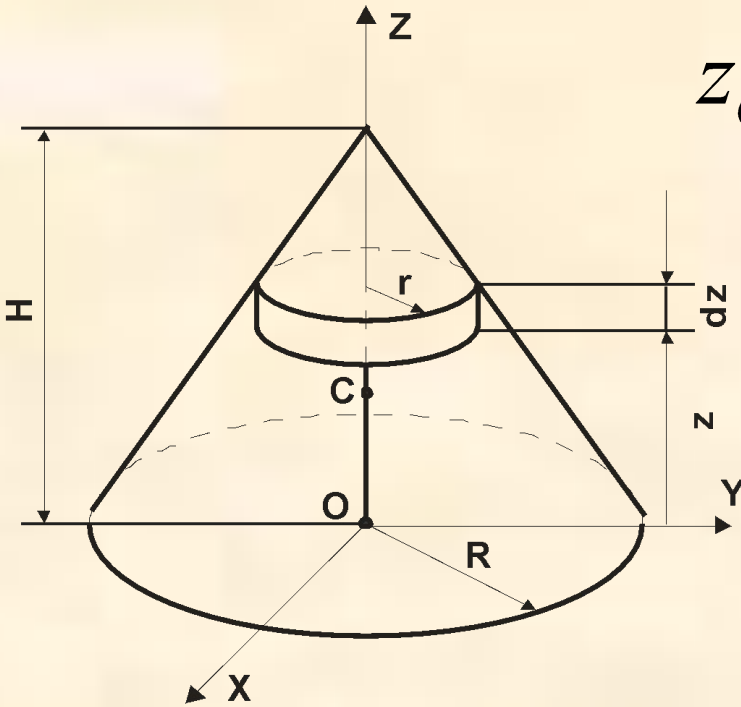


$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$



## ПРИМЕРЫ

### 4) Круговой конус



$$z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV; \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$dV = \pi r^2 dz; \quad r = \frac{H-z}{H} R$$

$$\int_{(V)} z dV = \int_0^H z \cdot \pi \left( \frac{H-z}{H} R \right)^2 dz =$$

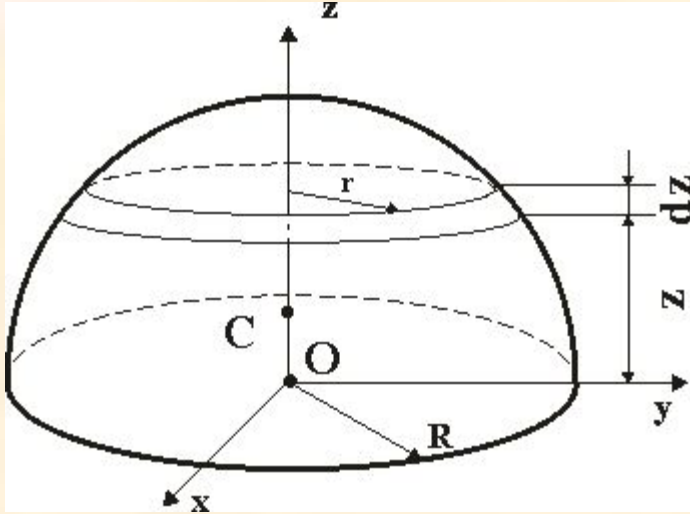
$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H (H^2 - 2Hz + z^2) z dz = \pi \frac{R^2}{H^2} \left( H^2 \frac{z^2}{2} - 2H \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right) \Bigg|_0^H =$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^4}{12} = \pi \frac{R^2 H^2}{12}; \quad z_C = \frac{\pi R^2 H^2}{12} \cdot \frac{3}{\pi R^2 H} = \frac{H}{4}$$

$$z_C = \frac{H}{4}$$

## ПРИМЕРЫ

### 5) Полушар



$$z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV; \quad V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$dV = \pi r^2 dz; \quad r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$\int_{(V)} z dV = \int_0^R z \cdot \pi (R^2 - z^2) dz =$$

