

Иркутский филиал

Московского государственного технического университета гражданской авиации



Ил-96

**Экипаж- 3 чел.,
Дальность - 12800 км,
Количество пассажиров – 436,
Длина – 64 м,
Высота – 16 м
Стоимость - \$58 млн**

**широкофюзеляжный дальнемагистральный
четырёхмоторный турбореактивный
низкоплан со стреловидным крылом и
однокилевым вертикальным оперением
(первый полет в 1988 г., выпущено 29 шт.)**

4.6. Преобразование Лапласа

Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью некоторого функционального преобразования. Это преобразование выбирается так, чтобы **операции дифференцирования и интегрирования оригиналов заменялись алгебраическими операциями над их изображениями**. В таком случае дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические уравнения для их изображений.

Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ устанавливается с помощью интеграла Лапласа:

где $p = a + j\omega$ - комплексное число, аргумент функции изображения

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \cdot dt$$

$$F(p) = L[f(t)]$$

Таким образом, операторное изображение действительной функции времени является функцией комплексного числа p . Для того, чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, функция $f(t)$ должна удовлетворять условиям Дирихле, т.е. за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов

4.7. Переход от операторного изображения к оригиналу

Обратное функциональное преобразование, дающее возможность определить оригинал по его изображению. Такое преобразование, носящее название *обратного преобразования Лапласа*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dt = f(t)$$

$$L^{-1}[F(p)] = f(t)$$

Краткая форма записи обратного преобразования Лапласа

Операторное изображение некоторых функций

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \cdot dt$$

1. Изображение постоянной величины A

$$A \div \int_0^{\infty} A \cdot e^{-pt} dt = \left| -\frac{A}{p} \cdot e^{-pt} \right|_0^{\infty} \doteq \frac{A}{p}$$

2. . Изображение показательной функции

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \text{ то } e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{p + \alpha}$$

3. Если

$$f(t) = 1 - e^{-\alpha t}, \text{ то } 1 - e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \alpha} = \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$$

5. Изображение

$$e^{j\omega t} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p - j\omega}$$

$$\cos \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

6.

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p - j\omega} = \frac{p + j\omega}{p^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

7.

$$\sin(\omega t + \psi) \stackrel{\bullet}{=} \frac{p \cdot \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$$

$$\sin(\omega t + \psi) = \cos \omega t \cdot \sin \psi + \sin \omega t \cdot \cos \psi \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \sin \psi + \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cos \psi$$

8.

$$e^{-\delta t} \sin \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{\omega}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-\delta t} \cos \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{p + \delta}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$$

9. Изображение производной

$$f'(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f'(t) dt = \left| f(t) e^{-pt} \right|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt = p \cdot F(p) - f(0)$$

т.е. $f'(t) \stackrel{\bullet}{=} p \cdot F(p) - f(0)$

$$f^n \stackrel{\bullet}{=} p^n F(p)$$

10. Изображение интеграла

$$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt$$

Используя интеграл Лапласа, и интегрируя по частям, получаем

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-pt} \cdot dt = \left| -\psi(t) \cdot \frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \psi'(t) e^{-pt} \cdot dt$$

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}$$

Таким образом дифференцирование в области оригиналов заменяется умножением на p в области изображений. Интегрирование в области оригиналов заменяется делением на p в области изображений

Необходимо иметь в виду:

а) что изображение суммы функций равно сумме их изображений.

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n F_k(p)$$

б) при умножении функции на постоянную величину A , изображение функции должно быть умножено на эту постоянную, т.е.

$$A \cdot f(t) \doteq A \cdot F(p)$$

Тема 3. Анализ переходных процессов операторным методом

Лекция 5 (2 часа)

Изучаемые вопросы:

- 5.1. Законы Кирхгофа в операторной форме
 - 5.2. Операторный метод анализа переходных процессов в разветвленных цепях
 - 5.3. Понятие передаточной функции
 - 5.4. Цифровые (дискретные) цепи и их характеристики
 - 5.5. Основные понятия и законы ЭМП
 - 5.6. Теория электромагнитного поля. Электростатическое поле
 - 5.7. Магнитное поле
 - 5.8. Уравнения электромагнитного поля
-

Лектор – к.ф.м.н., доцент Кобзарь В.А.

