Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Тема 7

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА ОТРЕЗКЕ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Определение 1:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $\boldsymbol{x_0}$, если она определена в этой точке и её предел в ней равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Запись через односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Определение 2:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $\boldsymbol{x_0}$, если она определена в некоторой её окрестности и

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x : |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Обозначения:

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции

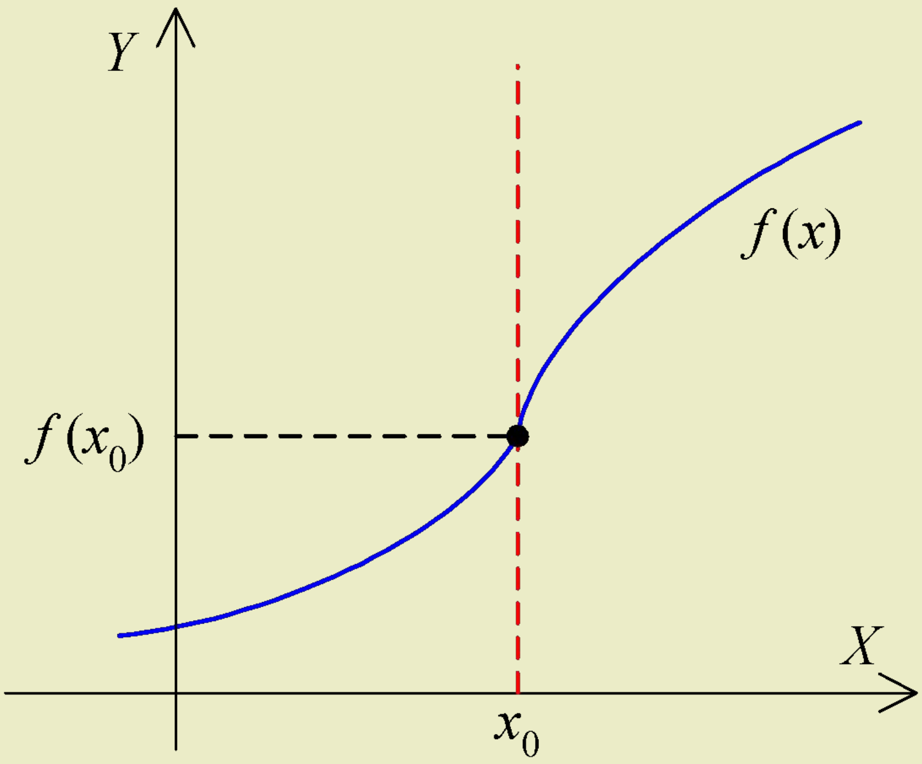
Определение 3:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $\boldsymbol{x_0}$, если её приращение в этой точке есть бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Графическая интерпретация:



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2. Если функция непрерывная в точке x_0, то существует некоторая окрестность $U(x_0)$, в которой функция имеет такой же знак, как и $f(x_0)$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции:

$$f(x)+g(x)$$

$$f(x)\cdot g(x)$$

$$f(x)/g(x)$$

тоже непрерывны в точке x_0

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Свойства функций, непрерывных в точке

4. Непрерывность сложной функции

Пусть функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ является непрерывной в точке x_0.

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \sigma > 0, \quad \forall y : |\, y - y_0 \,| < \sigma, \quad |\, f(y) - f(y_0) \,| < \varepsilon$$

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x : |\, x - x_0 \,| < \delta \Rightarrow \quad |\, g(x) - g(x_0) \,| < \sigma$$

Следовательно,

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x : |\, x - x_0 \,| < \delta \Rightarrow \quad \left| f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) \right| < \varepsilon$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Свойства функций, непрерывных в точке

4. Непрерывность сложной функции: Следствие

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(g(x_0))$$

Таким образом, знак предела и знак непрерывной функции можно менять местами.

