З Д Р А В С Т В У Й Т Е!

Сегодня: *

Лекция 25

Тема: Сложение гармонических колебаний

25.1. Способы представления гармонических колебаний;

25.2. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения;

25.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

25.1. Способы представления гармонических колебаний

а) аналитический: $x = a\sin(\omega t + \alpha)$

$$\upsilon = \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = \omega A\cos(\omega t + \varphi) = \upsilon_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{\mathbf{d}^2 x}{\mathbf{d}t^2} = -\omega^2 a\sin(\omega t + \varphi) = -a_m \sin(\omega t + \varphi)$$

б) графический:

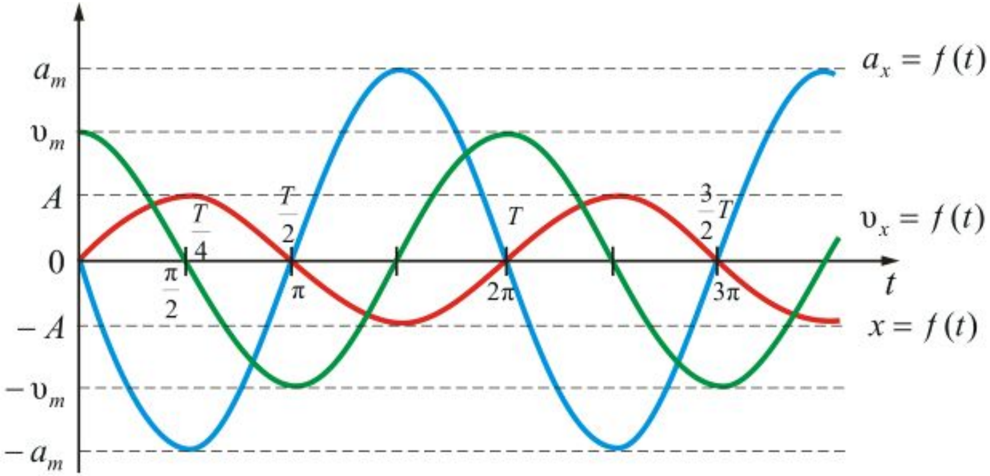


Рис. 25.1.

в) геометрический - с помощью вектора амплитуды. Возьмем ось, которую обозначим буквой *x* (рис.25.1). Из т.О, взятой на оси, под углом α проводим вектор длины a. Будем вращать вектор амплитуды с частотой ω_0 против часовой стрелки. Если смотреть сверху, то видно, что движение происходит по окружности.

