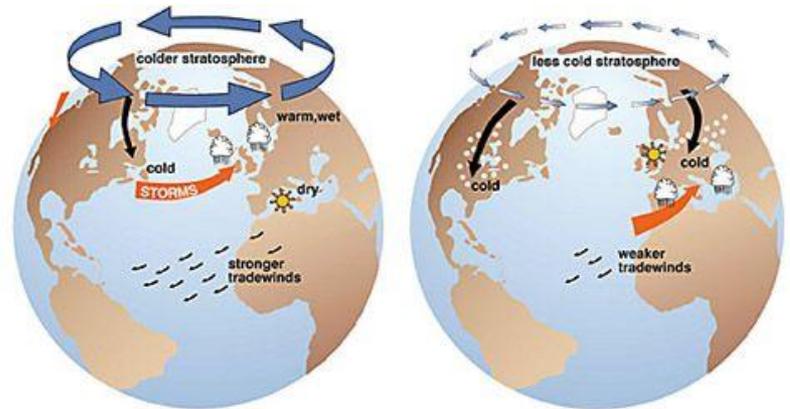


ЛЕКЦИЯ № 11

Физика колебаний

Элементы содержания: Понятие о колебательных процессах. Гармонические колебания. Амплитуда, период, частота, циклическая частота и фаза гармонических колебаний. Скорость и ускорение при гармонических колебаниях. Свободные (собственные) колебания. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний и его решение. Основные типы гармонических осцилляторов; их периоды и частоты колебаний. Энергетические соотношения для гармонического осциллятора. Свободные затухающие колебания. Коэффициент затухания. Условный период затухающих колебаний. Логарифмический декремент колебаний. Вынужденные колебания. Амплитуда и начальная фаза вынужденных колебаний. Резонанс.

Литература: Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Академия, 2006. С. 253-273.



Кинематика гармонических колебаний

Колебания - движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Гармоническими называются колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется с течением времени по синусоидальному закону:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad , \quad (11.1)$$

где A - **амплитуда колебаний** – наибольшее по модулю отклонение колеблющейся величины от её среднего значения;

$$\phi = \omega t + \phi_0 \quad (11.2)$$

-фаза колебаний - аргумент функции описывающей величину, изменяющуюся по закону гармонического колебания;

ω - **циклическая (угловая) частота**.

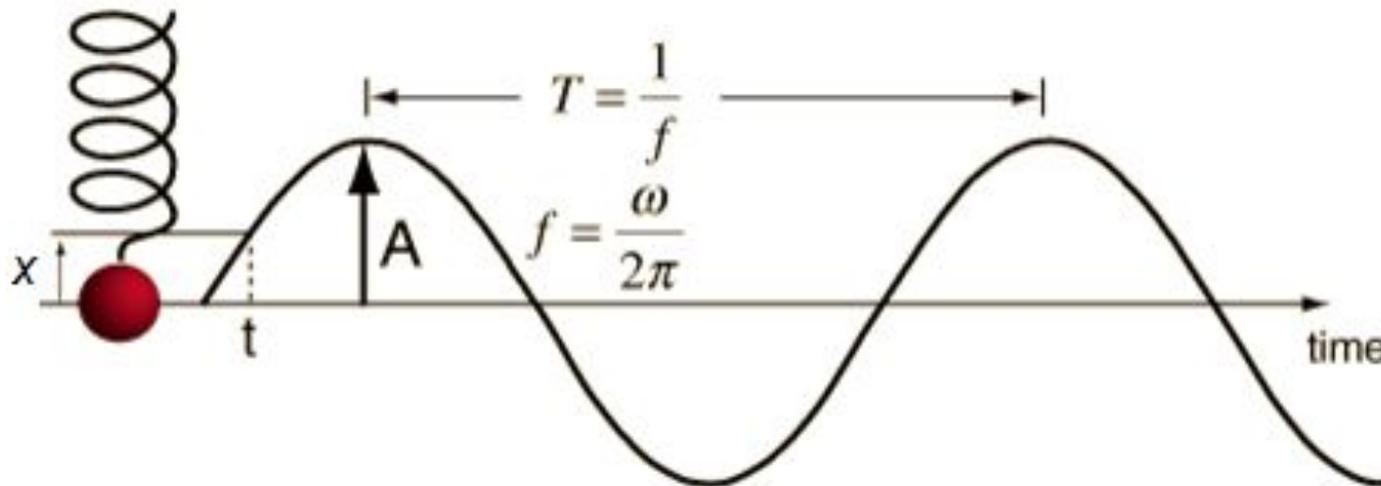
Частота колебаний - число колебаний в единицу времени, $[f]=\text{с}^{-1}=\text{Гц}$:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{\omega}{2\pi} \quad . \quad (11.3)$$

