Векторная алгебра

Основные понятия

Основные понятия

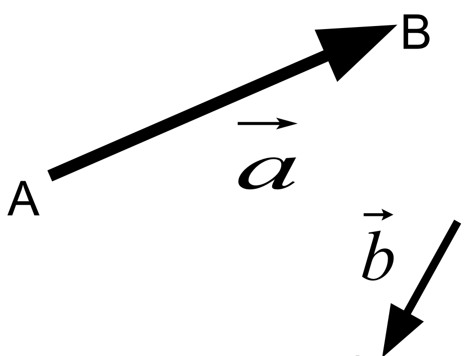
Математическая величина

Скалярная величина
(характеризуется численным
значением)

Векторная величина
(Характеризуется численным
значением и направлением)

Основные понятия

- **Определение 1.**
- **Вектором** называется отрезок, имеющий определенную длину и направление.



Обозначения:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \overrightarrow{AB},\dots$$

- **Определение 2.**
- Модулем вектора (длиной вектора) называется длина отрезка :

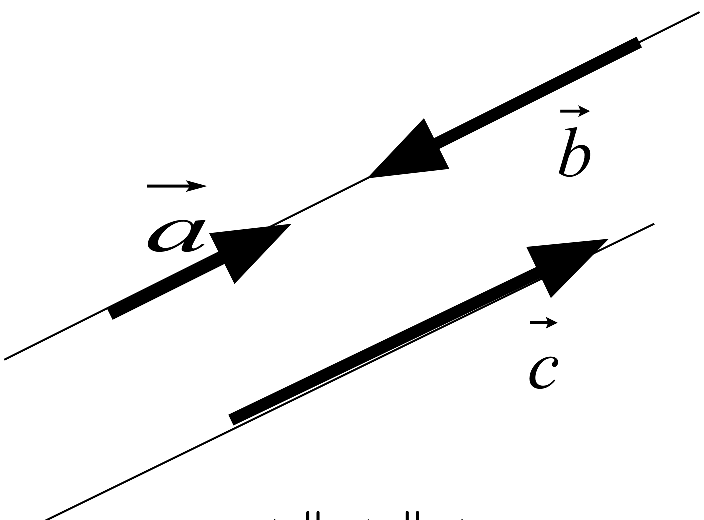
$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Основные понятия

- $\vec{0}$ - вектор, у которого начало и конец совпадают.

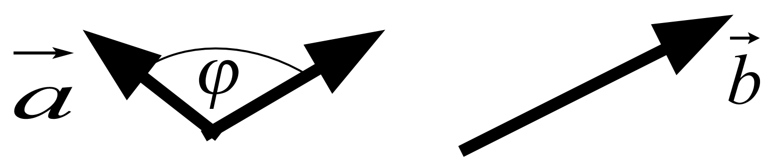
$$\left|\vec{0}\right| = 0$$

- **Определение 3.**
- **Коллинеарными** называются векторы, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



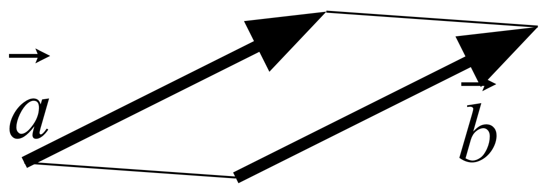
Обозначение: $\vec{b} \parallel \vec{a} \parallel \vec{c}$

Определение 4.
Углом φ между векторами называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы их направления совпали.



Основные понятия

- **Определение 5.**
- Два вектора называются **равными**, если
- они коллинеарные, имеют одинаковую длину
- и одинаковое направление.



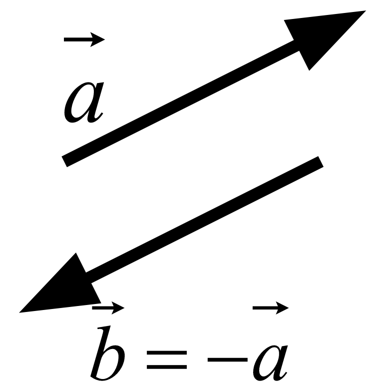
$$\boxed{\vec{a} = \vec{b}}$$

- **Следствие.**
- При параллельном переносе получаются равные векторы.