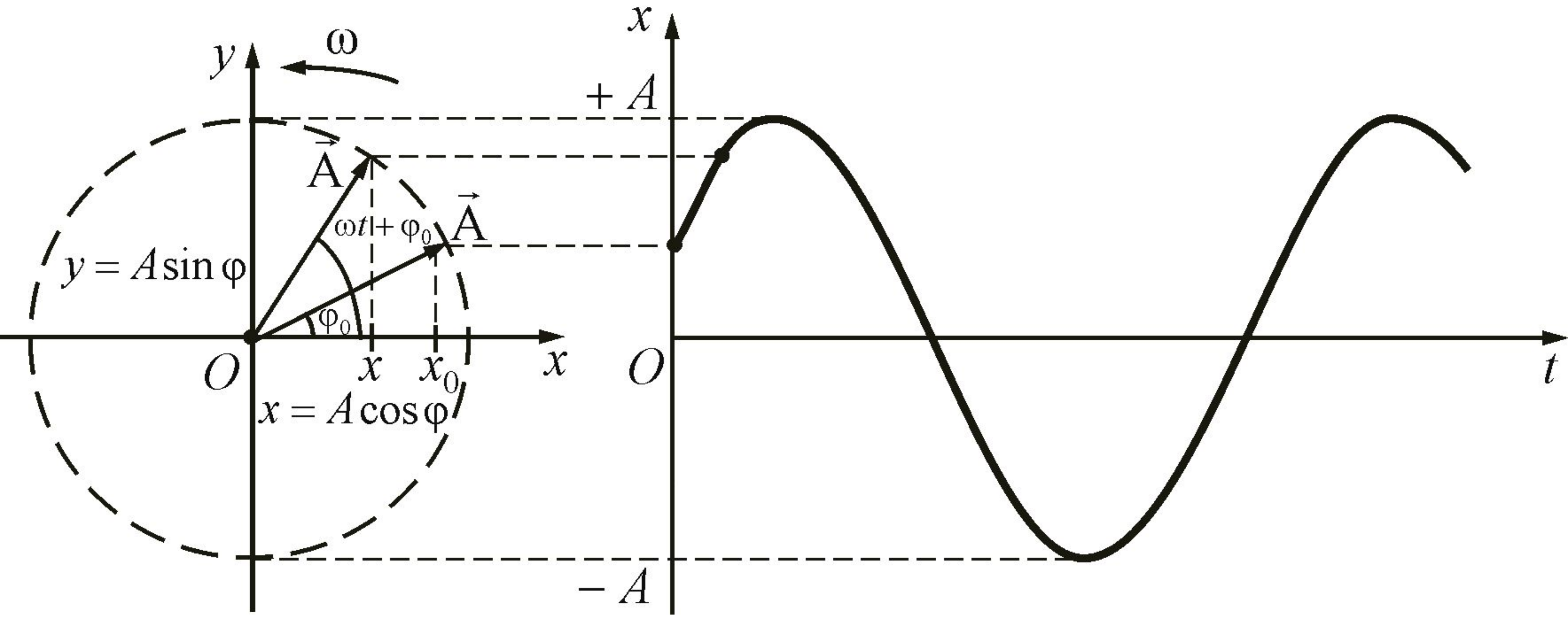


Рис. 25.2.

Но человек, который смотрит “в торец” стола, наблюдает колебательное движение туда и обратно, по существу, он наблюдает проекцию кругового движения на ось x. И это колебание проекции вектора амплитуды аналогично гармоническому колебанию. Мы можем записать $x = a\cos(\omega t + \alpha)$ для x-проекция вектора-амплитуды $\vec{a}$.

Следовательно, ***проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора, с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и с начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени.***

Из сказанного следует, что гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью *x* угол, равный начальной фазе колебания.

Проекция кругового движения на ось Y также совершает гармоническое колебание $y = a\sin(\omega t + \alpha)$. Т.о., равномерное движение по окружности можно рассматривать как два колебательных гармонических движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

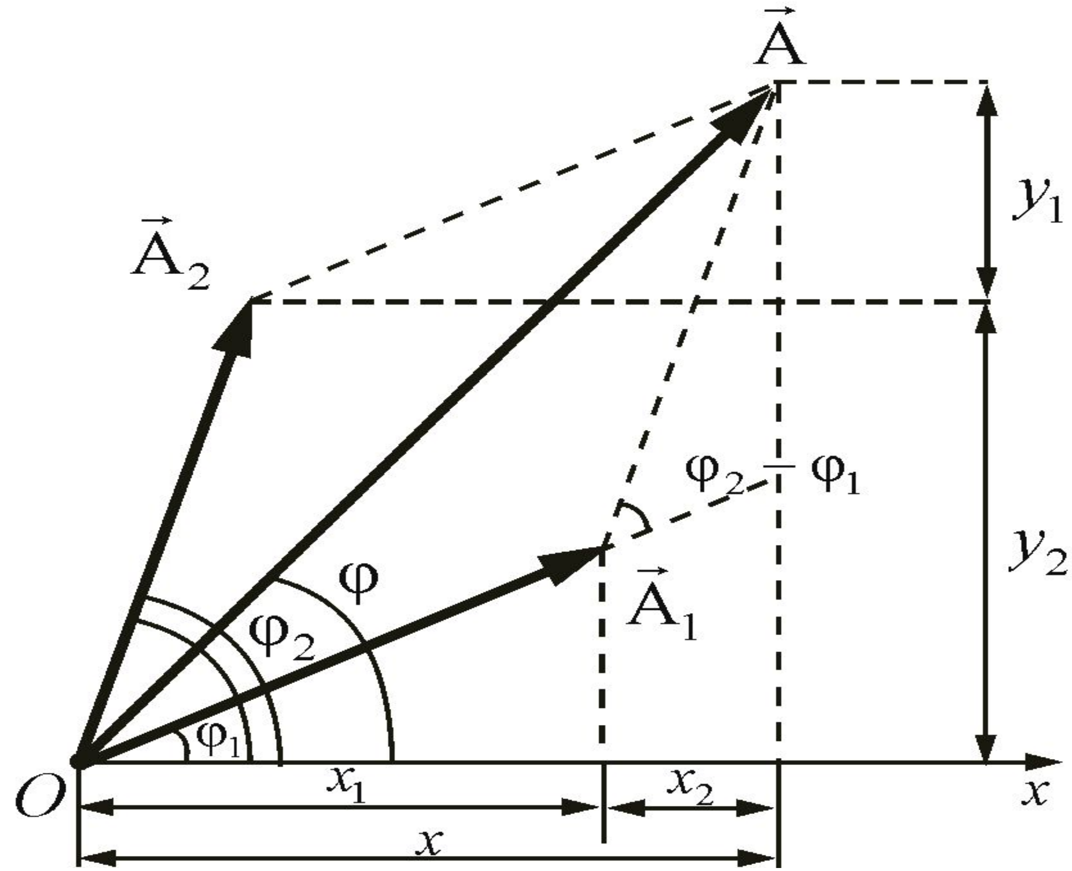
25.2. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения.