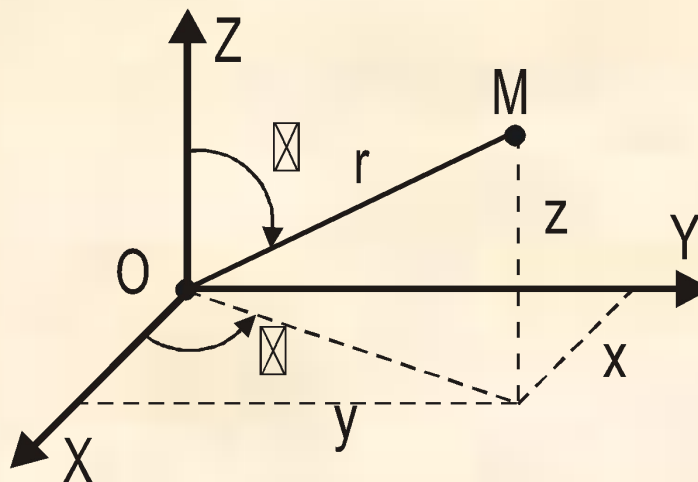
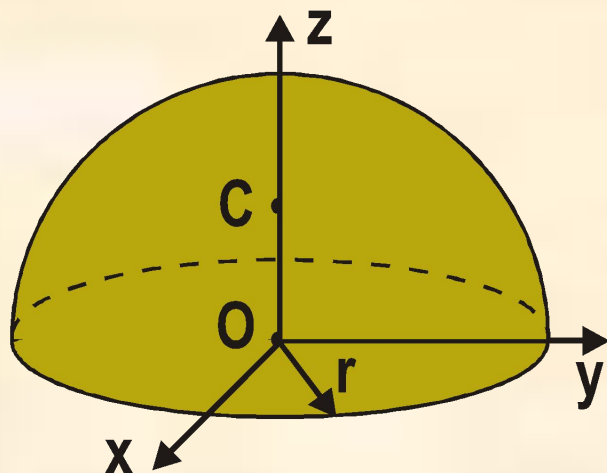
$$= \pi \int_0^R (R^2 z - z^3) dz = \pi \left( \frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^R = \pi \frac{R^4}{4}$$

$$z_C = \frac{\pi R^4}{4} \cdot \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3R}{8}$$

$$z_C = \frac{3R}{8}$$

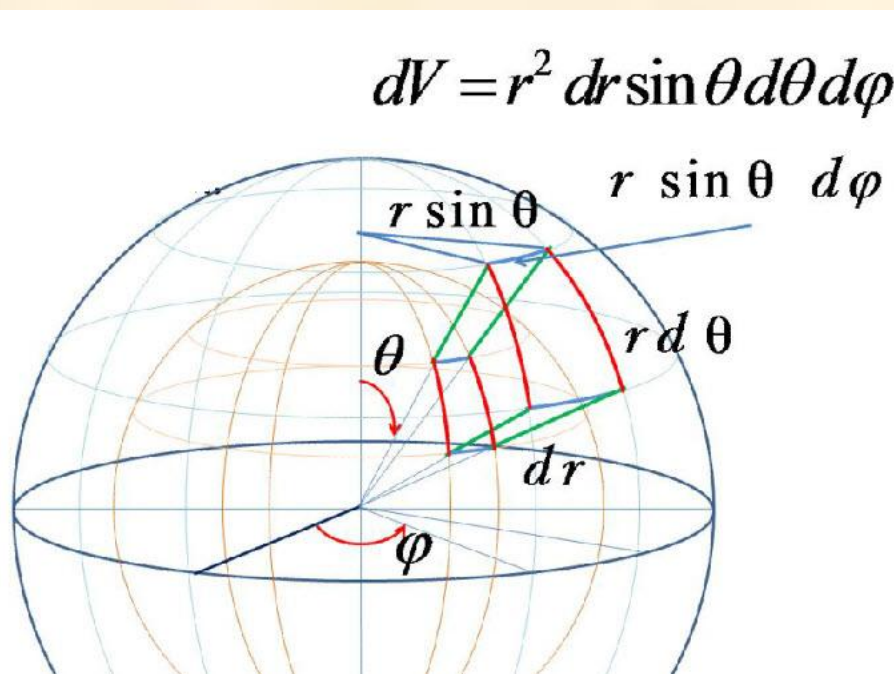
# ПРИМЕРЫ

## 4) Полушар.



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV =$$



$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{3}{2\pi r^3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{3}{2\pi r^3} \frac{1}{4} (-\cos 2\theta) \Big|_0^{\pi/2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r =$$

