

**Фриск Валерий Владимирович**

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

# **Лекция 1**

**( ТЭЦ -2, семестр 4 )**

**© В.В. Фриск, 2014**

# 4 семестр

- **Практ. зан.** (8 зан. по 2 б) = **16 б.**  
(-1 б. за пропуск занятия).
- **Лаб. раб** (8 защ. по 3 б) = **24 б.**  
(-1 б. за пропуск занятия).
- **Экстра баллы** = **30 б.**
- **Тест-экзамен** (на комп., 15 ТЗ по 2 б.) = **30 б.**
- **Всего 100 б.** (макс.)

# Границы оценок на экзамене

- **Студент защитил все лаб. работы.**
- **$\geq 35$  б. – автомат «**УДОВ.**»**
- **$< 35$  б. – экзамен на комп.**
  - **«2» = 0 - 12 б.**
  - **«3» = 13 - 18 б.**
  - **«4» = 19 - 24 б.**
  - **«5» = 25 - 30 б.**

# Лекция 1

- ✓ **Спектральное представление негармонических периодических сигналов**

# Частотный метод анализа колебаний в линейных ЭЦ

**Анализ** этим методом заключается в следующем.

- Даны **линейная** электрическая цепь и значения всех элементов.
- Требуется рассчитать **отклик** на **негармоническое** воздействие, путем применения тригонометрического **ряда** Фурье или **интеграла** Фурье.

# Жан Батист Жозеф Фурье



**Fourier**

- ❖ Французский математик, физик Фурье (1768-1830).
- ❖ Иностранный почетный член Петербургской АН

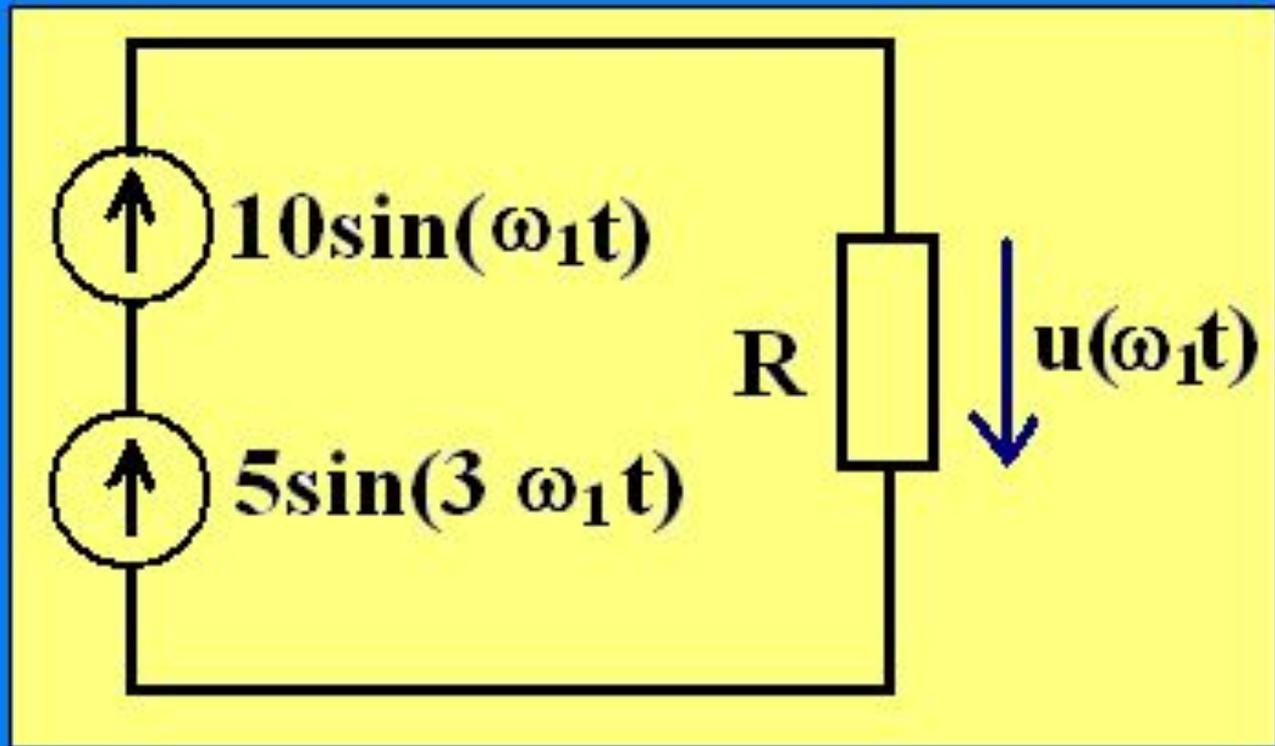
# Негармонический сигнал

- Все сигналы, отличные от гармонических, называются **негармоническими.**

# Анализ частотного состава колебаний

- Если к R-цепи последовательно присоединить **несколько** источников напряжения с **разными** амплитудами и начальными фазами, имеющих **кратные** частоты, то напряжение и ток в этой цепи окажутся несинусоидальными.

# Например



$$u(\omega_1 t) = 10 \cdot \sin(\omega_1 t) + 5 \cdot \sin(3\omega_1 t)$$

$$u(\omega_1 t) = 10 \cdot \sin(\omega_1 t) + 5 \cdot \sin(3\omega_1 t)$$



# Ряд Фурье и его сходимость

- Пусть функция  $f$  с периодом  $2\pi$ , интегрируемая на отрезке  $[0, 2\pi]$ .
- Тогда ей можно поставить в соответствие её **тригонометрический** ряд Фурье.
- Коэффициенты этого ряда называются коэффициентами Фурье и они вычисляются по **формулам** Эйлера-Фурье.

# Тригонометрический ряд Фурье

$$f(\omega_1 t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega_1 t) + B_k \sin(k\omega_1 t)],$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega_1 t) d(\omega_1 t), \quad \omega_1 t \in [0, 2\pi]$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega_1 t) \cos(k\omega_1 t) d(\omega_1 t),$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega_1 t) \sin(k\omega_1 t) d(\omega_1 t).$$

# Частичная сумма

$$f(\omega_1 t) \approx S(\omega_1 t, n) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n [A_k \cos(k\omega_1 t) + B_k \sin(k\omega_1 t)].$$

# Ряд Фурье по синусам

$$f(\omega_1 t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k)],$$

$$C_0 = A_0, C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2},$$

$$\psi_k = \operatorname{arctg} \left( \frac{A_k}{B_k} \right) \quad \text{при } A_k \geq 0, B_k > 0.$$