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_{25}, которые запишутся в следующим образом:

$$x_1 = a_1\cos(\omega t+\alpha_1),\ x_2 = a_2\cos(\omega t+\alpha_2).$$

Представим оба колебания с помощью векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\mathbf{a}$ (рис. 25.3).

Рис. 25.3.



Построим векторные диаграммы этих колебаний. Так как векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ вращаются с одинаковой круговой скоростью ω_0 , то разность фаз (α_2 - α_1) между ними остается постоянной. Очевидно, что уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_2 + x_1 = a\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (25.1)$$

В выражении (25.1) амплитуда a и начальная фаза α соответственно задаются соотношениями

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$\mathrm{tg}\alpha = (a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2)/(a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2). \quad (25.2)$$

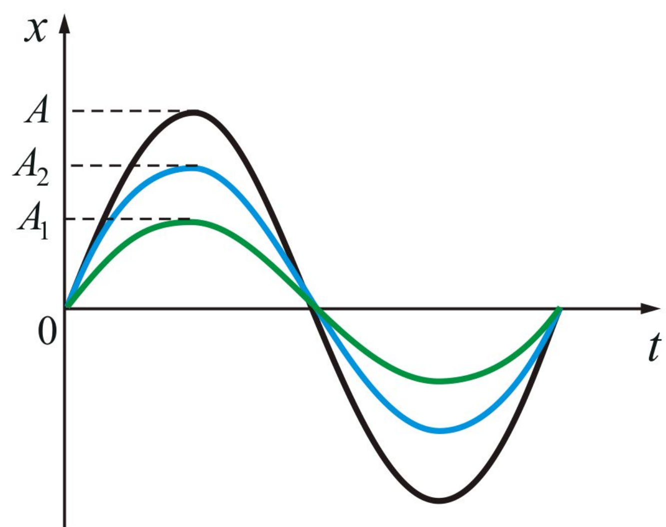
Т.о., тело, участвуя одновременно в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершают гармонические колебания в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний.

Проанализируем выражение (25.2) в зависимости от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$:

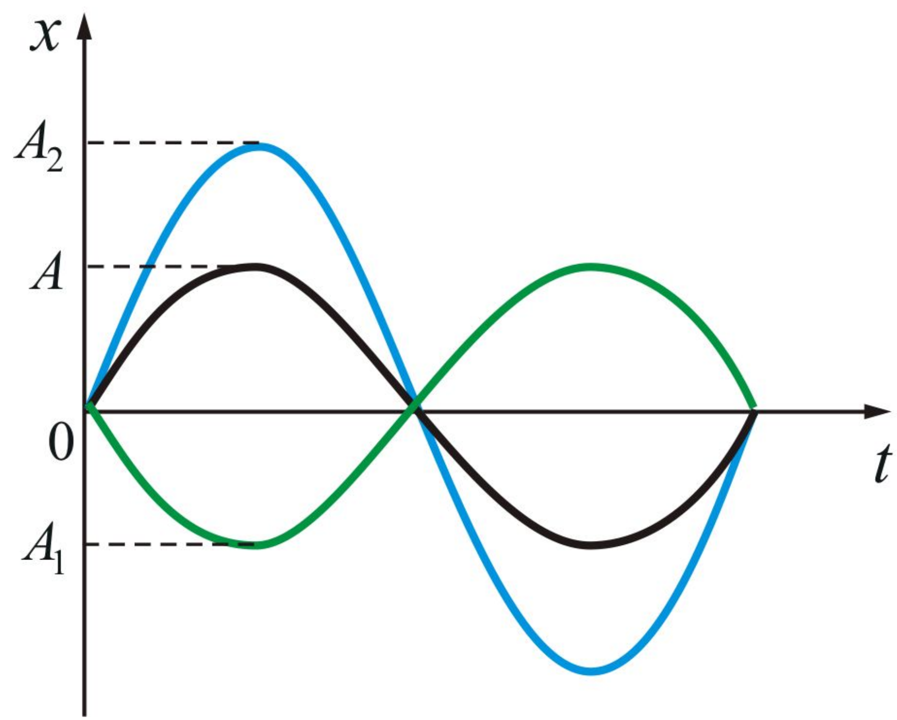
1. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ тогда $a = a_1 + a_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания a равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

колебания *синфазны*



2. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) тогда $a = |a_1 - a_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания a равна разности амплитуд складываемых колебаний.

колебания в *противофазе*



Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются БИЕНИЯМИ.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны a, а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выбираем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид:

$$x_1 = a\cos\omega t, \qquad x_2 = a\cos(\omega+\Delta\omega)t.$$

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$x = a(\cos\omega t + \cos(\omega+\Delta\omega)t = (2a\cos\Delta\omega/2t)\cos\omega t, \qquad (25.3)$$

Во втором сомножителе мы пренебрегли $\Delta\omega/2$, т.к. $\Delta\omega/2 \ll \omega$

Результирующее колебание (25.3) можно рассматривать как гармоническое с частотой ω, амплитуда $a_б$ которого изменяется по следующему периодическому закону

$$a_б = |2a\cos\Delta\omega/2t\,|, \qquad (25.4)$$

$$x = (2a\cos\Delta\omega/2t)\cos\omega t$$

График функции (25.3) изображен на рис. 25.4.