5.1. Законы Кирхгофа в операторной форме

а) Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи для действительных токов имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

Так как ток $i(t)$ изображается с помощью интеграла Лапласа, а интеграл суммы равен сумме интегралов от слагаемых этой суммы, то первый закон Кирхгофа в операторной форме записывается в виде

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0$$

б) Соответственно, второй закон Кирхгофа в применении к контуру

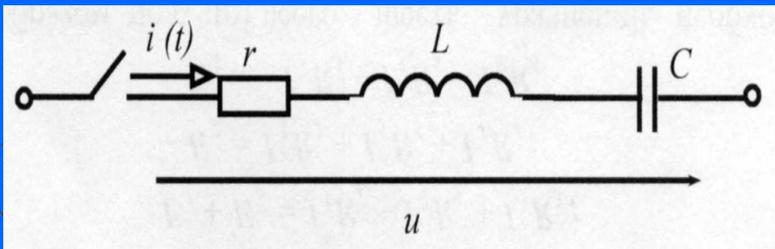
$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^m u_k$$



$$\sum_{k=1}^n E_k(p) = \sum_{k=1}^m U_k(p)$$

Естественно, что при составлении уравнений Кирхгофа в операторной форме необходимо задаться положительными направлениями всех токов и соблюдать правила знаков, установленные ранее при составлении законов Кирхгофа для действительных функций времени

В общем случае для ветви, содержащей все три элемента



$$u = r \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$$

поэтому с учетом нулевых начальных условий получим

$$U(p) = r \cdot I(p) + pLI(p) - L \cdot i(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p}$$

Отсюда получаем аналог закона Ома

$$I(p) = \frac{U(p) + L \cdot i(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{r + pL + \frac{1}{pC}}$$

Отсюда получаем аналог закона Ома в операторной форме, сопротивление и операторную проводимость

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}$$

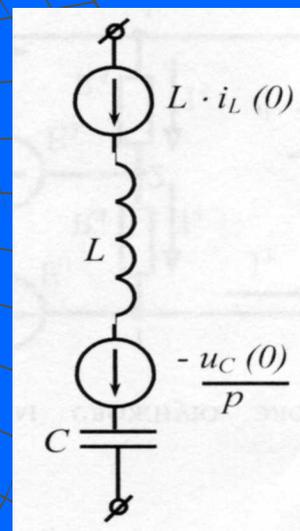
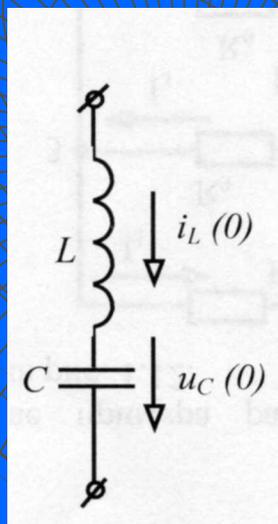
$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}$$

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$$

В случае ненулевых начальных условий второй закон Кирхгофа можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n E_K(p) + \sum_{k=1}^n L_K i_k(0) - \sum_{k=1}^n \frac{u_{CK}(0)}{p} = \sum Z_K(p) \cdot I_K(p)$$

таким образом нужно иметь в виду, что в каждой ветви при ненулевых начальных условиях действует не только внешняя э.д.с. $E_K(p)$, но еще и внутренняя или расчетная э.д.с., положительное направление которой выбрано совпадающим с положительным направлением тока в этой ветви



5.2. Операторный метод анализа переходных процессов в разветвленных цепях

С помощью преобразования Лапласа переходят от функции оригиналов к

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-Pt} \cdot dt$$

$$F(p) = L[f(t)]$$

при этом **система интегро-дифференциальных уравнений относительно оригиналов заменяется системой алгебраических уравнений относительно их изображений.**

$$u = r \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + u_c(0)$$



$$U(p) = r \cdot I(p) + pLI(p) - L \cdot i(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_c(0)}{p}$$

При решении полученной системы алгебраических уравнений определяются изображения искомых функций, а затем при помощи обратного преобразования из формул или специальных таблиц определяются искомые функции времени.