# Ряд Фурье по косинусам

$$f(\omega_1 t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)],$$

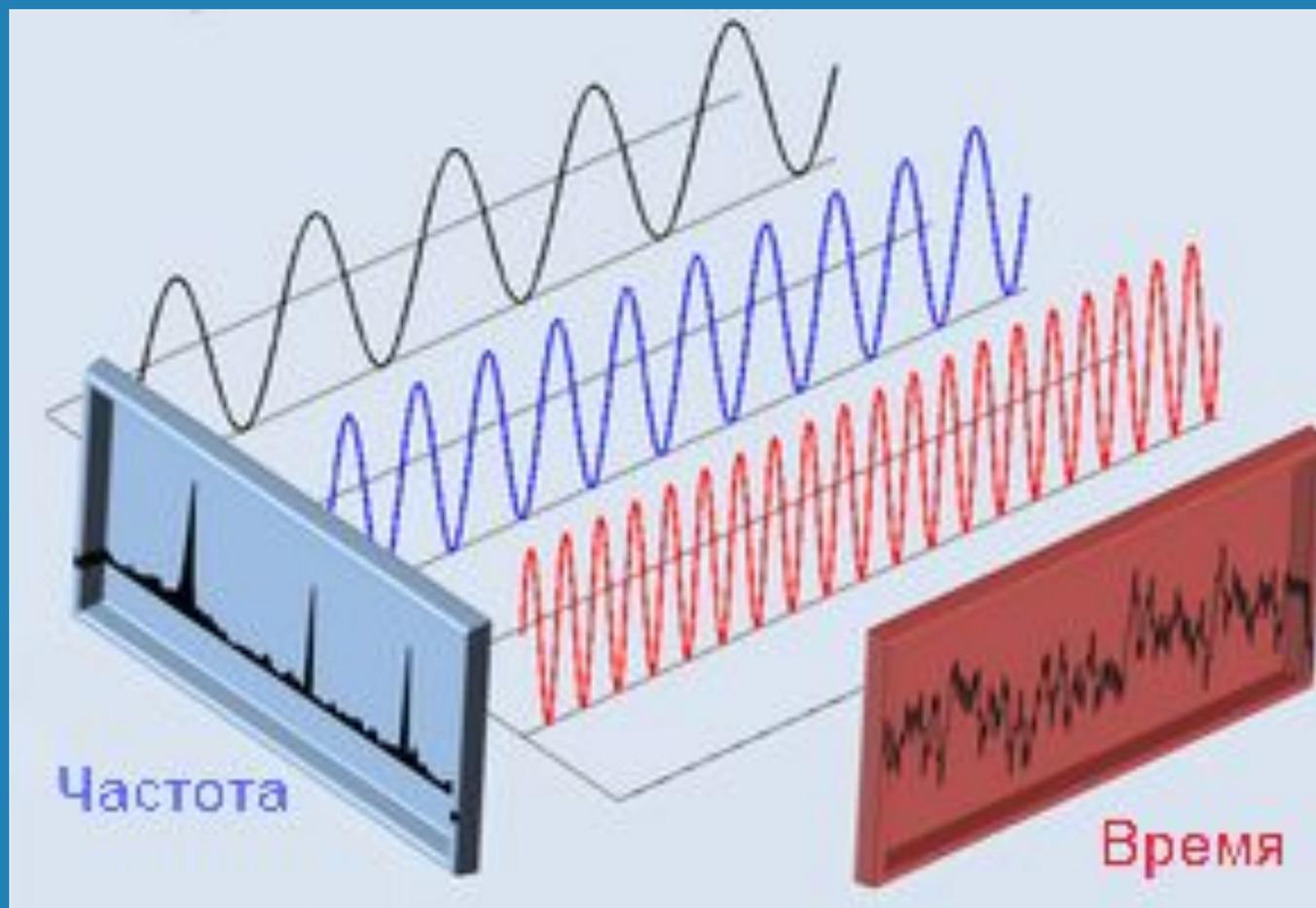
$$C_0 = A_0, C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2},$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \left( \frac{B_k}{A_k} \right) \quad \text{при } A_k > 0, B_k \geq 0.$$

# Спектр

- **Совокупность гармонических составляющих, на которые раскладывается сигнал называется спектром.**

# Частота и время



# Пусть сигнал дан в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned} u(\omega_1 t) = & U_0 + \\ & + U_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \\ & + U_{m2} \sin(2\omega_1 t + \psi_2) + \\ & + U_{m3} \sin(3\omega_1 t + \psi_3) + \dots \end{aligned}$$

# Где

- $U_0$  – постоянная составляющая (нулевая гармоника);
- $U_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1)$  – первая (основная) гармоника;
- $U_{m2} \sin(2 \omega_1 t + \psi_2)$  – вторая гармоника;
- $U_{m3} \sin(3 \omega_1 t + \psi_3)$  – третья гармоника и т. д.;

Где

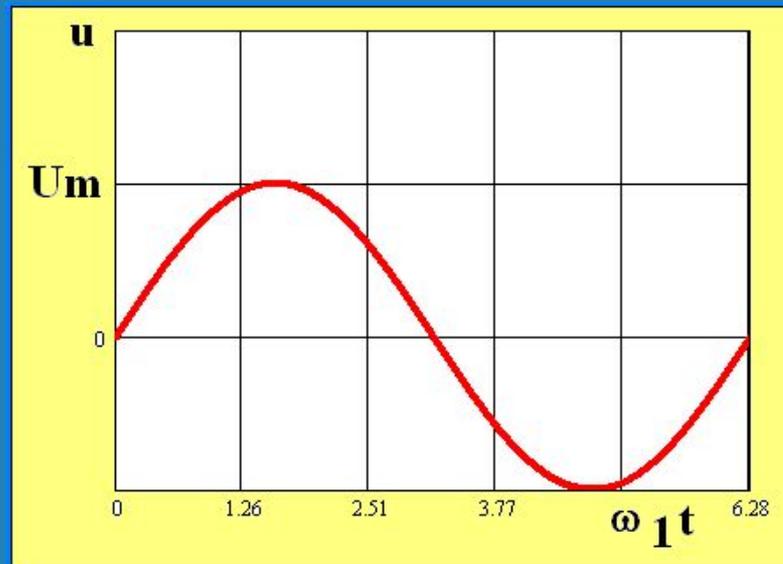
- $\omega_1 = 2\pi/T$  – **основная частота;**
- $T$  - **период сигнала;**
- $U_{m1}, U_{m2}, U_{m3}$  – **амплитуды гармоник;**
- $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  – **начальные фазы гармоник.**