Период колебаний - наименьший промежуток времени, через который значения колеблющейся величины начинают повторяться (время одного колебания), $[T]=\text{с}$:

$$T = \frac{t}{N} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad . \quad (11.4)$$

Графическое представление гармонических колебаний:



Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

Пусть x – координата точки или отклонение колеблющейся точки от положения равновесия.

Тогда **скорость колеблющейся точки:**

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) . \quad (11.5)$$

Максимальная скорость:

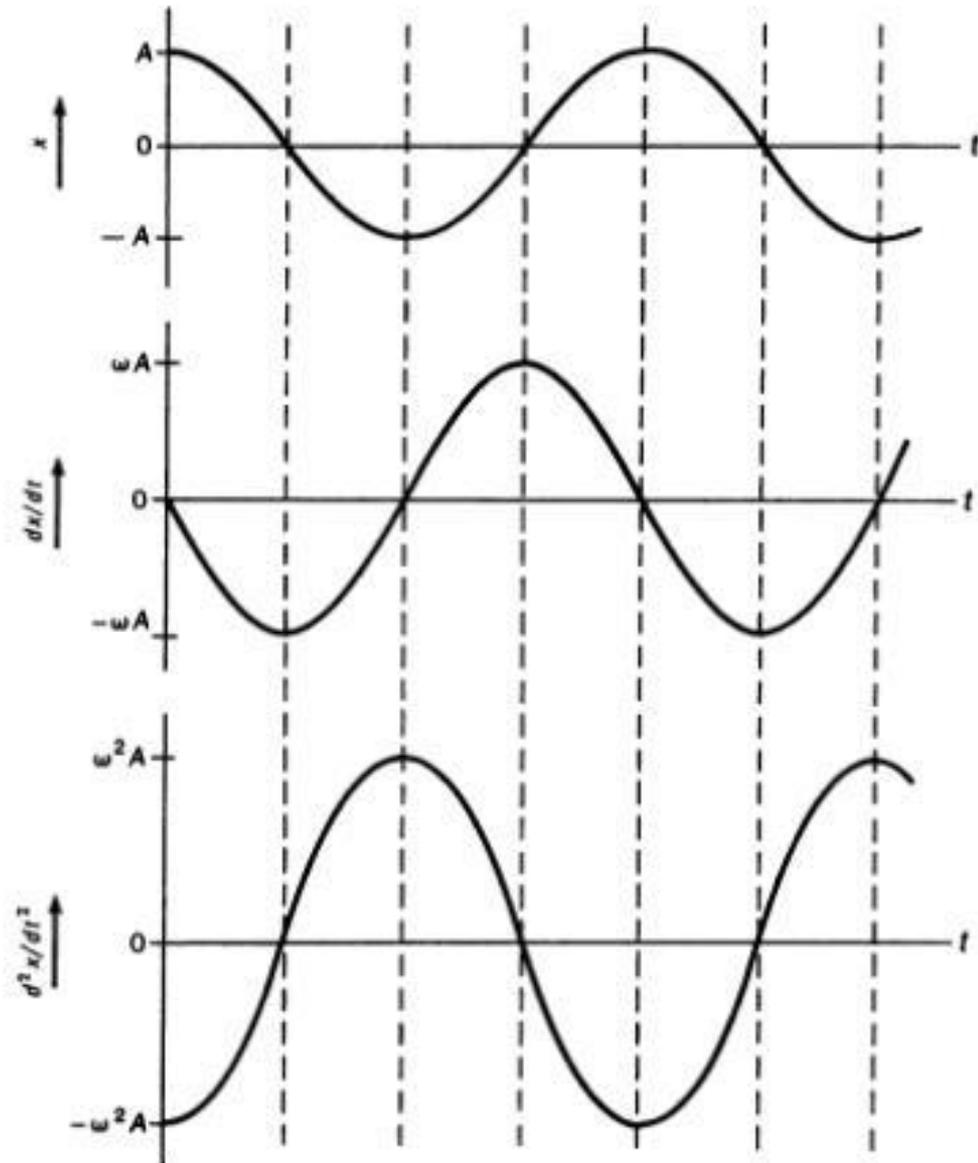
$$v_{\max} = A\omega . \quad (11.6)$$

Ускорение колеблющейся точки:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) . \quad (11.7)$$

Максимальное ускорение:

$$a_{\max} = A\omega^2 . \quad (11.8)$$



Гармонический осциллятор

Свободными (собственными) называются колебания, возникающие в физической системе при внешнем воздействии, сводящимся лишь к начальному отклонению системы из состояния устойчивого равновесия.

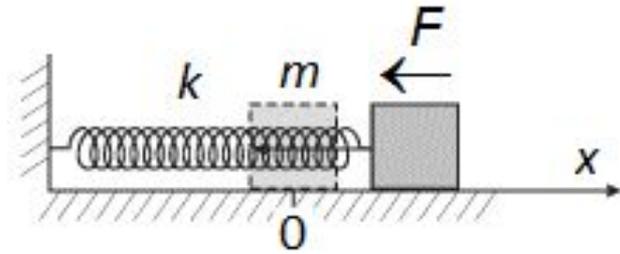
Колебательной называется физическая система, способная совершать свободные колебания.

Необходимые условия: 1) упругость и 2) инертность.

Гармонический осциллятор – колебательная система, способная совершать свободные гармонические колебания.

Примеры гармонических осцилляторов

1) **пружинный маятник** – колебательная система, состоящая из пружины, один конец которой закреплен, а на другом конце подвешен груз, совершающий колебания под действием упругой силы пружины.



$$\text{Уравнение движения: } ma = F, \quad (11.9)$$

где

$$(11.10) \quad a = d^2x/dt^2 \text{ - ускорение груза,}$$

$$(11.11) \quad F = -kx \text{ - сила упругости.}$$

Подставив (11.10) и (11.11) в уравнение (11.9), получим

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad - \quad (11.12)$$

- дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad - \quad (11.13)$$

- циклическая частота пружинного маятника.

2) **физический маятник** – твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести.

Циклическая частота физического маятника:

11.14)
$$\omega = \sqrt{\frac{lmg}{I}}$$
 , (

где l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника; I – момент инерции маятника.

