**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Лекция 2

# ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производная обратной функции

Пусть для функции $f(x)$ существует обратная функция $f^{-1}$.

Имеем:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x; \quad f\Big(f^{-1}(y)\Big) = f(x) = y.$$

По теореме о производной сложной функции:

$$\Big(f^{-1}\big(f(x)\big)\Big)' = \Big(f^{-1}\Big)'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = \Big(f^{-1}\Big)'(y) \cdot f'(x)$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производная обратной функции

Так как $f^{-1}\big(f(x)\big) = x,$ то

$$\Big(f^{-1}\big(f(x)\big)\Big)' = \big(f^{-1}\big)'(y) \cdot f'(x) = (x)' = 1$$

Отсюда:
$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$$

или
$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'}, \quad y = f(x)$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производные элементарных функций

Обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1;1]$$

Имеем: $f^{-1}(y) = \sin y = x, \quad y \in \left[-\pi/2; \pi/2\right]$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\sin y)'} =$$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производные элементарных функций

Обратные тригонометрические функции

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1;1]$$

Имеем: $f^{-1}(y) = \cos y = x, \quad y \in [0;\pi]$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\cos y)'} =$$

$$= \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производные элементарных функций

Обратные тригонометрические функции

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Имеем: $f^{-1}(y) = \operatorname{tg} y = x, \quad y \in \left[-\pi/2; \pi/2\right]$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} =$$

$$= \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производные элементарных функций

Обратные тригонометрические функции

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbf{R}$$

Имеем: $f^{-1}(y) = \operatorname{ctg} y = x, \quad y \in [0; \pi]$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} =$$

$$= -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Таблица производных

$$(c)' = 0$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Таблица производных сложной функции

Пусть $u = u(x)$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Гиперболические функции

1) гиперболический косинус $$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

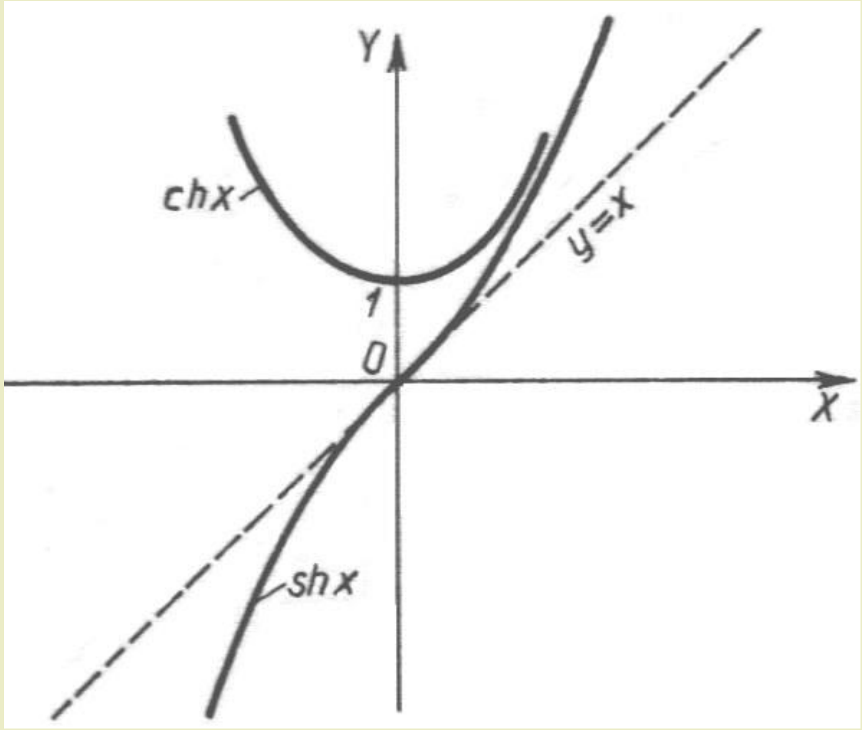
2) гиперболический синус $$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