# Спектральная диаграмма

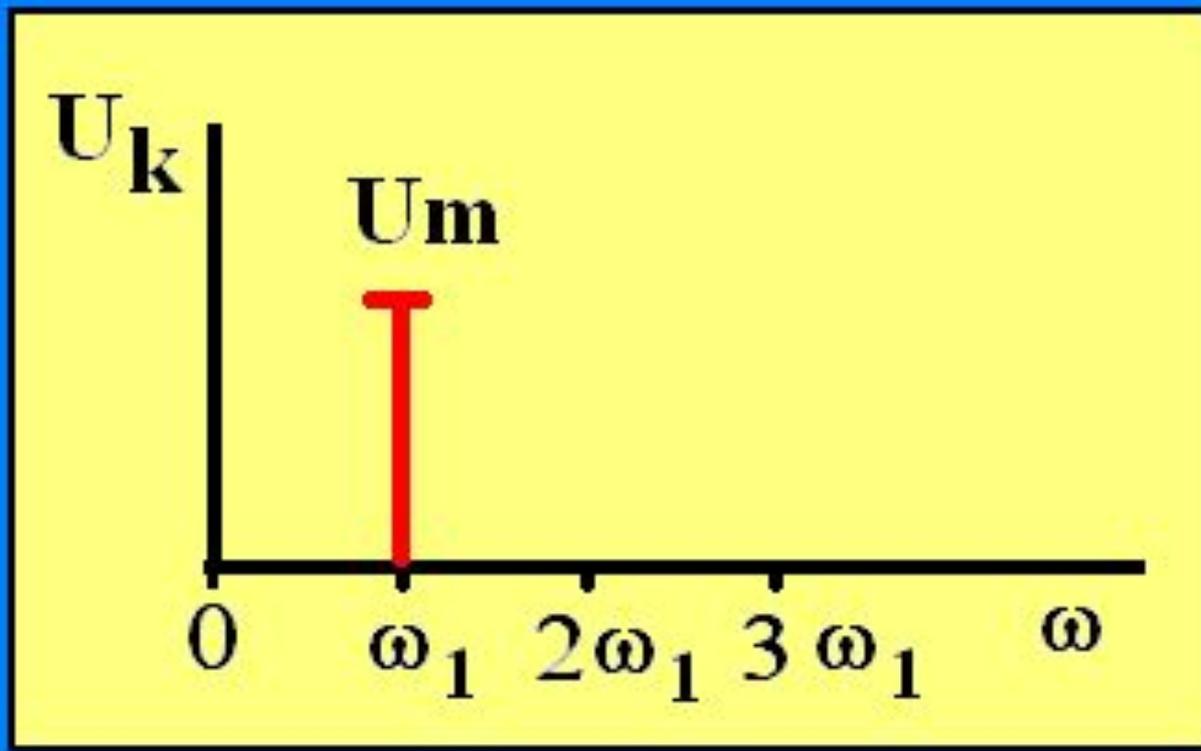
- **Амплитудные и фазовые спектры** строят в виде ряда отрезков **линий**, длины которых пропорциональны амплитудам или начальным фазам гармоник.

# Синусоидальный сигнал

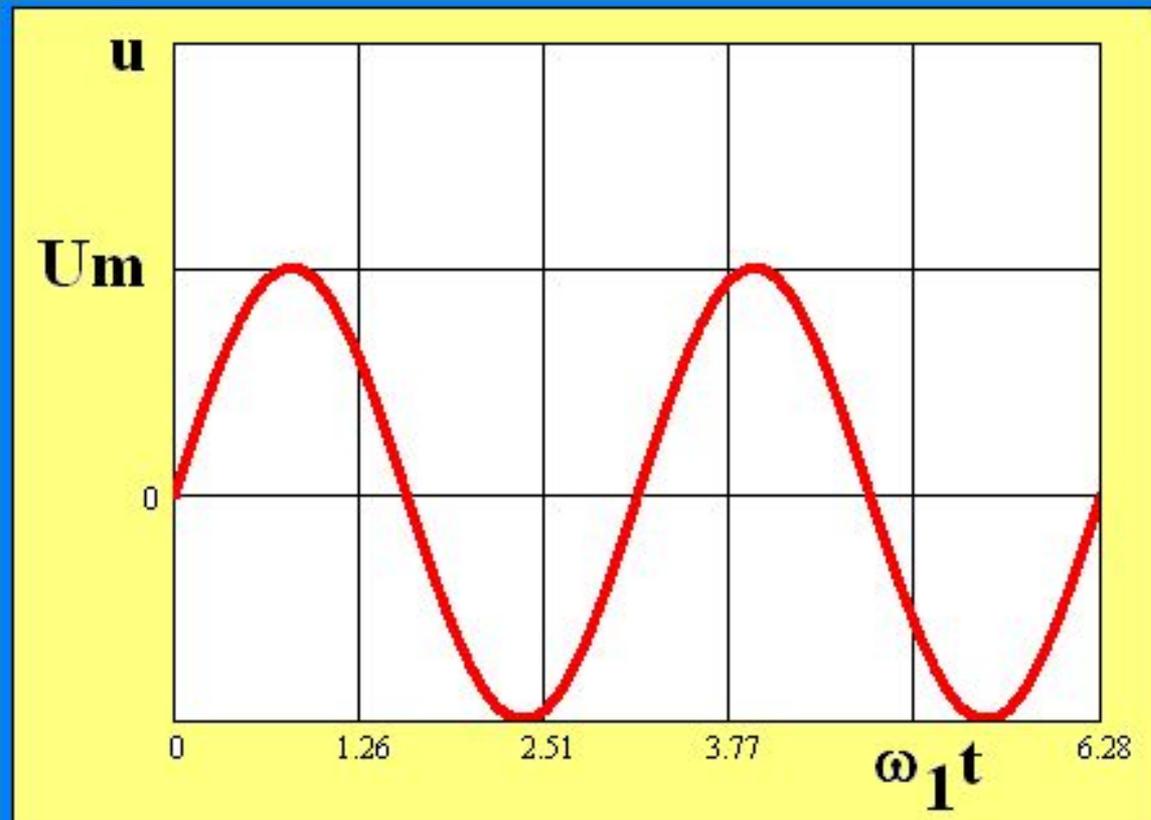
$$u(\omega_1 t) = U_m \sin(\omega_1 t)$$



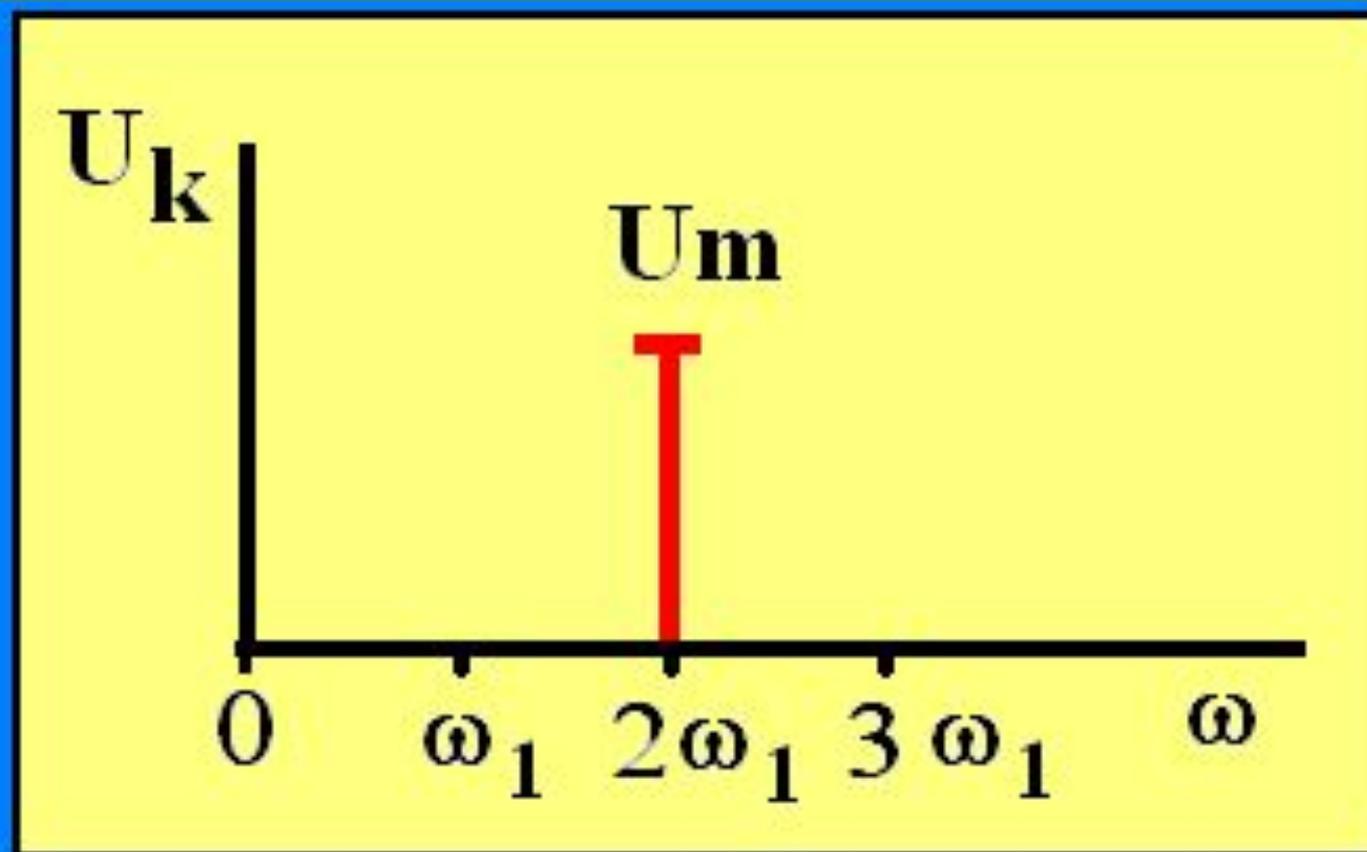
# Спектральная диаграмма синусоидального сигнала