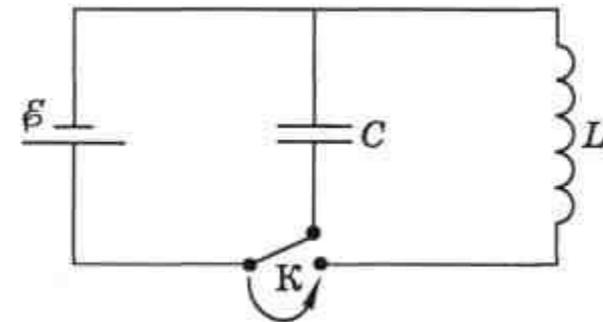
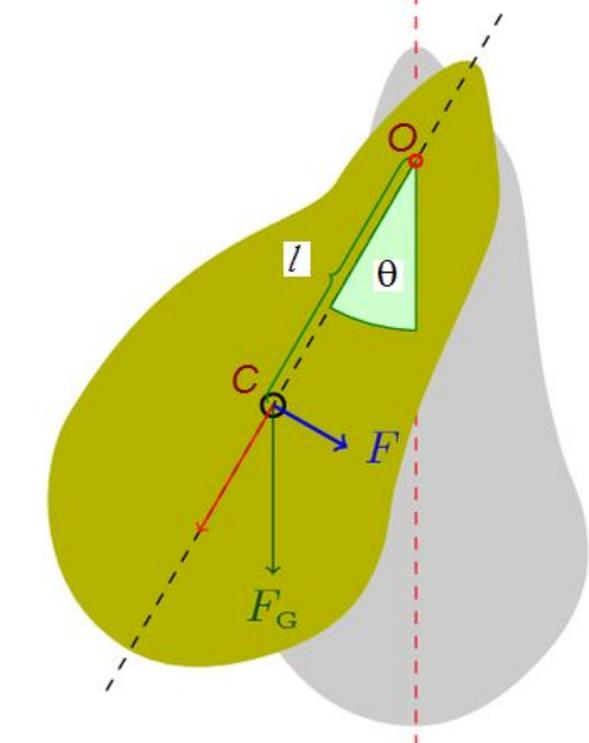
3) **колебательный контур** - электрическая цепь, состоящая из конденсатора и катушки индуктивности.

При замыкании ключа K в контуре возникают электромагнитные колебания.

Циклическая частота электромагнитных колебаний в колебательном контуре:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad - \quad (11.15)$$

- формула Томсона.

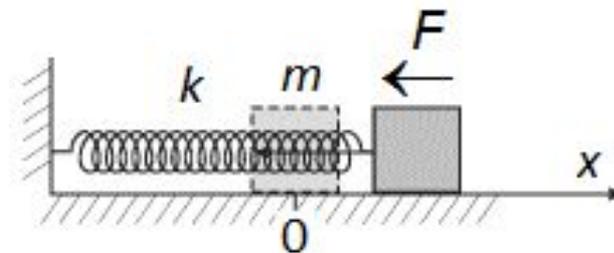


Энергетические соотношения для гармонического осциллятора

Механические колебания

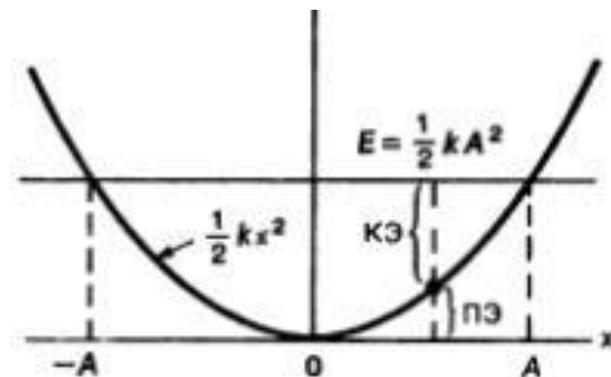
Кинетическая энергия колеблющегося груза:

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (11.16)$$



Потенциальная энергия пружины:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (11.17)$$



Полная механическая энергия пружинного осциллятора:

$$E = K + \Pi = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \quad . \quad (11.18)$$

При свободных механических гармонических колебаниях потенциальная энергия преобразуется в кинетическую энергию и наоборот так, что полная механическая энергия маятника остается неизменной.