Метод замены переменной для пределов непрерывных функций:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y), \quad y = g(x).$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Пример 3:

Установить непрерывность или разрывность функции

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le -1; \\ x^2+2, & -1<x\le 1; \\ 2x, & x>1. \end{cases}$$

Решение:

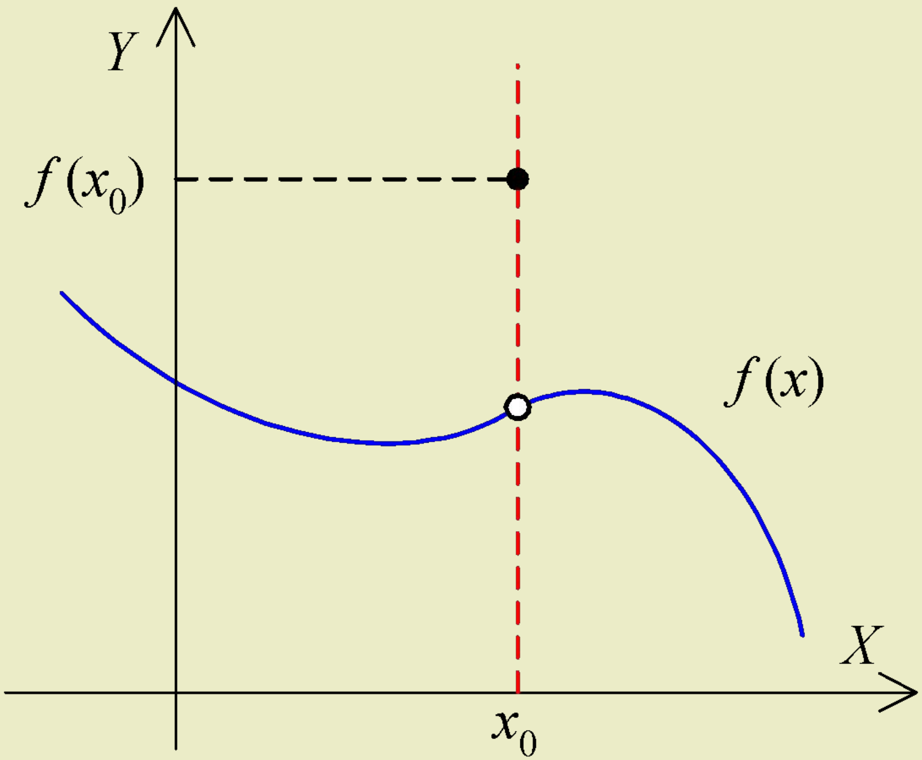
Ответ:

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Классификация точек разрыва

1. Устранимый разрыв

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

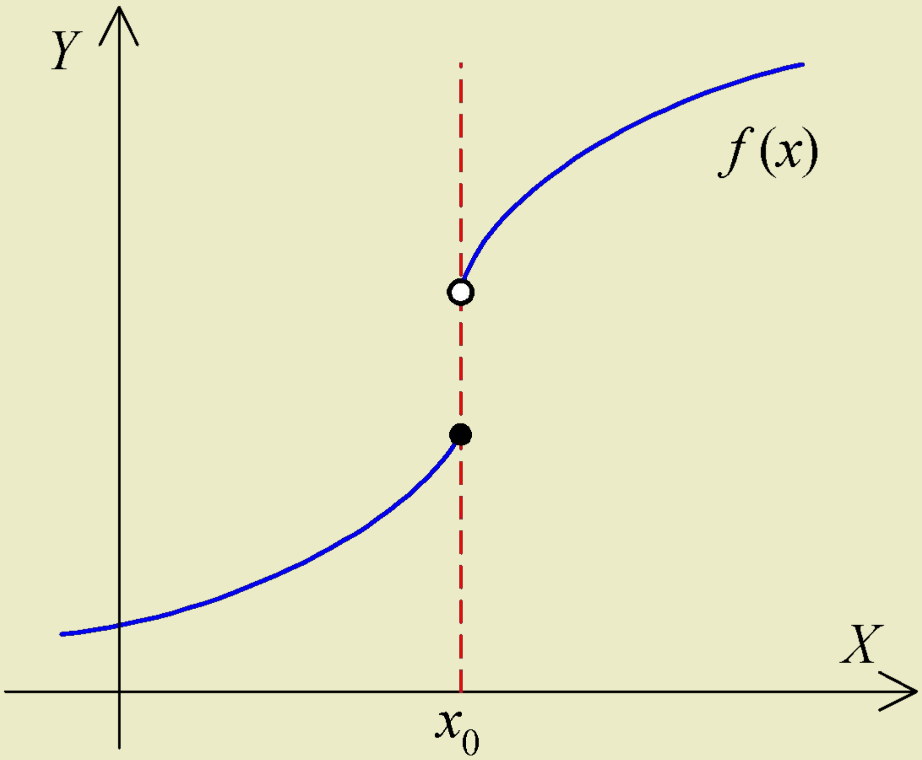


Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Классификация точек разрыва

2. Разрыв 1-го рода

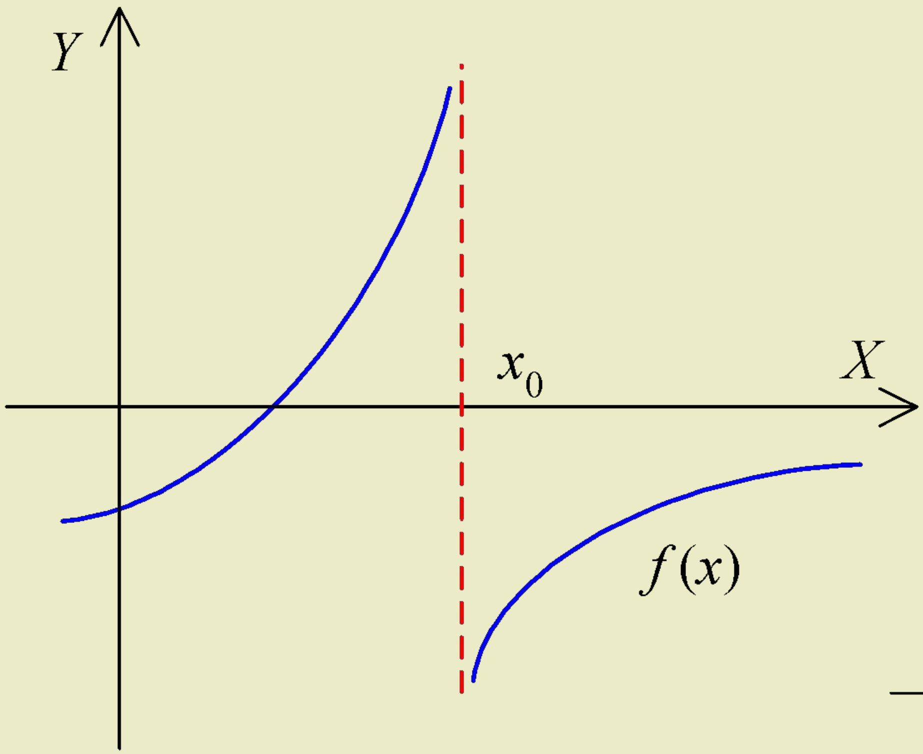
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) - \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \text{const}$$