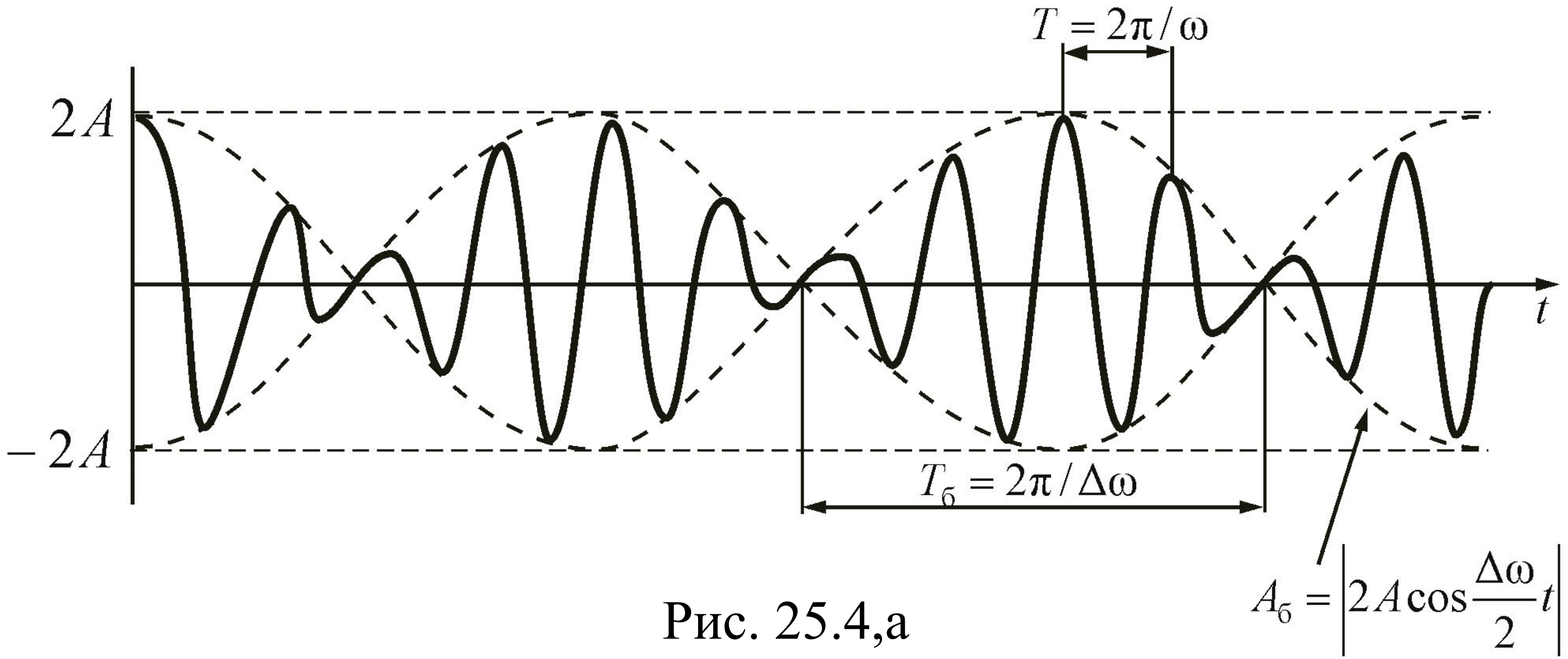


Рис. 25.4,а

Заключенный в скобки множитель в формуле (25.3) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Ввиду условия **$\Delta\omega/2 \ll \omega$** за то время, за которое множитель $\cos\omega t$

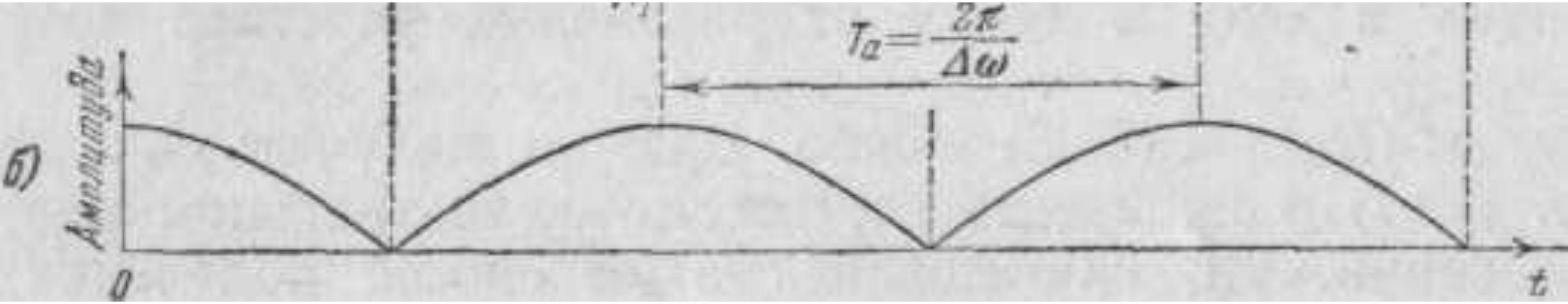


Рис. 25.4,б

совершает несколько полных колебаний, множитель, стоящий в скобках, почти не изменится. Это дает нам основание рассматривать колебание (25.3) как гармоническое колебание частоты **ω**, амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель, стоящий в скобках, т.к. он изменяется в пределах от $-2a$ до $+\mathbf{2a}$, в то время как амплитуда по определению – положительная величина. График амплитуды показан на рис 25.4,*б.* Аналитическое выражение для амплитуды, очевидно, имеет вид (25.4).