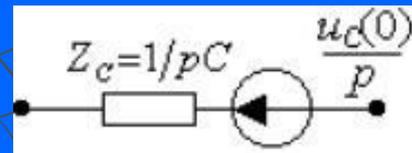
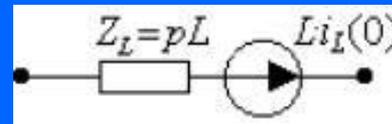
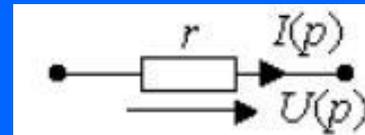
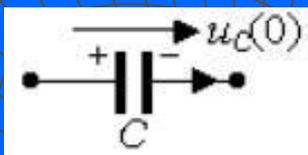
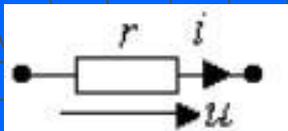
$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dt = f(t)$$

$$L^{-1}[F(p)] = f(t)$$

При расчете переходного процесса операторным методом желательно от исходной схемы, составленной для после коммутационного режима, перейти к эквивалентной операторной схеме. Это позволит использовать все расчетные методы, которые известны и использовались при расчете ЭЦ в установившихся режимах: закон Ома, метод законов Кирхгофа, метод контурных токов, узловых напряжений, эквивалентного генератора.

Переход от реальной цепи к операторной

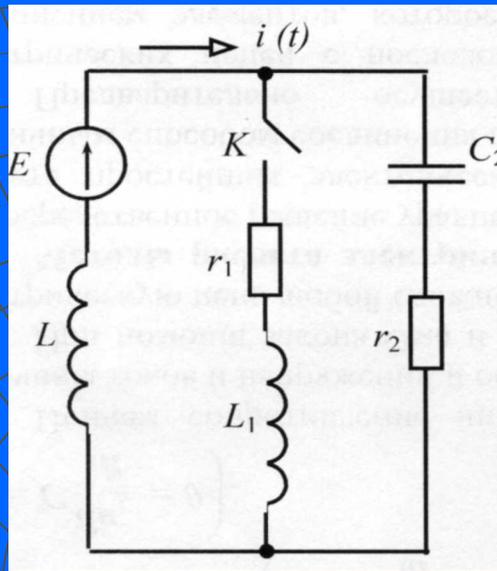
Исходная электрическая цепь	Операторная расчетная цепь
$i(t), u(t), e(t), J(t)$	$I(p), U(p), E(p), J(p)$