Основные понятия

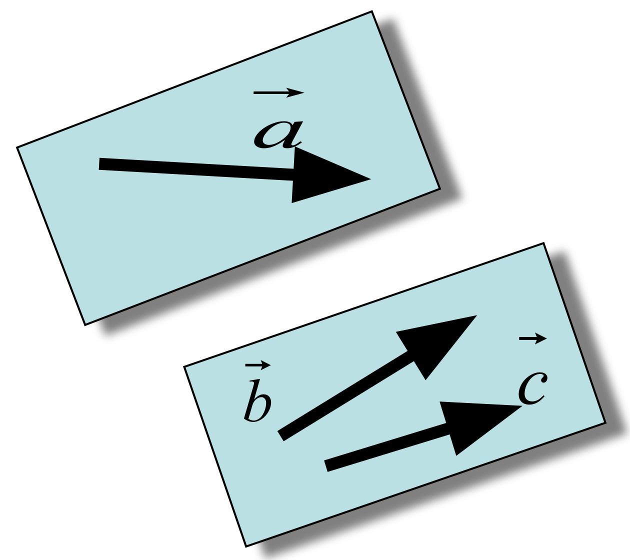
- **Определение 6.**
- Два вектора называются **противоположными**, если
- они коллинеарные, имеют одинаковую длину
- и противоположное направление.

$$\boxed{\vec{b} = -\vec{a}}$$



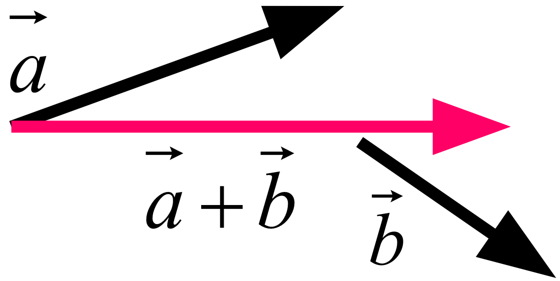
- **Определение 7.**
- **Компланарными** называются векторы,
- если они лежат в одной плоскости или
- на параллельных плоскостях.

- Замечание. Два вектора всегда компланарны.



Операции с векторами

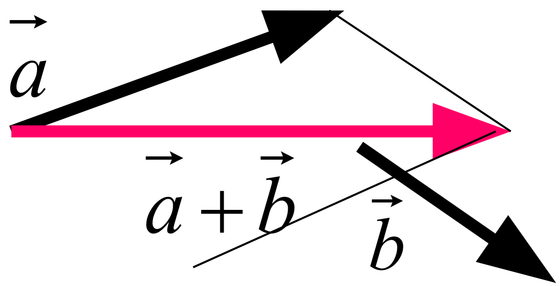
- **Сумма векторов.**



- **Определение 1 (правило треугольника).**
- Пусть начало второго вектора совпадает с концом первого. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора
- с концом второго, называется **суммой** этих векторов.

Операции с векторами

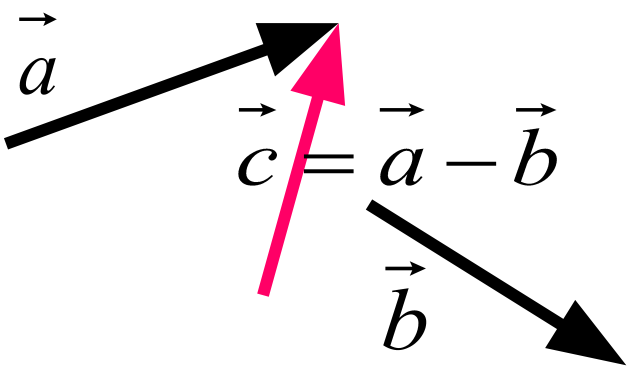
- **Сумма векторов.**



- **Определение 2 (правило параллелограмма).**
- Пусть начала первого и второго векторов совпадают.
- Построим на этих векторах параллелограмм.
- Тогда вектор, совпадающий с диагональю, проходящей
- через общее начало, называется **суммой** этих векторов.