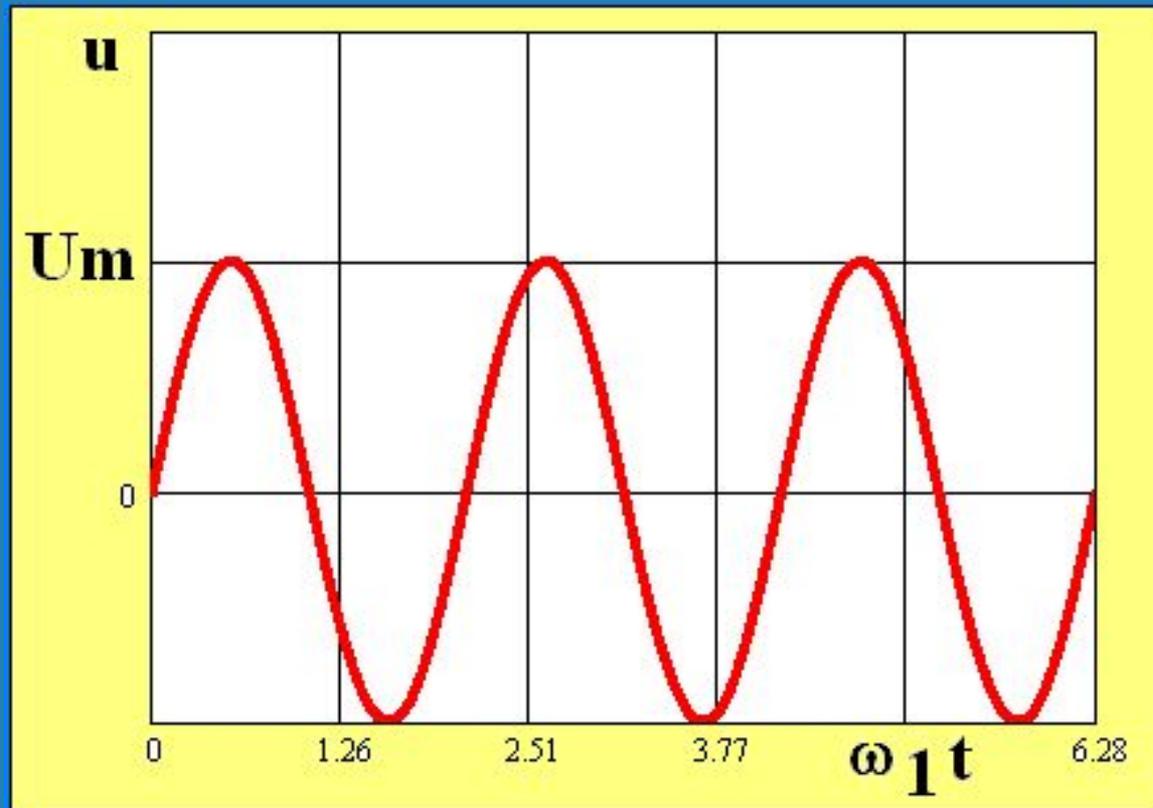
$$u(\omega_1 t) = U_m \sin(2\omega_1 t)$$



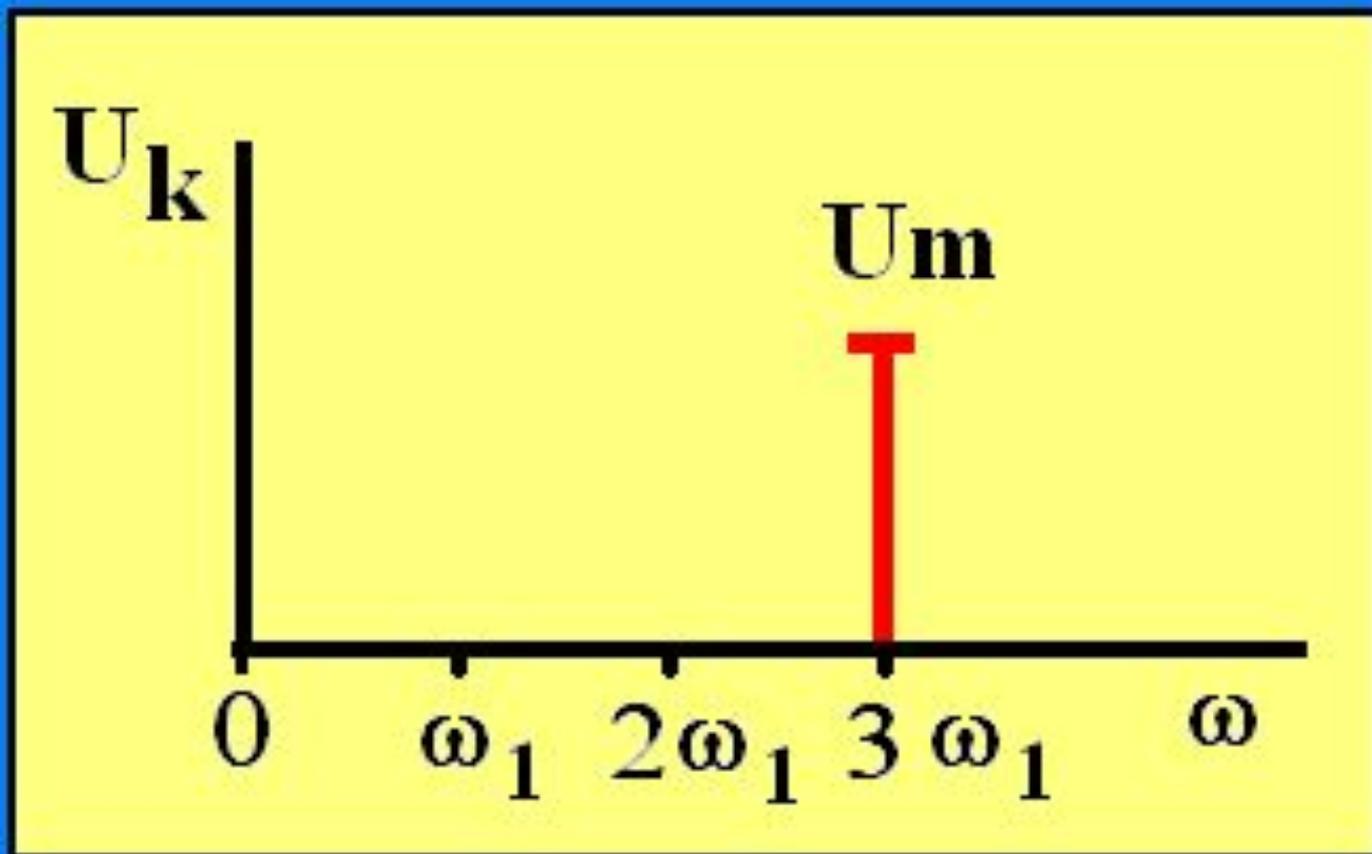
# Спектральная диаграмма синусоидального сигнала с удвоенной частотой