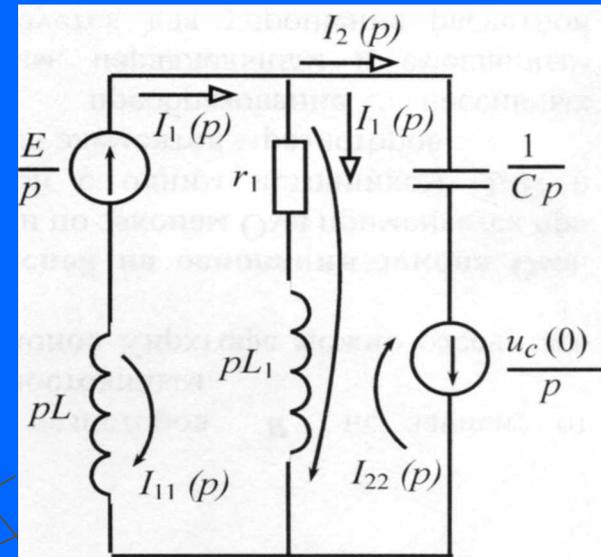
Резистивный элемент r преобразуется в операторный образ без изменения. Индуктивность L заменяется операторным сопротивлением $Z_L = pL$ и источником напряжения $Li_L(0)$, направление действия которого совпадает с направлением тока в индуктивности к моменту коммутации. Емкость C заменяется операторным сопротивлением $Z_C = 1/pC$ и источником напряжения $u_C(0)/p$; направление действия источника противоположно напряжению на емкости к моменту коммутации, т.е. направлено в сторону разряда емкости на внешнюю цепь. Независимые источники энергии заменяются на операторные образы. Расчет переходного процесса операторным методом целесообразно начинать сразу с операторной схемы замещения, минуя этап составления системы интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим это на примере ЭЦ, изображенной на рис. а Эквивалентная операторная схема изображена на рис.б.

а)



б)



Токи в операторной форме можно получить, например, воспользовавшись методом контурных токов или узловых напряжений

$$\begin{cases} I_{11}(p)(r_1 + pL_1 + pL) - I_{22}(p)(r_1 + pL) = \frac{E}{p} \\ -I_{11}(p)(r_1 + pL_1) - I_{22}(p)\left(r_1 + pL_1 + \frac{1}{Cp}\right) = \frac{-u_c(0)}{p} \end{cases}$$

$$I(p) = I_{11}(p), \quad I_1(p) = I_{11}(p) - I_{22}(p), \quad I_2(p) = I_{22}(p)$$

5.3. Понятие передаточной функции цепи

Для анализа переходных режимов в линейных электрических цепях применяют преобразования Лапласа. Для описания цепи используют изображения по Лапласу напряжений и токов. Характеристикой линейной цепи в области комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$ служит **передаточная функция** - - отношение изображений по Лапласу реакции цепи (выходного напряжения или тока) при нулевых начальных условиях к воздействию (напряжению или току источника):

$$H(p) = U(p)/V(p).$$

Для линейных систем с сосредоточенными параметрами передаточная функция может быть представлена в виде отношения полиномов:

$$H(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Полиномы числителя и знаменателя можно разложить на простые множители:

$$H(p) = \frac{a_m (p + p_{01})(p + p_{02}) \dots (p + p_{0m})}{b_n (p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)}.$$