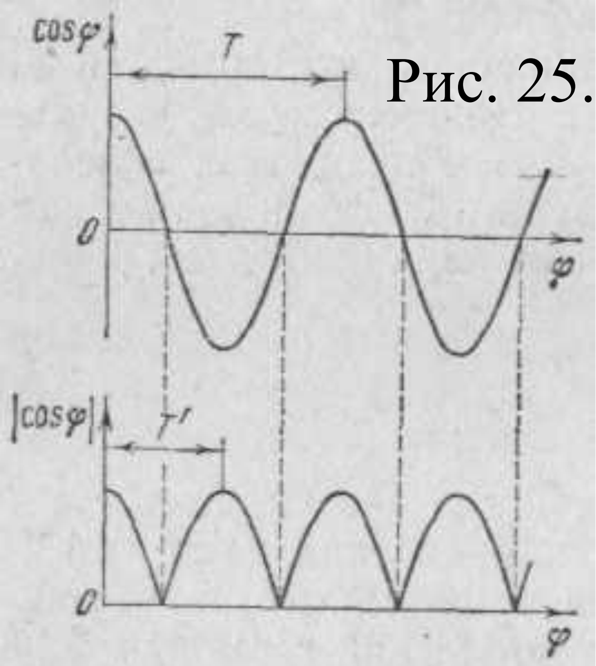


Рис. 25.5

Функция (25.4) – периодическая функция с частотой, в 2 раза превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля (см. рис. 25.5., на котором сопоставлены графики косинуса и его модуля), т.е. с частотой **$\Delta\omega$.** Т.о., частота пульсаций амплитуды – её называют частотой биений – равна разности частот складываемых колебаний.

Отметим, что множитель **$2a\cos\Delta\omega/2t$** не только определяет амплитуду, но и влияет на фазу колебания. Это проявляется, например, в том, что отклонения, соответствующие соседним максимумам амплитуды, имеют противоположные знаки (см. точки M_1 и M_{25} на рис. 25.4,*а*).

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями - наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т.д.

Любые сложные периодические колебания $S = f(t)$ можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами кратными циклической частоте ω_0:

$$S(t)=f(t)=a_0/2+a_1\cos(\omega_0 t+\phi)+a_2\cos(2\omega_0 t+\phi_2)+..+a_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n) \quad (25.5)$$

Представление периодической функции в виде (25.5) связывают с понятием ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СЛОЖНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ, ИЛИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУРЬЕ. Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, . . ., называются ПЕРВОЙ (ИЛИ ОСНОВНОЙ), второй, третьей и т.д. ГАРМОНИКАМИ сложного

25.3. Модулированные колебания

1. Найдем результат сложения трех гармонических колебаний: $s_1 = A\cos\omega t$, $s_2 = a\cos(\omega + \Omega)t$, $s_3 = a\cos(\omega - \Omega)t$. (25.3.1)

Учитывая, что $\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t = 2\cos\omega t\cos\Omega t$, получим после элементарных преобразований

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = A(1 + (2a/A)\cos\Omega t)\cos\omega t. \qquad (25.3.2)$$

Если положить, что $\Omega \ll \omega$, а $k = 2a/A < 1$, то график колебания будет иметь вид, изображенный на рис. 25.6.

2. Как видно из рисунка, и в этом случае колебание можно рассматривать как «почти синусоидальное» колебание с «переменной амплитудой»

$$B = A(1 + k\cos\Omega t) \qquad (25.3.3)$$

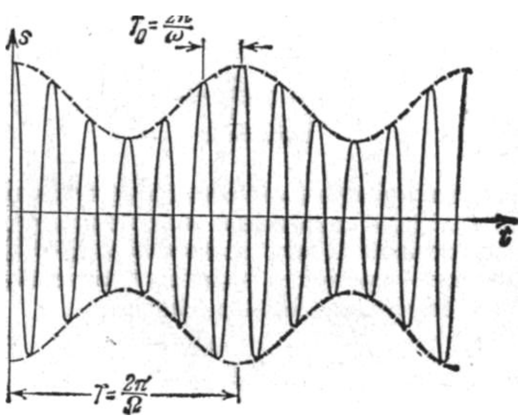


Рис. 25.6

и с «условным периодом»

$$T_0 = 2\pi/\omega. \quad (25.3.4)$$

Период изменения «амплитуды»

$$T = 2\pi/\Omega. \quad (25.3.5)$$

Так как по условию $\Omega << \omega$, то $T >> T_0$.