Энергетические соотношения для гармонического осциллятора

Электромагнитные колебания

Энергия электрического поля, локализованного между пластинами конденсатора:

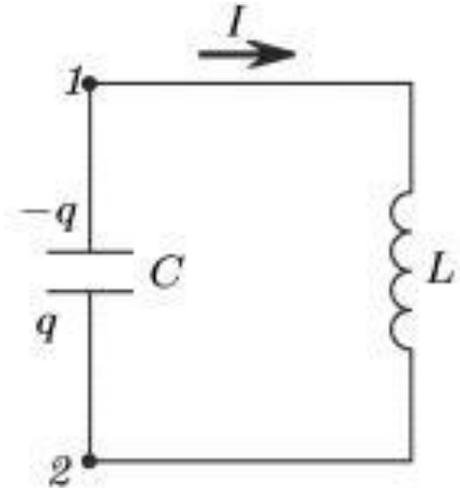
$$W_e = \frac{q^2}{2C} \quad . \quad (11.19)$$

Энергия магнитного поля, локализованного внутри катушки:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} \quad . \quad (11.20)$$

При свободных электромагнитных гармонических колебаниях энергия электрического поля преобразуется в энергию магнитного поля и наоборот так, что полная энергия электромагнитного поля остается неизменной:

$$W_e + W_m = \text{const} \quad . \quad (11.21)$$



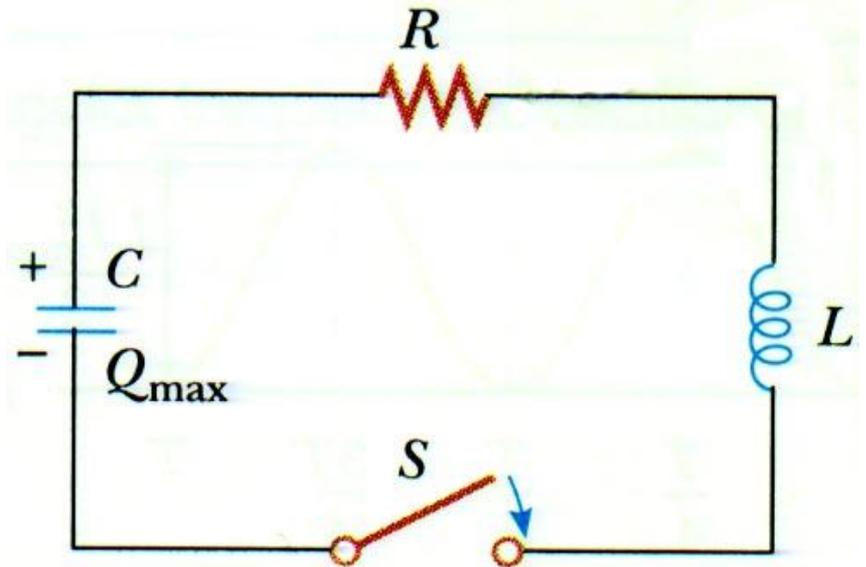
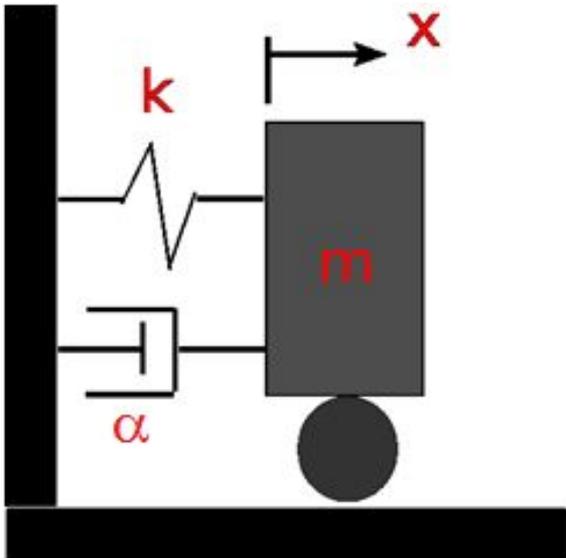
Свободные затухающие колебания

В реальных осцилляторах происходит рассеяние (диссипация) запасенной энергии, в результате свободные колебания затухают.