5.4. Цифровые (дискретные) цепи и их характеристики

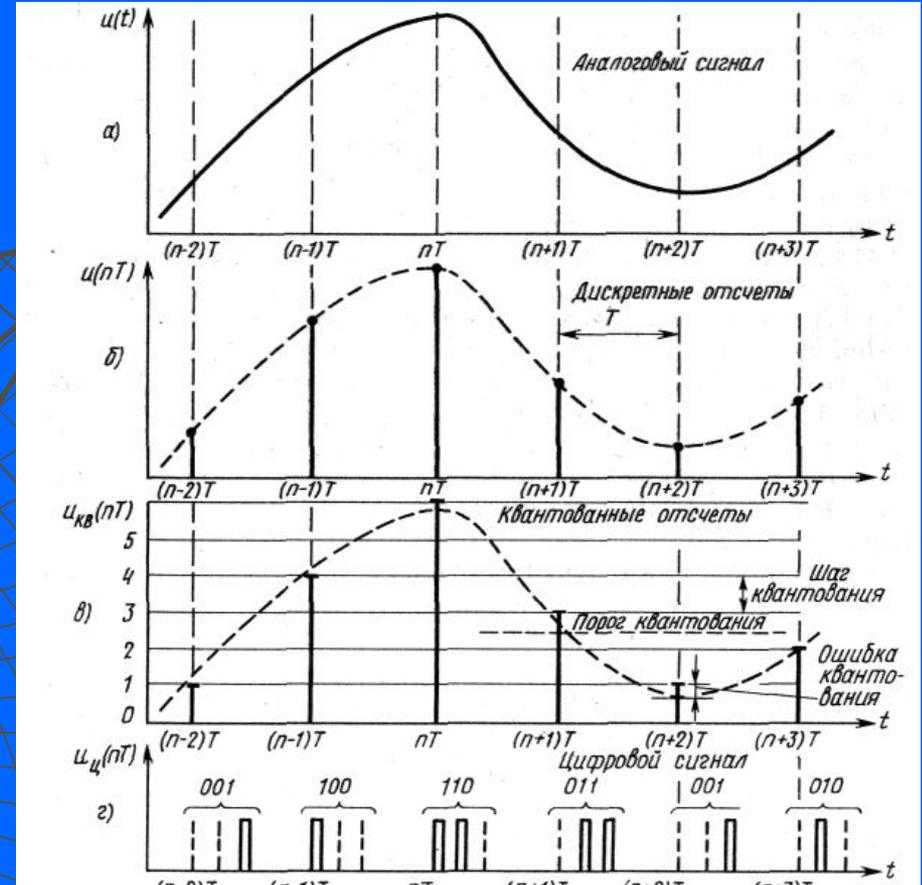
Одной из главных причин ограничений аналоговых РТС следует считать **слабую помехозащищенность** аналогового сигнала, который подвергается в каждом из многочисленных устройств радиотракта воздействию шумов и других помех, накапливая их от звена к звену

Дискретизация - замена непрерывного аналогового радиосигнала $u(t)$ последовательностью отдельных во времени отсчетов этого сигнала.

Квантование заключается в замене полученных после дискретизации мгновенных значений отсчетов ближайшими значениями из набора фиксированных уровней.

Кодирование - преобразование квантованного значения отсчета в соответствующую ему кодовую комбинацию символов. Представление дискретных и проквантованных отсчетов сигнала в натуральном двоичном коде называют **импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ)**

Теорема Котельникова (теорема отсчетов). Аналоговый сигнал $u(t)$, не содержащий частот выше F_{\max} (Гц), полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга на $1/(2F_{\max})$.



$$F_d > 2 F_{\max}$$

5.5. Основные понятия и законы ЭМП

Взаимодействие заряженных частиц находящихся на расстоянии друг от друга описывают с помощью понятия поля. Можно говорить, что одна частица создает возле себя поле и о последующим взаимодействии этого поля с другой частицей.

Электромагнитное поле представляет собой особую форму материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между электрически заряженными частицами.

Поведение электромагнитного поля изучает классическая электродинамика, но при больших частотах проявляются квантовые свойства электромагнитного поля. В этом случае классическая электродинамика становится неприменимой и электромагнитное поле описывается квантовой электродинамикой.

Свойство частицы определяющее её взаимодействие с электромагнитным полем определяется **зарядом частицы q** . Он может быть как положительным, так и отрицательным или равным нулю.

Электрические заряды существуют в природе в виде заряженных частиц.

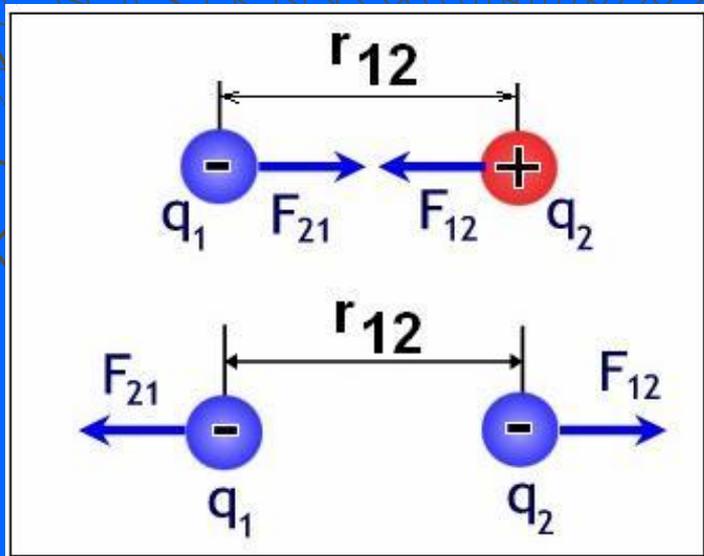
Элементарная отрицательно заряженная частица, с которой нам приходится встречаться в электрических явлениях, называется **электроном**. Заряд электрона равен $1,6 \cdot 10^{-12}$ Кл.