$$u(\omega_1 t) = U_m \sin(3\omega_1 t)$$



# Спектральная диаграмма синусоидального сигнала с утроенной частотой



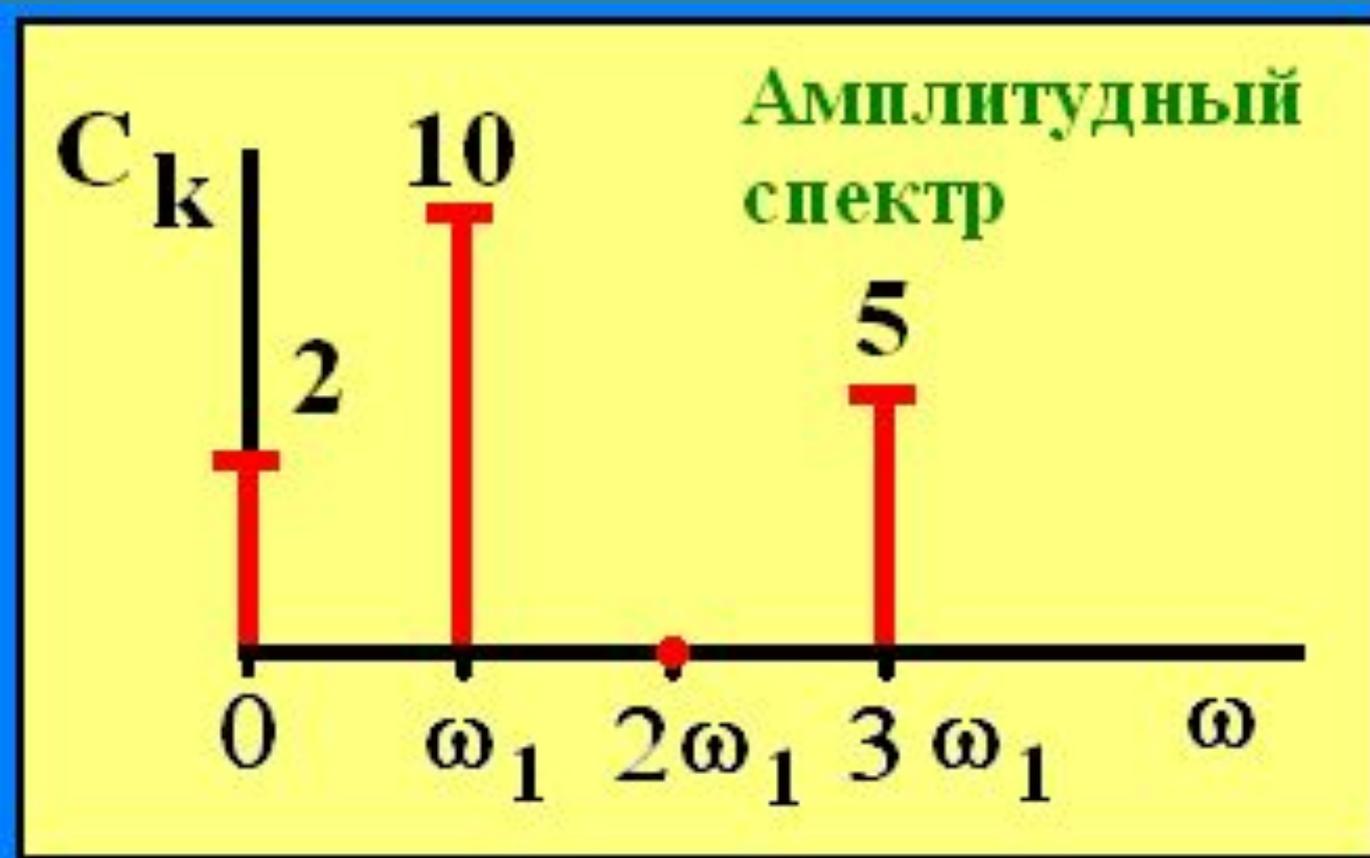
# Задача

Пусть сигнал задан в виде

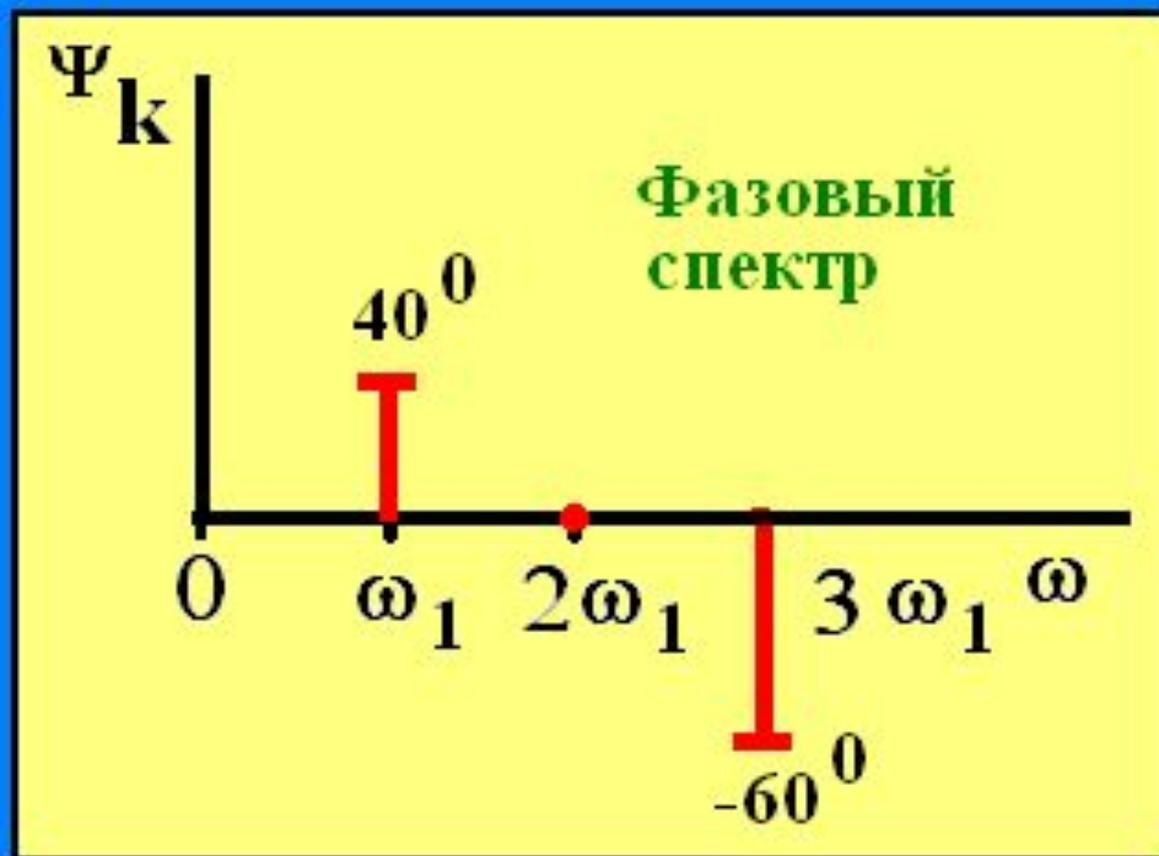
$$u(\omega_1 t) = 2 + 10 \sin(\omega_1 t + 40^\circ) + 5 \sin(3\omega_1 t - 60^\circ).$$

- Построить его **амплитудный и фазовый спектры**.