При механических колебаниях колебания затухают в результате действия сил трения.

При электромагнитных колебаниях колебания затухают благодаря наличию электрического сопротивления цепи колебательного контура.

Затухающими называются колебания, амплитуда которых с течением времени уменьшается.



Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний:

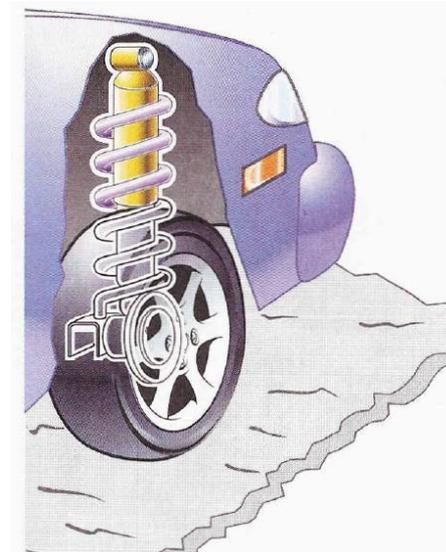
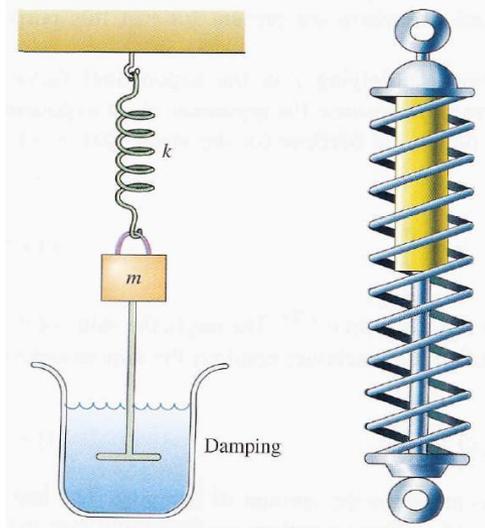
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad , \quad (11.22)$$

где α - коэффициент затухания – величина, характеризующая быстроту затухания колебаний во времени; ω - циклическая частота собственных колебаний при отсутствии сил трения (электрического сопротивления).

Условие отсутствия затухающих колебаний: $\alpha > \omega$.

Демпфирование колебаний – принудительное гашение колебаний.

Демпфер – устройство для предотвращения вредных колебаний.



Условие существования затухающих колебаний: $\alpha < \omega$. В этом случае решение дифференциального уравнения (11.22) имеет вид