5.6. Теория электромагнитного поля.

Электростатическое поле

Частным случаем ЭМП является электрическое поле. Закон Кулона - два неподвижных точечных электрических зарядов q_1 и q_2 , находящихся в покое в вакууме притягиваются или отталкиваются друг от друга с силой, пропорциональной произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2}$$



F – модуль силы взаимодействия двух зарядов (Н);

q_1 – величина первого заряда (Кл);

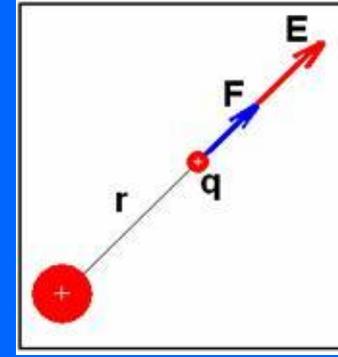
q_2 – величина второго заряда (Кл);

r_{12} – расстояние между зарядами (м);

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ – электрическая постоянная (Кл/(В м)).

Для количественной характеристики электрического поля используют — напряженность электрического поля E . **Напряженность электрического поля E** равна отношению механической силы F , действующей на неподвижный положительный пробный заряд q к величине этого заряда

$$E = \frac{F}{q}$$



Напряженность электрического поля по направлению совпадает с вектором силы, действующей на положительный заряд

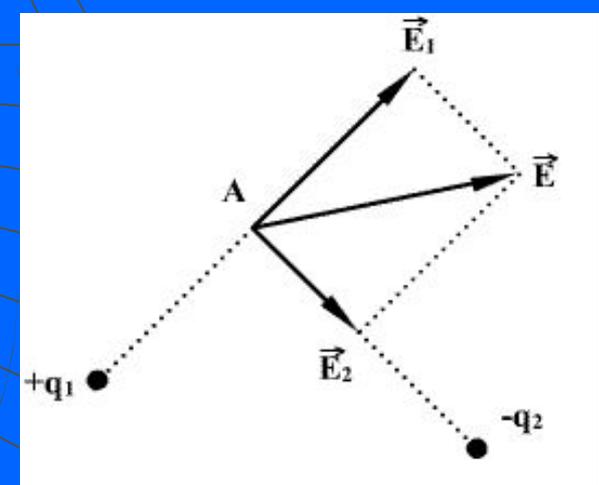
Если электрическое поле вызвано одним точечным зарядом q , то напряженность поля можно получить непосредственно из закона Кулона путем деления обеих частей равенства на пробный заряд

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Если известна напряженность поля в какой-либо точке, то тем самым определена и сила, действующая на электрический заряд, помещенный в эту точку

$$F = qE$$

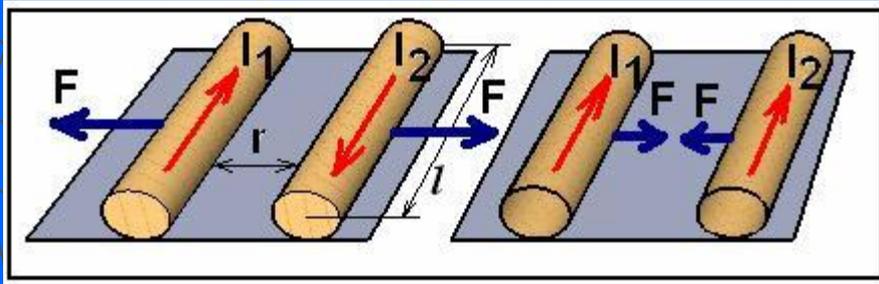
Если E_1, E_2, \dots, E_n — векторы напряженности полей, создаваемых отдельными зарядами в какой-либо точке, то напряженность результирующего поля в этой же точке равна их векторной сумме (**принцип суперпозиции** (наложения) электрических полей)