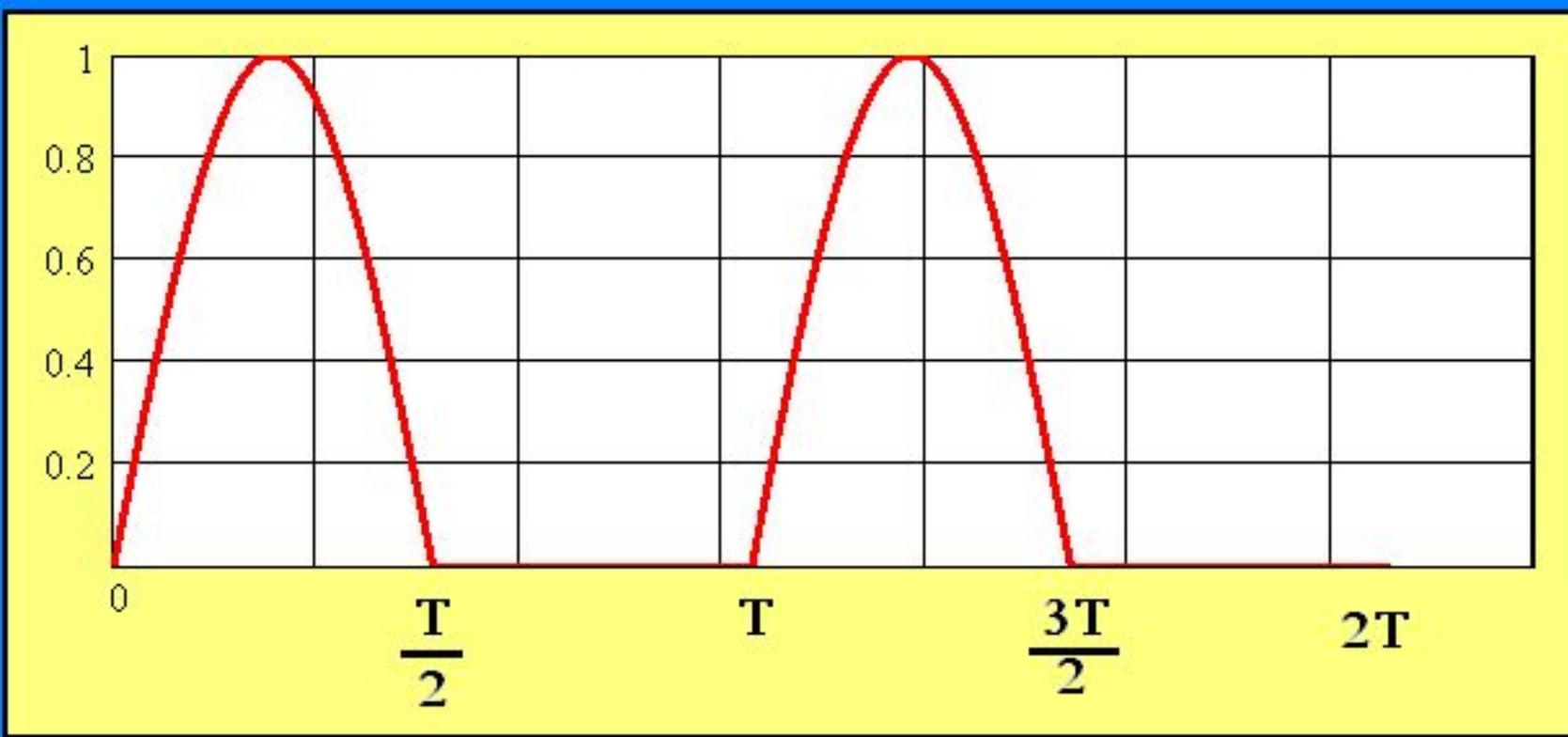
$$u(\omega_1 t) = 2 + 10 \sin(\omega_1 t + 40^\circ) + 5 \sin(3\omega_1 t - 60^\circ)$$



$$u(\omega_1 t) = 2 + 10 \sin(\omega_1 t + 40^\circ) + 5 \sin(3\omega_1 t - 60^\circ)$$



# Однополупериодный сигнал



# Аналитическое выражение

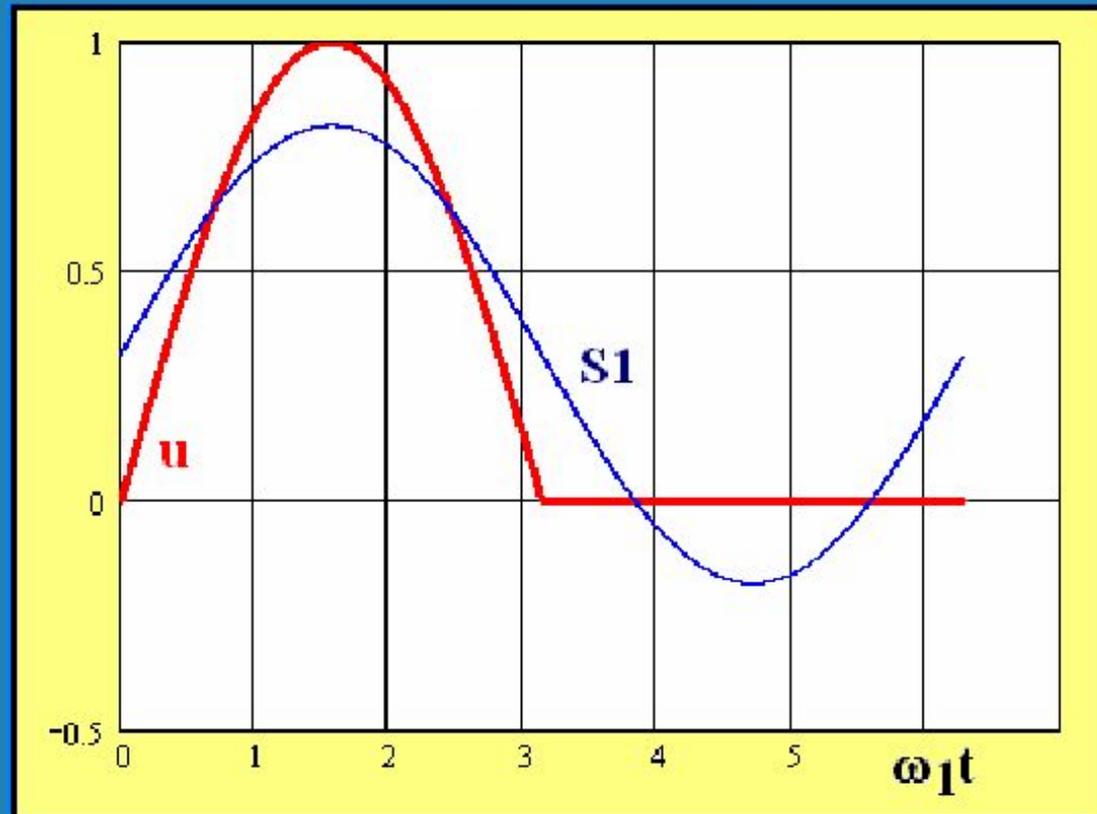
$$u(\omega_1 t) = \begin{cases} U_m \sin(\omega_1 t), & \omega_1 t \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & \omega_1 t \leq T \end{cases}$$