Операции с векторами

- **Разность векторов.**
- **Определение 1.**
- **Разностью** векторов $\vec{a} - \vec{b}$ называется
- такой вектор $\vec{c}$, что сумма $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$
- **Определение 2.**



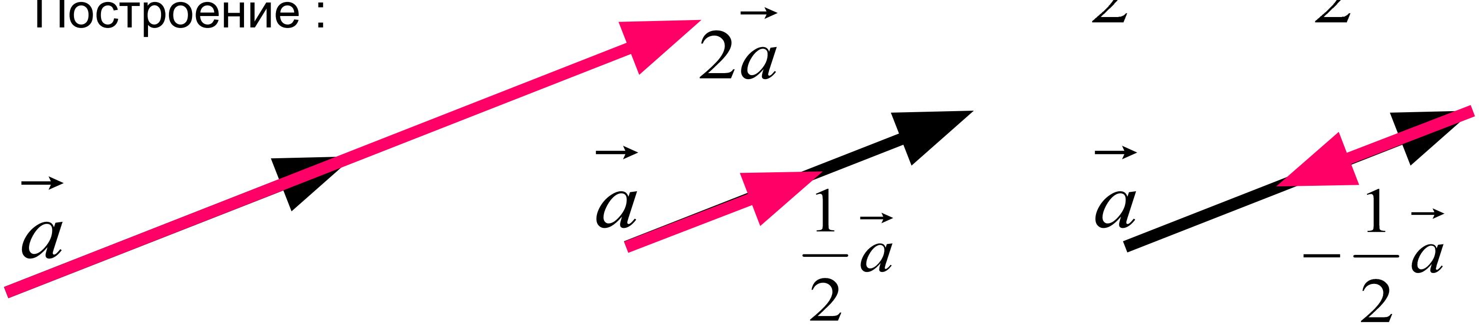
- Пусть начала первого и второго векторов
- совпадают.
- Тогда **разностью** векторов называется
- вектор, соединяющий их концы
- и направленный из конца вычитаемого в конец уменьшаемого вектора.

Операции с векторами

- **Произведение вектора на число.**
- **Определение.**
- **Произведением** вектора $\vec{a}$ на число λ называется
- вектор $\vec{a}\lambda = \lambda\vec{a}$,
- коллинеарный вектору $\vec{a}$,
- равный по модулю $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
- направленный при $\lambda > 0$ в ту же сторону, что и $\vec{a}$,
- и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$

Операции с векторами

- **Пример.**
- Задан вектор $\vec{a}$. Построить векторы $2\vec{a},\ \frac{1}{2}\vec{a},\ -\frac{1}{2}\vec{a}$.
- Построение :



- **Теорема.**
- Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ коллинеарны тогда и только тогда,
- когда найдется такая постоянная λ, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$

$$\boxed{\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \vec{b} = \lambda\vec{a}}$$

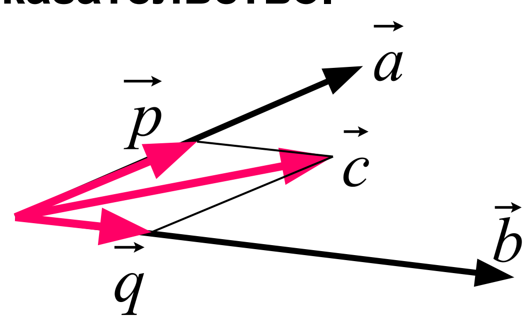
Основные свойства операций

- 1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- 2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
- 3. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
- 4. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
- 5. $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$
- 6. $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1(\lambda_2\vec{a})$

- Самостоятельно доказать каждое свойство..