3. Колебания, изображенные на рис. 25.6, называются *модулированными.* Вообще модулированными называются «почти синусоидальные» колебания, происходящие с высокой частотой ω, «амплитуда» которых медленно меняется с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Высокая частота ω называется *несущей частотой,* низкая частота Ω —*частотой модуляции,* коэффициент k — *глубиной модуляции.* Модулированные колебания применяются в радиотехнике для передачи звука или изображения с помощью электромагнитных волн. Здесь модуляция производится не синусоидальным, а более сложным сигналом.

25.4. Сложение колебаний с кратными частотами

1. Попытаемся выяснить характер результирующего колебания, возникающего при сложении двух или нескольких гармонических колебаний с кратными частотами. Для примера рассмотрим сложение, двух колебаний с круговыми частотами $\omega_1 = \omega$ и $\omega_2 = 3\omega$ и амплитудами $A_1 = A$ и $A_2 = A/2$: $s_1 = A\cos\,\omega t$, $s_2 = (A/2)\sin\,3\,\omega t$. (25.4.1)

Колебание с минимальной частотой называется *первой гармоникой* (в акустике — основным тоном); колебания с кратными частотами называются *высшими гармониками* (в акустике — обертонами, от немецкого *ober* — *верхний*).

2. Сложение колебаний выполним графически. Для этого следует построить графики слагаемых колебаний, затем измерить для каждого момента времени значения смещений s_1 и s_2 и сложить их, пользуясь общим правилом сложения перемещений, т. е. с учетом знака. Как видно из рис. 25.7, в результате сложения гармонических колебаний с кратными частотами возникает *периодическое несинусоидальное колебание.* Период сложного колебания совпадает с периодом основного тона (первой гармоники).

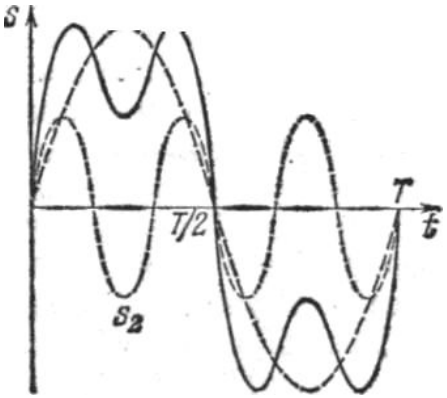


Рис. 25.7

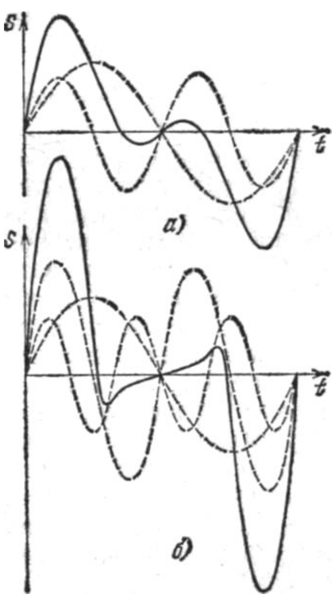


Рис. 25.8.

О частоте сложного колебания вообще нельзя говорить — несинусоидальному колебанию соответствует не одна частота, а набор частот; понятие «частота» имеет смысл только для гармонического колебания.

3. Особенности несинусоидального колебания характеризуются формой его графика, а это, в свою очередь, определяется числом гармоник и соотношениями между их амплитудами, частотами и фазами. Подобрав соответствующие гармоники, можно получить колебания, графики которых будут иметь форму практически любой периодической кривой. Для примера на рис. 25.8 изображены графики колебаний, имеющих один и тот же основной тон, но разные гармоники:

а) $s_1 = 2\sin \omega t + 1{,}5\sin 2\omega t$,

б) $s_2 = 2\sin\omega t + 3\sin 2\omega t + 1{,}5\sin 3\omega t$. (25.4.2).