$$U_m = 1, T = 2\pi.$$

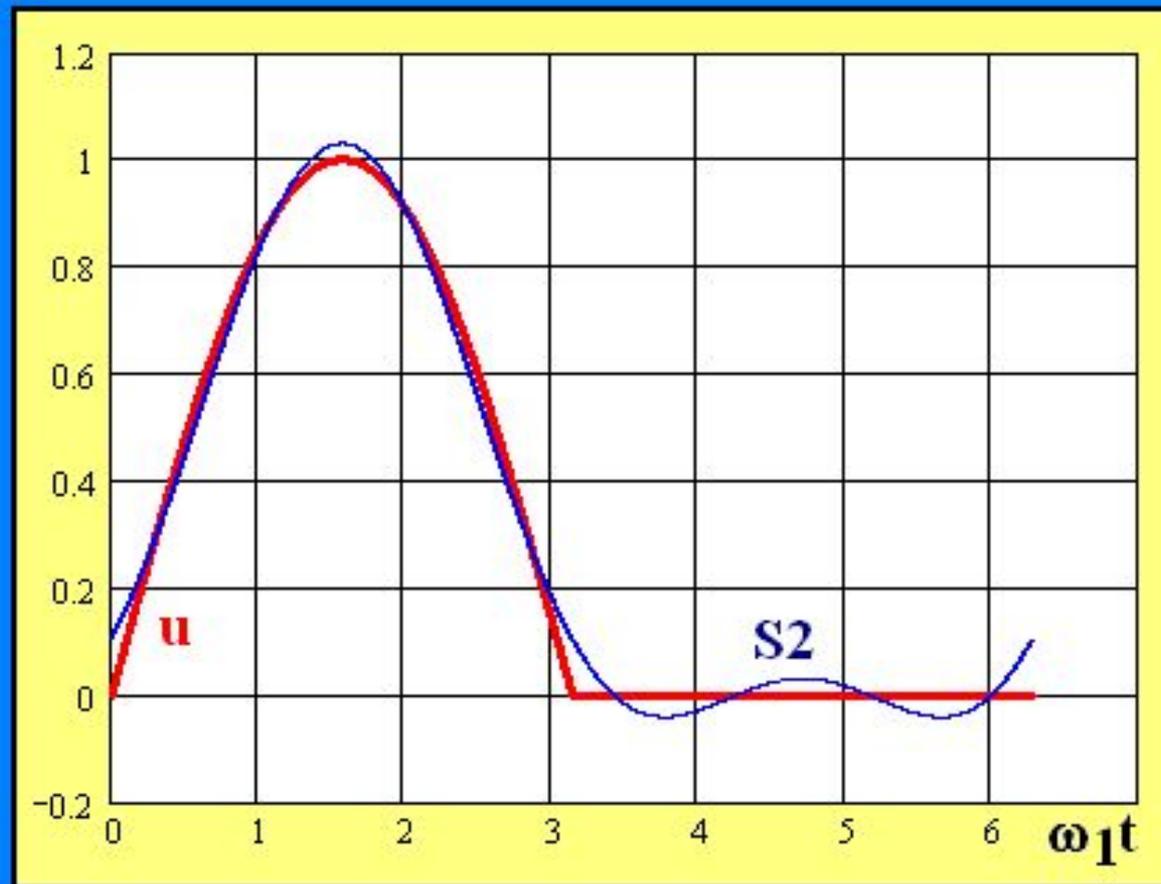
# Ряд Фурье однополупериодного сигнала

$$u(\omega_1 t) = \frac{U_m}{\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \sin(\omega_1 t) - \frac{2}{3} \cos(2\omega_1 t) - \frac{2}{15} \cos(4\omega_1 t) - \dots \right].$$

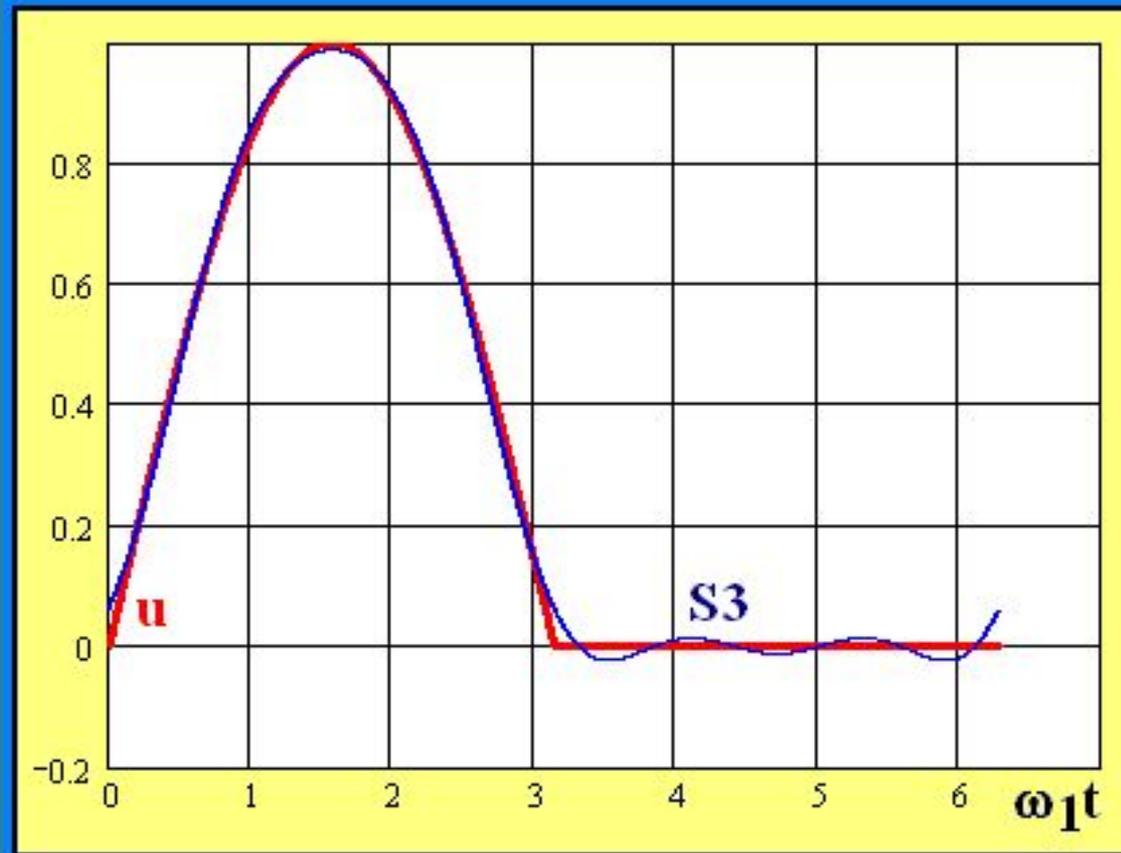
$$S(\omega_1 t, 1) = S_1(\omega_1 t) = \frac{U_m}{\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \sin(\omega_1 t) \right].$$



$$S(\omega_1 t, 2) = S_2(\omega_1 t) = \frac{U_m}{\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \sin(\omega_1 t) - \frac{2}{3} \cos(2\omega_1 t) \right].$$