Разложение векторов

- **Теорема 1.**
- Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - неколлинеарные,
- векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарные.
- Тогда найдутся такие постоянные λ и μ ,
- что $$\boxed{\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}}$$
- Такое разложение единственное.
- **Доказательство.**



$$\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$$
$$\vec{p} = \lambda\vec{a}$$
$$\vec{q} = \mu\vec{b}$$
$$\Rightarrow \vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

Разложение векторов

- **Единственность.**
- Предположим :

$$
-\begin{array}{l}\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \\ \vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}\end{array}
$$

(хотя бы одно из неравенств $\lambda \neq \lambda_1$ и $\mu \neq \mu_1$ выполнено)

$$
\vec{0} = (\lambda - \lambda_1)\vec{a} + (\mu - \mu_1)\vec{b}
$$

- Пусть $\mu \neq \mu_1$

$$
\Downarrow
$$

$$
\vec{b} = -\frac{(\lambda - \lambda_1)}{(\mu - \mu_1)}\vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}
$$

(противоречие)

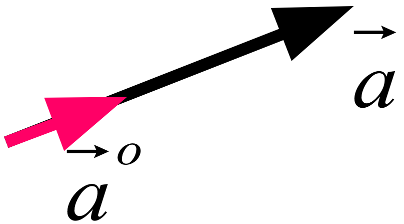
Разложение векторов

- **Теорема 2.**
- Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - некомпланарные.
- Тогда найдутся такие постоянные $\lambda, \mu; \gamma$
- что любой вектор $\vec{d}$ можно записать
- в виде $$\boxed{\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}}$$
- (разложить по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).
- Такое разложение единственное.

Д.з. Самостоятельно построить чертеж и получить разложение

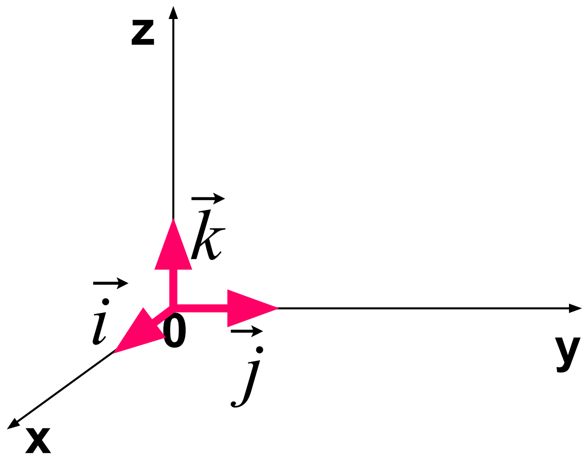
Разложение векторов

- **Разложение векторов по ортам.**
- **Определение 1.**
- **Ортом** вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^{o}$,
- имеющий единичную длину и то же направление,
- что и вектор $\vec{a}$.



Разложение векторов

- Рассмотрим прямоугольную систему координат.



Векторы $\vec{i}\,,\ \vec{j},\ \vec{k}$ -единичные (орты), направленные по осям **x, y, z** (соответственно)

Определение 2.
Тройка векторов $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ называется **ортонормированным базисом** в пространстве.

- **Теорема 3.**
- В пространстве любой вектор $\vec{d}$ можно разложить по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\boxed{\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

- Такое разложение единственное.

Разложение векторов

- **Определение 3.**
- Коэффициенты x, y, z разложения

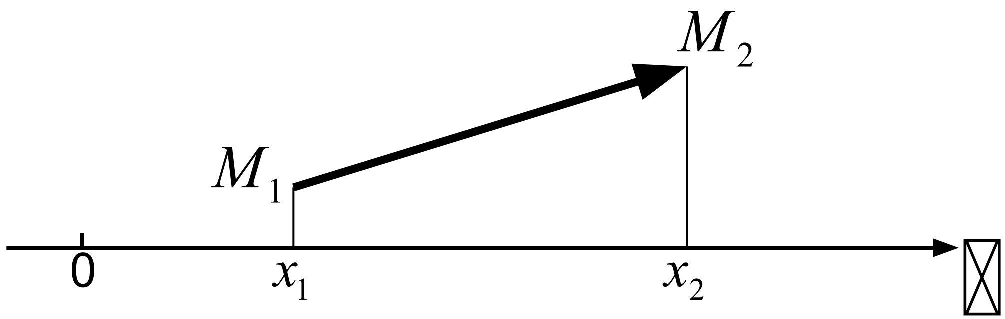
$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- называются **прямоугольными координатами**
- **вектора** $\vec{d}$: $\vec{d} = \{x, y, z\}$