$$= \frac{3}{2\pi r^3} \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{3}{8} r$$

$$z_C = \frac{3}{8} r$$

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ

**Трение** - механическое взаимодействие между поверхностями твердых тел, возникающее в местах их соприкосновения и препятствующее относительному перемещению тел в направлении, лежащем в плоскости их соприкосновения.

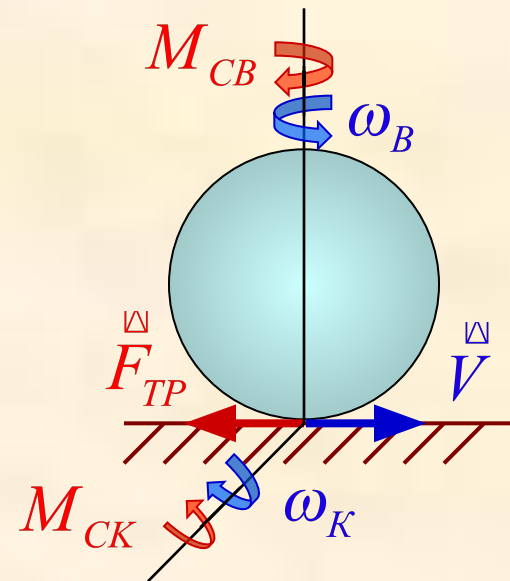
Трение между взаимно неподвижными поверхностями называется **трением покоя**.

Трение между движущимися поверхностями называется **кинематическим**.

В зависимости от вида движения одного тела по поверхности другого тела различают кинематические **трение скольжения**, **трение качения** и **трение верчения**.

При отсутствии смазки между трущимися поверхностями трение называют сухим.

При наличии смазки между трущимися поверхностями трение называют вязким или жидкостным.



# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ

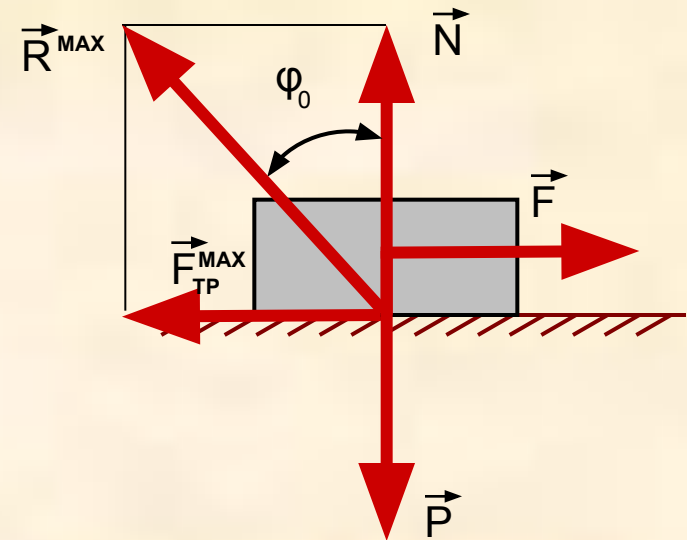
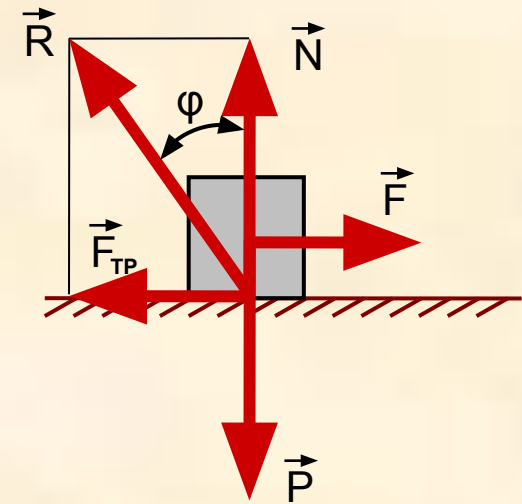
Сила трения скольжения подчиняется законам трения, установленным экспериментально Кулоном и Амонтоном:

$$\begin{cases} 0 < |F_{TP}| \leq |F_{TP}^{MAX}| \\ |F_{TP}^{MAX}| = f \cdot |N| \end{cases},$$

Здесь  $f$  - безразмерный коэффициент трения скольжения, определяемый экспериментально и зависящий от многих факторов: материала соприкасающихся тел, степени чистоты обработки их поверхности, влажности и температуры окружающей среды и др. Коэффициент трения скольжения не зависит от силы нормального давления и площади контакта трущихся поверхностей.

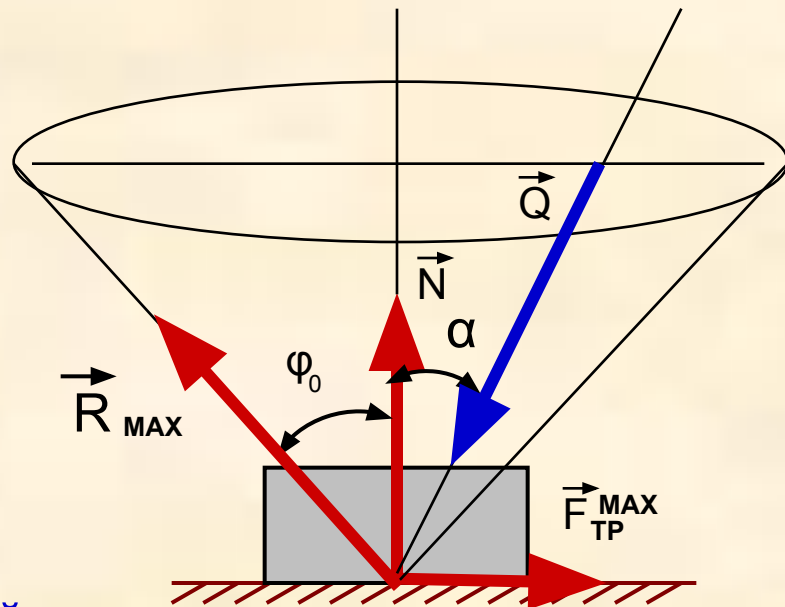
Углом трения называют угол  $\varphi_0$  между направлениями нормальной реакции  $\vec{N}$  и полной реакции  $\vec{R}^{MAX}$ , соответствующей максимальному значению силы трения скольжения  $\vec{F}_{TP}^{MAX}$ .

При этом имеет место соотношение  $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{|\vec{F}_{TP}^{MAX}|}{|\vec{N}|} = f$ .



# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ

**Конус трения** – геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции шероховатой поверхности в пространстве. Образующая конуса трения составляет угол трения  $\varphi_0$  с нормалью к поверхности трущихся тел. Если коэффициент трения одинаков по всем направлениям, то конус трения будет круговым.



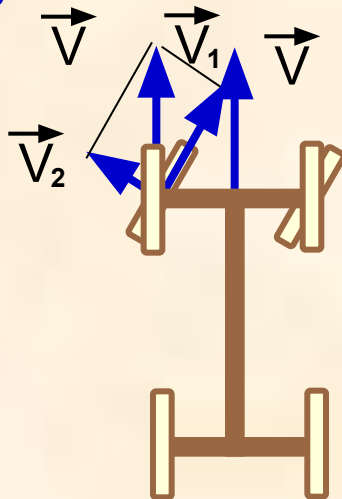
Если линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к телу -  $\vec{Q}$ , проходит внутри конуса трения, то тело останется в равновесии при сколь угодно большом модуле этой силы.