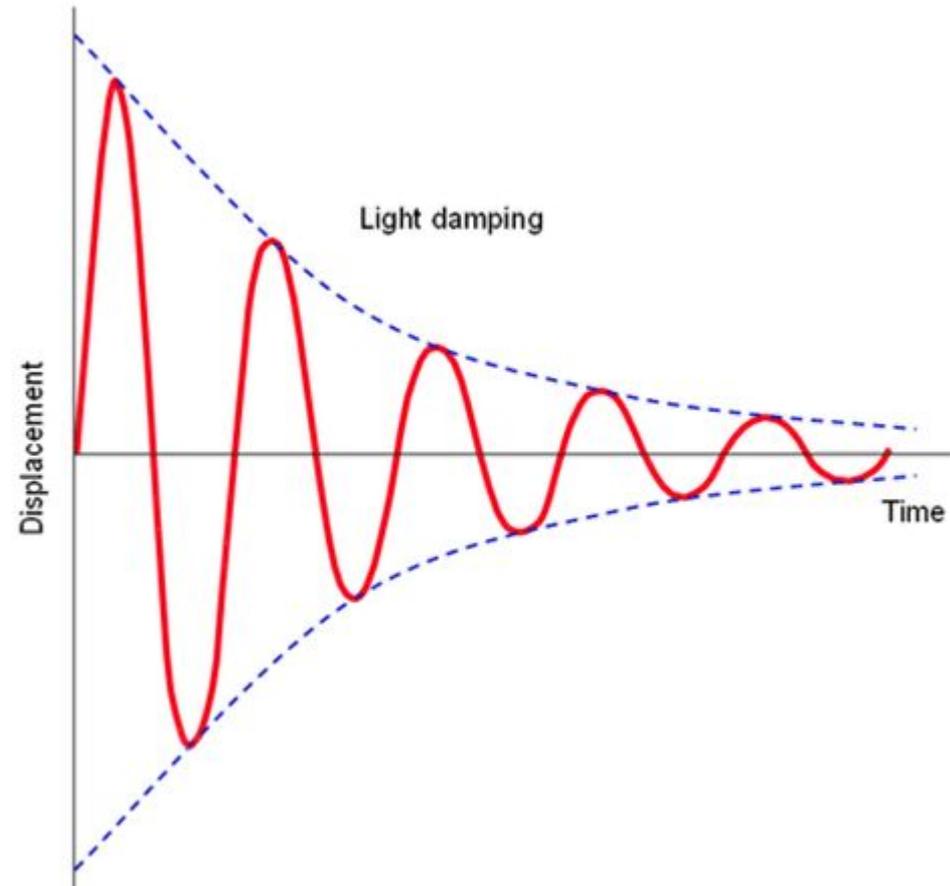
$$x(t) = A(t) \cos(\omega' t + \varphi_0) = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \varphi_0) , \quad (11.23)$$

где ω' - условная циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} , \quad (11.24)$$

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} - \quad (11.25)$$

- условный период затухающих колебаний – промежуток времени между последовательными прохождениями системой, совершающей затухающие колебания, состояния равновесия в одном и том же направлении.



Время затухания:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \quad - \quad (11.26)$$

- промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в $e \approx 2,7$ раз.

Логарифмический декремент колебаний – безразмерная величина, характеризующая относительное уменьшение амплитуды затухающих колебаний за условный период и равная натуральному логарифму отношения двух последовательных максимальных или минимальных значений колеблющейся величины:

$$\Lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t + T')} = \alpha T'. \quad (11.27)$$

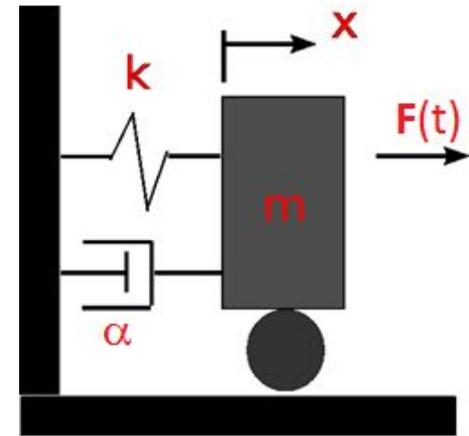
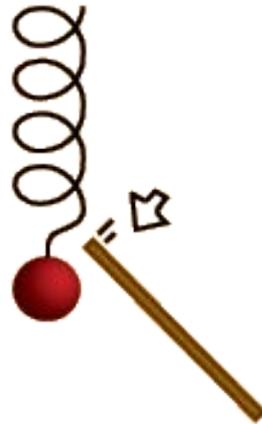
Например, если $\Lambda = 0,01$, то амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз после 100 колебаний.

Добротность колебательной системы – величина, характеризующая способность колебательной системы сохранять запасенную энергию.