$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^n E_i$$

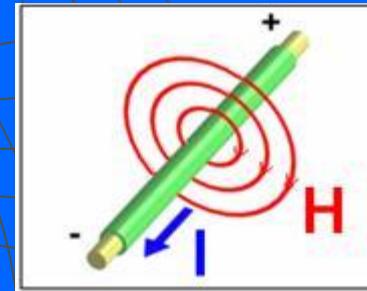
5.7. Магнитное поле

Между проводниками по которым протекают электрические постоянные токи, возникают механические силы взаимодействия, зависящие от силы этих токов и расположения проводников (**закон Ампера**). Если направления токов одинаковы, то параллельные проводники притягиваются, если же направления токов противоположны – отталкиваются



где F – сила действующая между параллельными проводниками, Н;
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ магнитная постоянная, Гн/м;
 I_1 – сила постоянного тока в первом проводнике, А;
 I_2 – сила постоянного тока во втором проводнике, А;
 l – длина проводников, м;
 r – расстояние между проводниками, м.

Магнитное поле в каждой точке пространства может быть исчерпывающим образом описано некоторым **вектором H** , называемым **напряженностью магнитного поля**



Опытным путем установлено, что сила F связана с H следующим выражением
$$F = \frac{I}{c} [dsH]$$

где ds элемент тока длины, по которому течет ток силы I ;
 $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме).

Для описания магнитного поля наряду с напряженностью магнитного поля H широко используют еще другую физическую величину — **магнитную индукцию**

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

где B – вектор магнитной индукции, Тл;
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ В с/(А м) – магнитная постоянная;
 H – вектор напряженности магнитного поля, А.м.

Опыт показывает, что для магнитного поля, так же как и для электрического справедлив **принцип суперпозиции** или наложения, если имеется несколько элементов с током, каждый из которых создает магнитные индукции B_1 , B_2 и B_n , то магнитная индукция результирующего поля B равна векторной сумме индукций отдельных элементов с током

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_n$$

5.8. Уравнения электромагнитного поля

Закон Ома в дифференциальной форме.

где \mathbf{j} – плотность тока проводимости;

σ – удельная проводимость.

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Ток смещения $\mathbf{j}_{\text{см}}$ определяется как

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

где \mathbf{D} – вектор электрического смещения для вакуума, Кл/м²,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}; \\ \oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}; \\ \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV; \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \end{array} \right.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

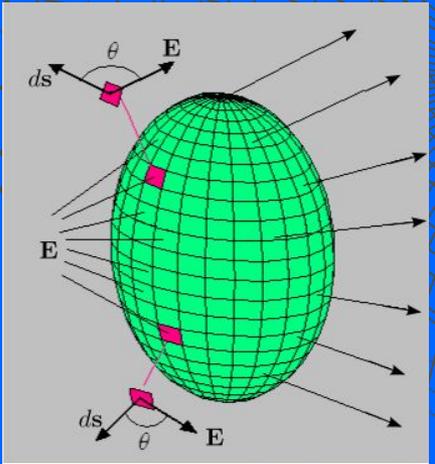
Электрический заряд является источником электрической индукции

Не существует магнитных зарядов

Изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле

Электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле

Полный электрический ток свободных зарядов и изменение потока электрической индукции через незамкнутую поверхность, пропорциональны циркуляции магнитного поля на замкнутом контуре, который является границей поверхности.



$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}; \\ \oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}; \\ \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV; \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \end{array} \right.$$