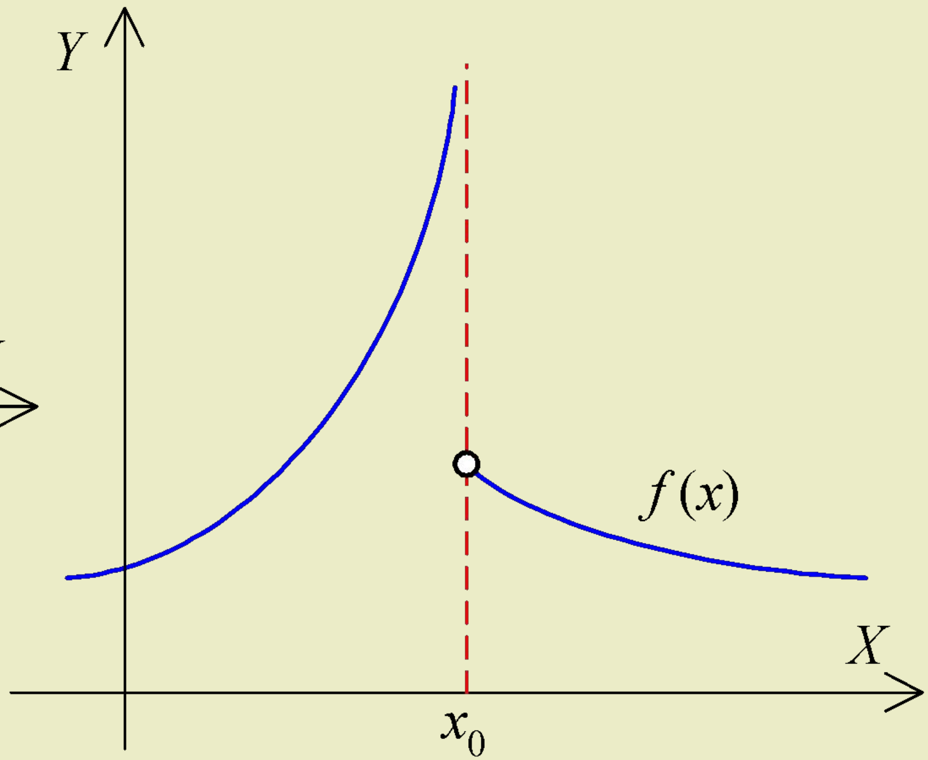


Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Классификация точек разрыва

3. Разрыв 2-го рода





Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции в точке

Пример 4:

Найти точки разрыва функции и установить их характер

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^3}$$

Решение:

Ответ:

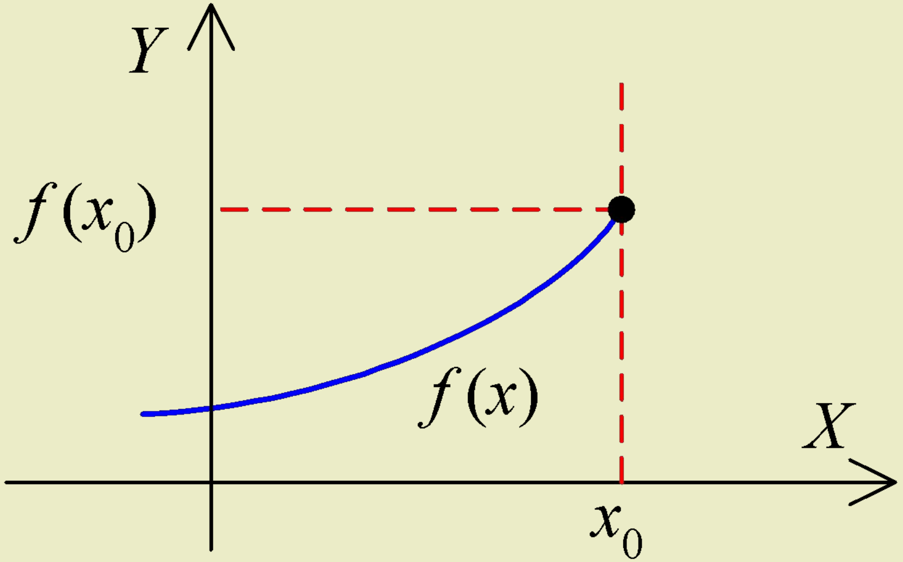
Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Односторонняя непрерывность функции в точке

Непрерывность слева:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 слева**, если она определена в точке x_0 и её предел слева в этой точке равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$



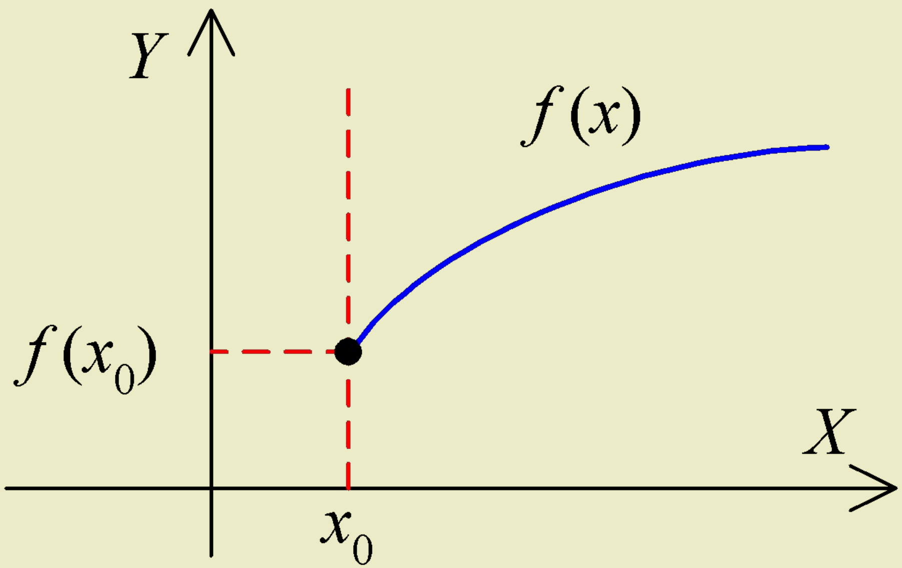
Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Односторонняя непрерывность функции в точке