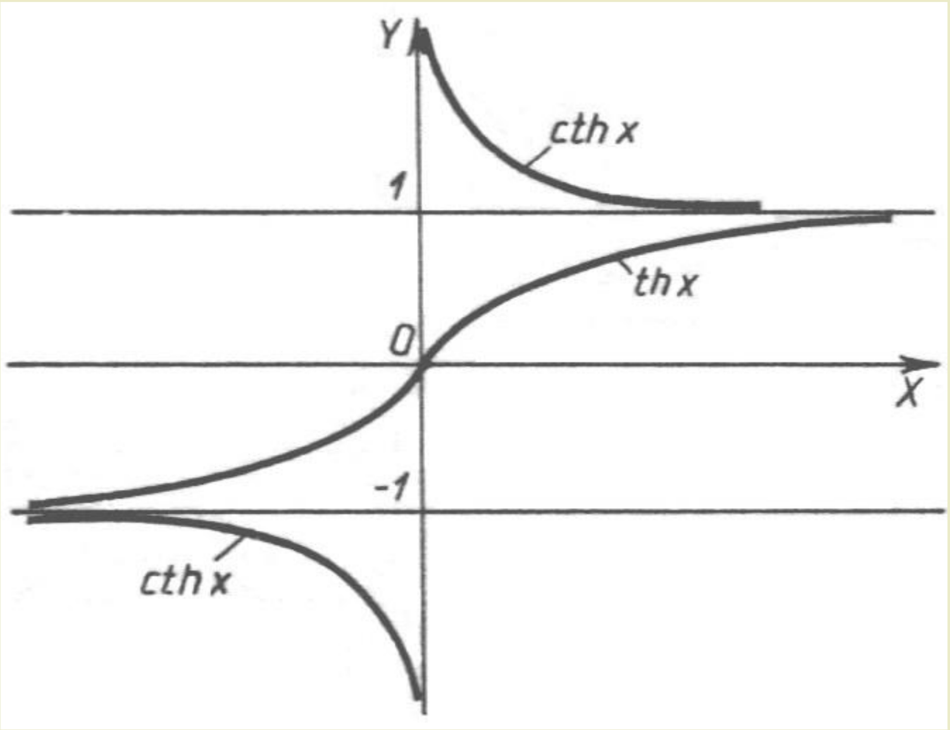
3) гиперболический тангенс $$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4) гиперболический котангенс $$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Графики гиперболических функций




$\operatorname{ch} x$ – чётная функция

$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ – нечётные функции

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Гиперболические функции

Основные соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

Производные:

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Основные правила дифференцирования (повторение)

1) константу можно выносить за знак производной

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

2) формула производной суммы

$$(u + v)' = u' + v'$$

3) формула производной произведения

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4) формула производной частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad (v(x) \neq 0)$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производная сложной функции (повторение)

Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $f(y)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ имеет производную в точке $x_0$, вычисляемую по формуле

$$f'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0), \quad y = g(x)$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Нахождение производной функции

Пример:

Найти производную функции

$$y = \ln \frac{x^2}{3x-1} - \sin^3 \sqrt{e^{x^2} - 2x}$$

Решение:

Воспользуемся основными правилами дифференцирования:

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Логарифмическое дифференцирование

Пусть функция $f(x) > 0$.

По теореме о производной сложной функции:

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Выразим отсюда производную:

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Логарифмическое дифференцирование

Пример 1:

Найти производную функции $y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}.$

Решение:

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическое дифференцирование применяется для нахождения производной сложной функции вида

$$y=\left(f(x)\right)^{g(x)},$$

представляющей собой «функцию в степени функция».

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Логарифмическое дифференцирование

Пример 2:

Найти производную функции $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos x}$.

Решение:

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y$ переменной $x$ задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in T$$

где функции $\phi(t)$, $\psi(t)$ определены в некоторой окрестности точки $t_0$.

Предположим, что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$, определённую в некоторой окрестности точки $x_0 = x(t_0)$, а также существуют производные $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$.

$$y'_x = y'_x\big(t(x)\big) = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Тогда: $$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производная функции, заданной параметрически

Пример:

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции, заданной уравнениями

$$x = 2\sin 2t, \quad y = \cos^2 t.$$

Решение:

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производная функции, заданной неявно

Пусть функция $y$ переменной $x$ задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0$$

Для нахождения $y'_x$ :

1. Дифференцируем тождество по переменной $x$ как сложную функцию, предполагая, что $y = f(x)$.

2. Из полученного уравнения пытаемся выразить $y'_x = f'(x)$.

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

## Производная функции, заданной неявно

Пример:

Найти производную неявной функции, заданной уравнением

$$e^{y} + x\,y = e,$$

в точке $x_0 = 0.$

Решение:

**Автор**: И.В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org