## Некоторые примеры

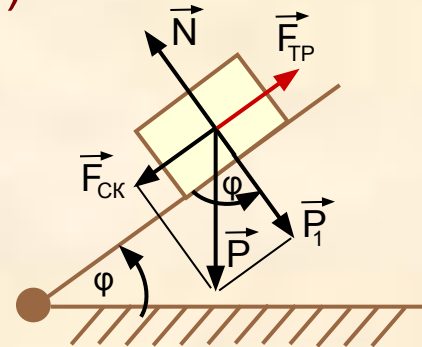
1)



2)

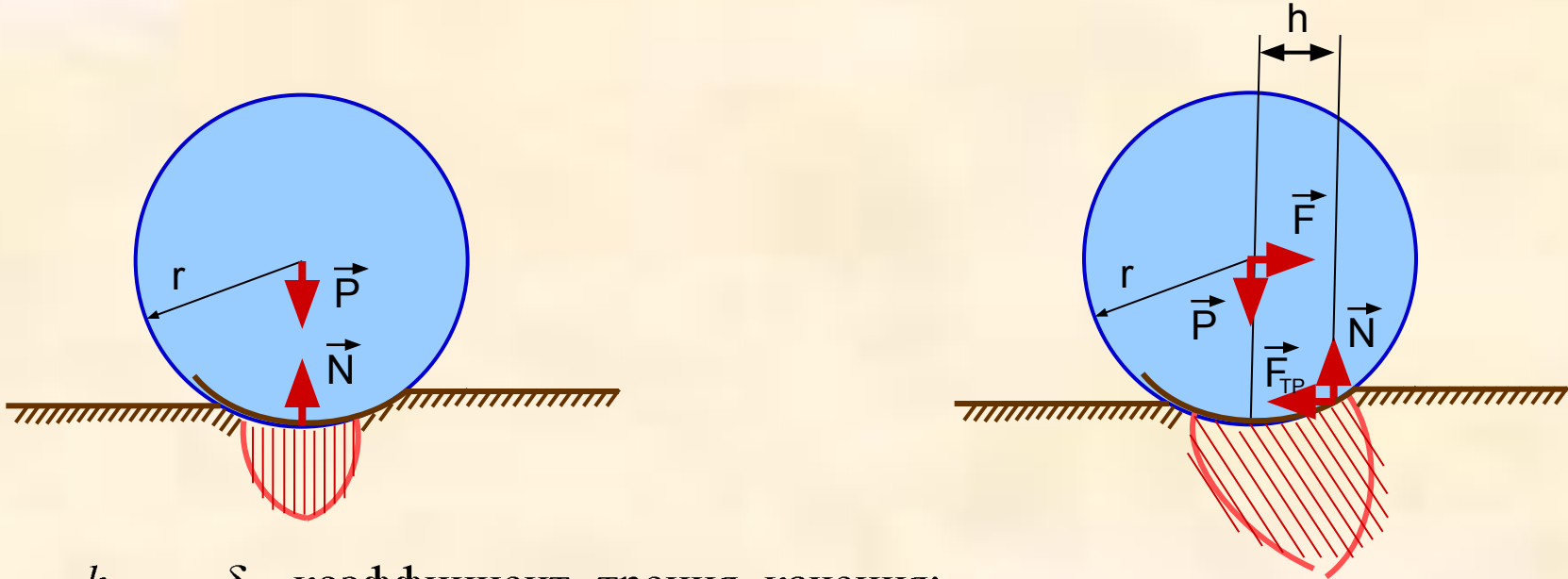


3)



# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ

## ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ. МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ КАЧЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ



$h_{MAX} = \delta$  – коэффициент трения качения;