Непрерывность справа:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 справа**, если она определена в точке x_0 и её предел справа в этой точке равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

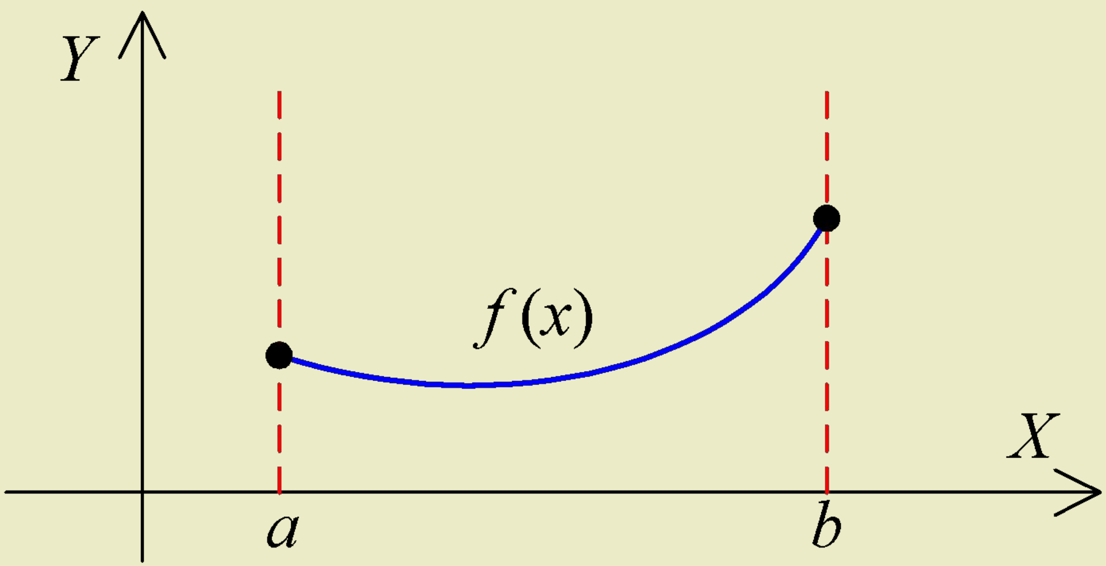


Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность функции на отрезке

Определение:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке [*a*,*b*]**, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причём функция непрерывна в точке a справа, а в точке b – слева.



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 1 (*Вейерштрасса*):

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на нём.

Теорема 2 (*Вейерштрасса*):

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на этом отрезке своих точной верхней и точной нижней граней.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (*Коши о прохождении функции через ноль*):

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах его принимает значения $A = f(a)$ и $B = f(b)$ разных знаков, то внутри отрезка $[a, b]$ найдётся по крайней мере одна точка $x = c$, для которой $f(c) = 0$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (*Коши о промежуточном значении*):

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа C, удовлетворяющего неравенству $A < C < B$, на интервале (a, b) найдётся такая точка $x = c$, для которой $f(c) = C$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность обратной функции

Определение 1:

Функция $f(x)$ называется **строго возрастающей** на отрезке $[a, b]$, если для любых двух чисел x_1 и x_2, принадлежащих интервалу $[a, b]$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2:

Функция $f(x)$ называется **строго убывающей** на отрезке $[a, b]$, если для любых двух чисел x_1 и x_2, принадлежащих интервалу $[a, b]$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Непрерывность обратной функции

Теорема 1:

Если функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и интервал $[A, B]$ – множество её значений, то существует обратная функция f^{-1}, являющаяся строго монотонной.

Теорема 2:

Если функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то обратная функция f^{-1} непрерывна на отрезке $[A, B]$, где $[A, B]$ – множество значений функции $f(x)$.

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org