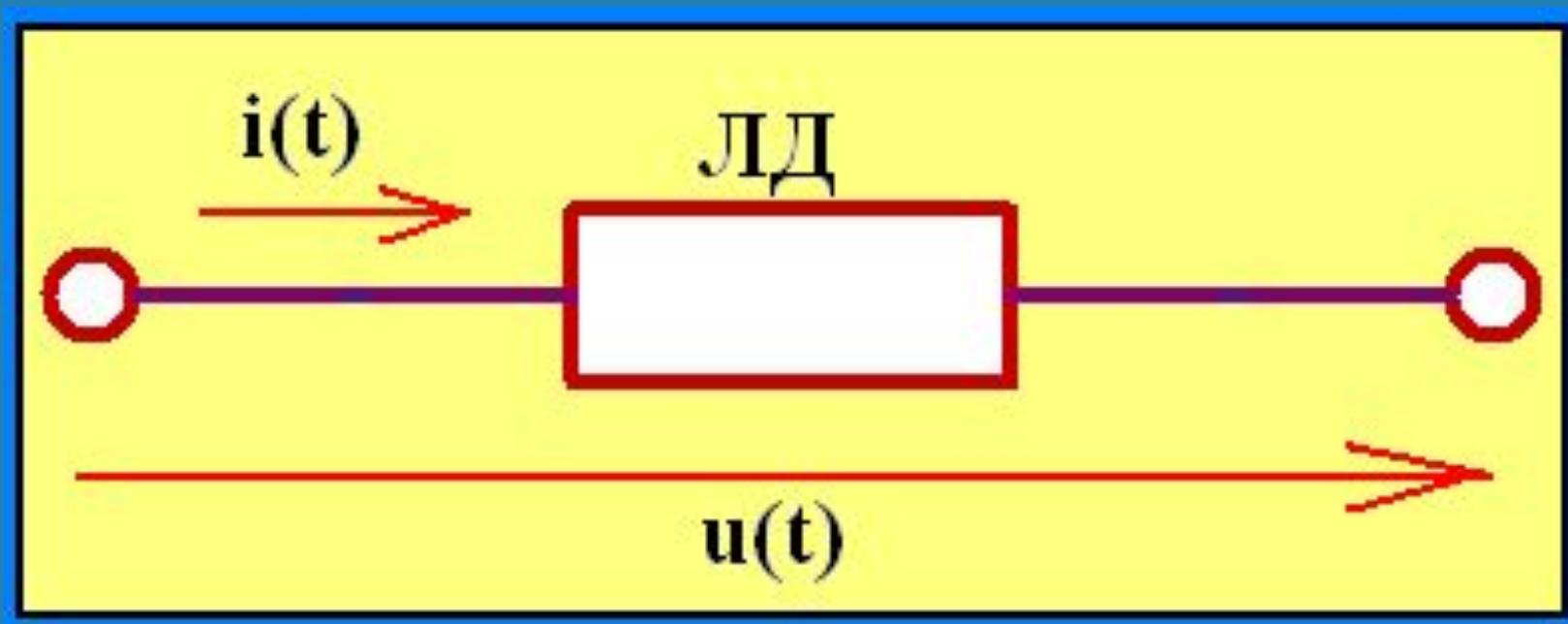
$$S(\omega_1 t, 3) = S_3(\omega_1 t) = \frac{U_m}{\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \sin(\omega_1 t) - \frac{2}{3} \cos(2\omega_1 t) - \frac{2}{15} \cos(4\omega_1 t) \right].$$



# Действующее значение

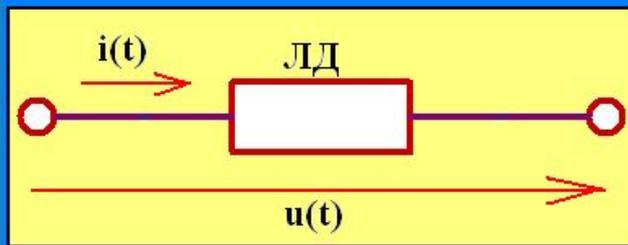
$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m1}^2}{2} + \frac{U_{m2}^2}{2} + \frac{U_{m3}^2}{2} + \dots}$$

# Мощность в цепи при негармоническом периодическом воздействии



# Пусть на входе линейного двухполюсника действует негармоническое периодическое напряжение

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_{u1}) + U_{m2} \sin(2\omega_1 t + \psi_{u2}) + \dots + U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_{uk}) + \dots, B$$



Входной ток представим в виде **ряда Фурье**

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_{i1}) + I_{m2} \sin(2\omega_1 t + \psi_{i2}) + \dots + I_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_{ik}) + \dots, A$$

# Средняя мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} I_{mk} \cos(\varphi_k),$$

$$\varphi_k = \psi_{uk} - \psi_{ik}.$$

Где

- **P** – средняя мощность, Вт;
- **$\varphi_k$**  – угол сдвига по фазе тока относительно напряжения k-й гармоники, рад.

# Вывод

**Средняя** мощность

равна сумме

**средних** мощностей

каждой гармоники

# Реактивная мощность

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} I_{mk} \sin(\varphi_k),$$

Где

- $Q$  – реактивная мощность, вар;
- $\varphi_k$  – угол сдвига по фазе тока относительно напряжения  $k$ -й гармоники, рад.

# Вывод

**Реактивная** мощность

равна сумме

**реактивных**

**мощностей каждой**

# Полная мощность

$$S = \sqrt{\left( \sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 \right)}$$

Где

- **S** – полная мощность, ВА;
- **U<sub>k</sub>** – действующее значение напряжения к-й гармоники, В;
- **I<sub>k</sub>** – действующее значение тока к-й гармоники, А.

# Коэффициент гармоник

**Коэффициент гармоник** - это отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению первой гармоники.

# Формула Кг

$$K_{\Gamma} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{U_1}.$$

# На практике ограничиваются n-гармониками

## THD - Total Harmonic Distortion

Коэффициент гармонических искажений

$$THD = 20 \lg \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^n U_{mk}^2}}{U_{m1}} \quad \text{дБ.}$$

# дБ (dB) по напряжению

$$60 \text{ dB} = 1000$$

$$40 \text{ dB} = 100$$

$$20 \text{ dB} = 10$$

$$0 \text{ dB} = 1$$

$$-20 \text{ dB} = 0,1$$

$$-40 \text{ dB} = 0,01$$

$$-60 \text{ dB} = 0,001$$

# Конец 1 лекции. ТЭЦ-2