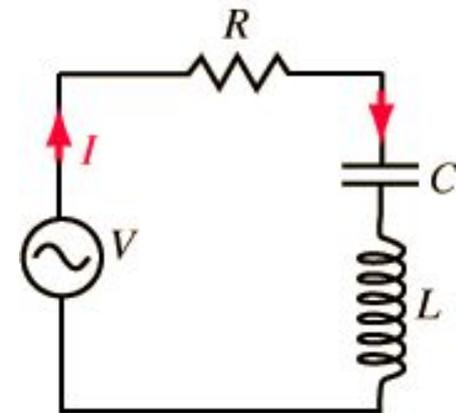
Вынужденные колебания

Вынужденными называются колебания, возникающие в физической системе под действием периодически изменяющегося внешнего воздействия.

Вынужденные механические колебания возникают под действием периодически изменяющейся внешней силы.



Вынужденные электромагнитные колебания возникают при включении в электрическую цепь колебательного контура источника периодически изменяющейся ЭДС.



Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при гармоническом внешнем воздействии :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \varepsilon_{\max} \cos(\Omega t + \Phi_0) \quad , \quad (11.28)$$

где ε_{\max} , Ω и Φ_0 – максимальное значение, циклическая частота и начальная фаза внешнего воздействия, изменяющегося по гармоническому закону.

В установившемся режиме решение дифференциального уравнения (11.28) имеет вид

$$x(t) = A(\Omega) \cos[\Omega t + \varphi_0(\Phi_0, \Omega)] \quad . \quad (11.29)$$

При свободных гармонических колебаниях:

- а) колебания происходят с собственной частотой осциллятора, зависящей от его внутренних характеристик [например, для пружинного маятника $\omega=f(k,m)$];
- б) амплитуда и начальная фаза определяются результатом первоначального воздействия на осциллятор.

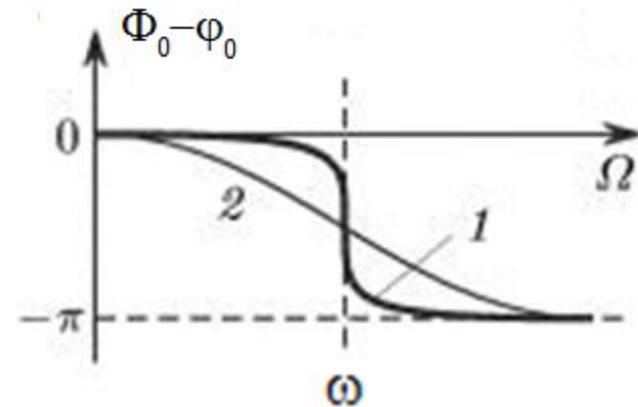
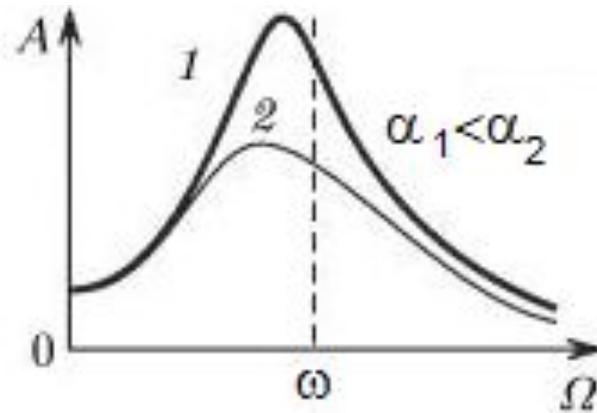
При вынужденных колебаниях:

- а) осциллятор совершает колебания с частотой изменения внешнего воздействия;
- б) амплитуда и начальная фаза определяются как особенностями внешнего воздействия, так и собственными характеристиками осциллятора:

$$A(\Omega) = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}, \quad (11.30)$$

$$\varphi_0(\Phi_0, \Omega) = \Phi_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\alpha\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}\right). \quad (11.31)$$

Графики зависимостей амплитуды и начальной фазы вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия



Резонанс - явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2\alpha^2} \quad . \quad (11.32)$$

Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе:

$$A_r = \frac{\varepsilon_{\max}}{2\alpha\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \quad . \quad (11.33)$$