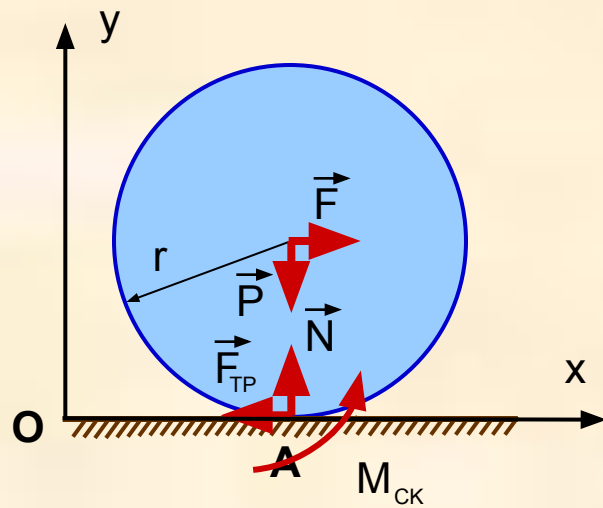
$[\delta]$  = определяется экспериментально;

Момент  $M_{СК}$  сопротивления качению.

Условие отсутствия качения тела по поверхности

$$|F| \cdot r \leq \delta \cdot |N|.$$

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ



При равновесии катка выполняются условия:

$$\sum F_{KX} = F - F_{TP} = 0 \quad (1),$$

$$\sum F_{KY} = N - P = 0 \quad (2),$$

$$\sum M_A(\vec{F}_K) = -F \cdot r + M_{CK} = 0 \quad (3).$$

При отсутствии скольжения  $F = F_{TP} \leq f \cdot N = f \cdot P \Rightarrow F \leq f \cdot P$ ;

при отсутствии качения  $F \cdot r = M_{CK} \leq \delta \cdot N = \delta \cdot P \Rightarrow F \leq \frac{\delta}{r} \cdot P$ .

Пусть  $\frac{\delta}{r} < f$ , тогда: а) при  $0 < F < \frac{\delta}{r} \cdot P$  каток останется в равновесии;

б) при  $\frac{\delta}{r} \cdot P \leq F < f \cdot P$  каток катится без проскальзывания;

в) при  $f \cdot P < F$  каток катится со скольжением.

Пусть  $\frac{\delta}{r} > f$ , тогда: а) при  $0 < F < f \cdot P$  каток останется в равновесии;

б) при  $f \cdot P < F \leq \frac{\delta}{r} \cdot P$  каток скользит без вращения (поступательное движение);

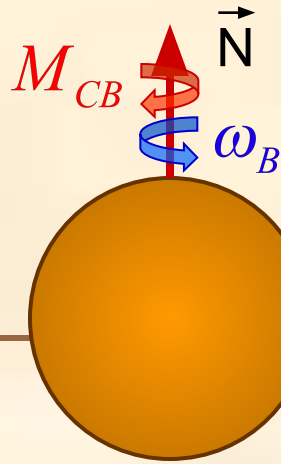
в) при  $f \cdot \frac{\delta}{r} \cdot P < F$  каток катится со скольжением.

На практике  $\frac{\delta}{r} \ll f$  поэтому, при возрастании силы  $F$ , каток начнет качение без скольжения, а затем будет происходить качение со скольжением. По затратам энергии качение значительно выгоднее скольжения.



# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ

## ТРЕНИЕ ВЕРЧЕНИЯ



$$M_{CB} = \lambda \cdot |\vec{N}|, \quad [\lambda] = \text{ ; } \lambda \approx (10^{-1} - 0,5 \cdot 10^{-1}) \cdot \delta.$$

Коэффициенты трения некоторых тел.

| № | Материал тел, находящихся в соприкосновении | $f$       | $\delta$ (м)                           |
|---|---|-----------|--|
| 1 | Дерево-дерево                               | 0,4÷0,7   | $5 \cdot 10^{-4} \div 8 \cdot 10^{-4}$ |
| 2 | Металл-металл                               | 0,15÷0,25 | –                                      |
| 3 | Сталь мягкая                                | 0,16      | $5 \cdot 10^{-5}$                      |
| 4 | Сталь закаленная                            | 0,18      | $5 \cdot 10^{-6} \div 10^{-5}$         |
| 5 | Сталь-кожа                                  | 0,56      | –                                      |
| 6 | Сталь-лед                                   | 0,02÷0,03 | –                                      |
| 7 | Резина (шины) - асфальт                     | 0,4÷0,6   | $2,4 \cdot 10^{-3}$                    |