25.5. Разложение Фурье. Спектр

1. В предыдущих параграфах на ряде примеров было показано, что при сложении гармонических колебаний с различными частотами получается несинусоидальное колебание. Возникает вопрос о возможности обратного процесса: существует ли метод, позволяющий разложить некоторое несинусоидальное колебание на слагаемые гармоники? Метод такого разложения предложил в начале XIX в. Жан Фурьё. Он показал, что любая периодическая функция $f(t)$ с периодом T может быть разложена на слагаемые гармоники:

$$f(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t + \varphi_1) + a_2\cos(2\omega t + \varphi_2) + a_3\cos(3\omega t + \varphi_3) + \ldots \quad (25.5.1)$$

Здесь $\omega=2\pi/T$, а амплитуды и фазы можно вычислить по определенным правилам, которые излагаются в курсах высшей математики. Выражение (25.5.1) называется разложением функции $f(t)$ в *ряд Фурье* или просто *разложением Фурье.*

Обычно амплитуды довольно быстро убывают с ростом номера гармоники, и на практике можно ограничиться лишь несколькими первыми слагаемыми разложения Фурье.

2. Во многих задачах физики играют роль только амплитуды гармоник, а их фазы, хотя они влияют на форму сложного колебания, оказываются несущественными. Так обстоит, например, дело в том случае, когда нас интересуют не столько сами гармоники, сколько их энергии, которые зависят только от амплитуды и частоты и не зависят от фазы. В этом случае нас будут будут интересовать

лишь частоты слагаемых колебаний и амплитуды, соответствующие этим частотам. Разложение несинусоидального колебания на синусоидальные гармоники (без учета их фаз) называется *спектральным разложением*. Диаграмма, изображающая зависимость амплитуды каждой гармоники от ее частоты, называется *спектром* несинусоидального колебания.

На рис. 25.9 изображены спектры колебаний, разложение которых в ряд Фурье выражается формулами (25.5.1), а графики изображены на рис.25.9. Буквами а и б на рисунках и в формулах обозначены одинаковые колебания. Рекомендуем читателю построить спектр модулированного колебания и биений. Заметим, что знание спектра некоторого несинусоидального колебания еще не позволяет определить форму этого колебания и построить его график. Однако часто это и не нужно. В отличие от осциллографа, который реагирует на мгновенные значения исследуемого колебания, регистрирующая аппаратура, часто применяемая при исследовании колебательных процессов, является весьма инерционной.

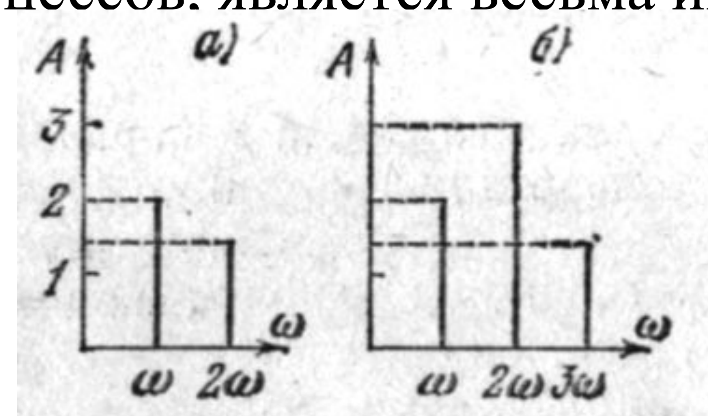


Рис.25.9

Поэтому данные приборы реагируют лишь на изменения среднего значения энергии за промежуток времени, значительно превосходящий период колебаний. В этом случае знание спектра оказывается вполне достаточным, ибо с его помощью можно определить энергию каждой гармоники и тем самым — среднюю энергию суммарного колебания. Именно поэтому спектральное разложение играет исключительно важную роль в учении о колебаниях.