- **Частный случай.**
- Если вектор $\vec{d}$ расположен на координатной плоскости xoy,
- то разложение будет иметь вид $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Коэффициенты x, y называются **прямоугольными координатами**
- **вектора на плоскости** : $\vec{d} = \{x, y\}$

Проекции вектора

- Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ и ось $\boxtimes$



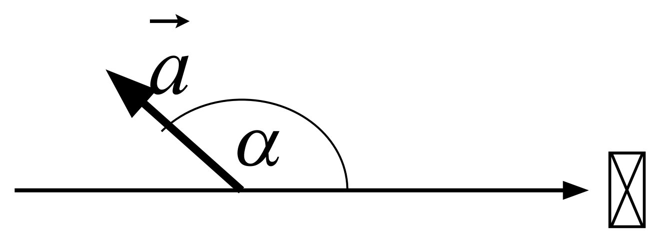
- **Определение.**
- **Проекцией вектора** $\overrightarrow{M_1M_2}$ **на ось** $\boxtimes$ называется
- разность проекций конца M_2 и начала M_1 вектора на эту ось;

$$\boxed{Пр_{\boxtimes}\overrightarrow{M_1M_2} = x_2 - x_1}$$

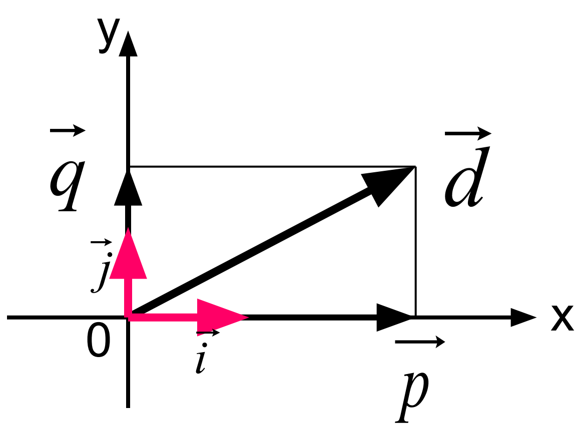
Проекции вектора

- **Свойства проекций.**
- **1.** $\Pi p_{\boxtimes}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \Pi p_{\boxtimes}\vec{a} \pm \Pi p_{\boxtimes}\vec{b}$
- **2.** $\Pi p_{\boxtimes}(\lambda\vec{a}) = \lambda \Pi p_{\boxtimes}\vec{a}$
- **3.** $\Pi p_{\boxtimes}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\alpha,$

  $где\ \ \alpha - угол\ между\ \ \vec{a}\ и\ \boxtimes$



- **4. Связь координат вектора и проекций на оси.**
- Пусть вектор $\vec{d}$ на плоскости имеет разложение: $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j}$



$$\vec{d} = \vec{p} + \vec{q} = \Pi p_x\vec{d}\cdot\vec{i} + \Pi p_y\vec{d}\cdot\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = \Pi p_x\vec{d} \qquad y = \Pi p_y\vec{d}}$$

Проекции вектора

- **В пространстве:**

$$\boxed{\vec{d} = \{x, y, z\} = \left\{Пр_x \vec{d},\ Пр_y \vec{d},\ Пр_z \vec{d}\right\}}$$

- **Следствие.**
- Если вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$ задан двумя точками,
- $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - начало, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - конец,
- то

$$\boxed{\overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}}$$

Действия с векторами в координатной форме

- **Сумма и разность векторов,**
- **произведение вектора на число.**
- Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$
- Тогда
- 1. $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$
- 2. $\lambda \vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$

Модуль вектора

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Орт вектора $\vec{a}^{\,o} = \left\{\frac{x_1}{\left|\vec{a}\right|}, \frac{y_1}{\left|\vec{a}\right|}, \frac{z_1}{\left|\vec{a}\right|}\right\}$

Действия с векторами в координатной форме

- **Необходимое и достаточное условие коллинеарности**
- **векторов, заданных в координатной форме.**
- Два ненулевых вектора коллинеарны
- тогда и только тогда, когда
- соответствующие координаты пропорциональны.
- Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ u $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$
- Тогда

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$$

- Доказательство.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Доказательство

- Рассмотрим три вектора : $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\ и\ \overrightarrow{c}$