



Комплексные числа.  
Основные понятия.  
Формы записи.

Преподаватель: Божкова О.В.

«Комплексное число — это тонкое и  
поразительное средство  
божественного духа, почти амфибия  
между бытием и небытием»  
Г. Лейбниц.

# Как все начиналось...

## (из истории комплексных чисел)

16 век. Италия. Математический турнир между Фиоре и Никколо Тарталья. Надо решить 30 уравнений третьей степени.

Решение некоторых знал Фиоре от своего учителя – профессора Болонского университета дель Ферро.

Победил Тарталья, предложив общий вид решения этих уравнений. (Надо допустить существование некоторого числа квадрат которого равен -1)

17 век. Рене Декарт ввел название «мнимые числа»

18 век Леонард Эйлер ввел обозначение мнимой единицы, предложив использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый).

19 век. Карл Гаусс ввел название комплексные числа, дал им геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный или мнимый корень

$$x^3 + ax = b$$
$$i^2 = -1$$

# Определение комплексного числа.

$$z = a + bi$$

*a и b – действительные числа,  
i- мнимая единица, квадрат которой равен -1*

*Если  $a=0$ , то число  
чисто мнимое.*

*Если  $b=0$ , то число  
действительное.*

$$a = \operatorname{Re} z$$

$$b = \operatorname{Im} z$$

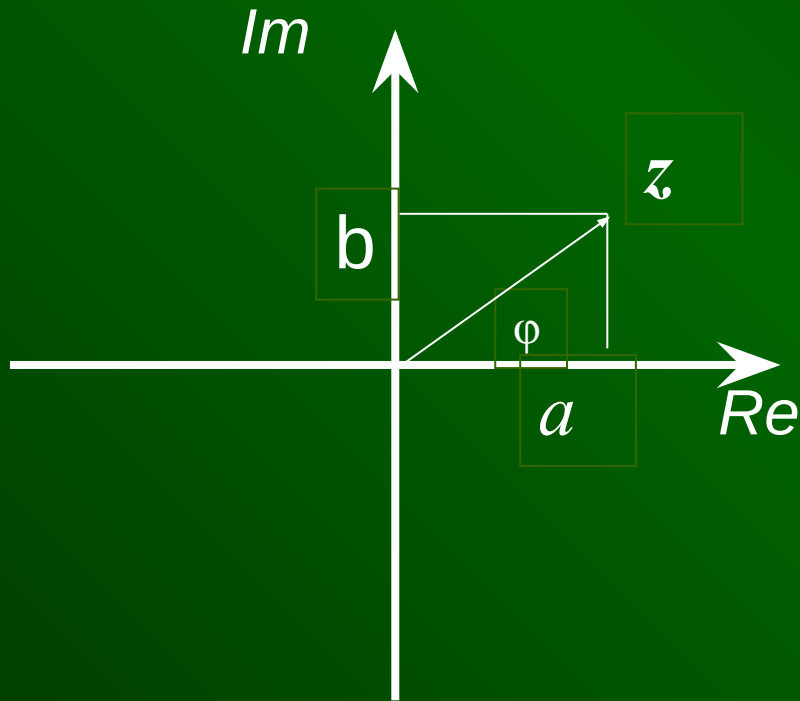
Числа  $a+bi$  и  $a-bi$   
комплексно —  
сопряженные.

# Действия над комплексными числами

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ и } z_2 = a_2 + b_2 i$$

- Сложение:  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- Вычитание:  $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
- Умножение:  $z_1 * z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
- Умножение комплексно – сопряженных чисел:  $z * \bar{z} = a^2 + b^2$
- Деление: 
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

# Геометрическое истолкование комплексного числа



Модуль  $z$  – длина вектора  $z$ .

$$r = |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргумент  $z$  – угол  $\varphi$ ,  $\varphi = \arg z$ .

1. Если  $a > 0$  и  $b > 0$ , то  $\varphi = \arctg \left| \frac{b}{a} \right|$

2. Если  $a < 0$  и  $b > 0$ , то  $\varphi = \pi - \arctg \left| \frac{b}{a} \right|$

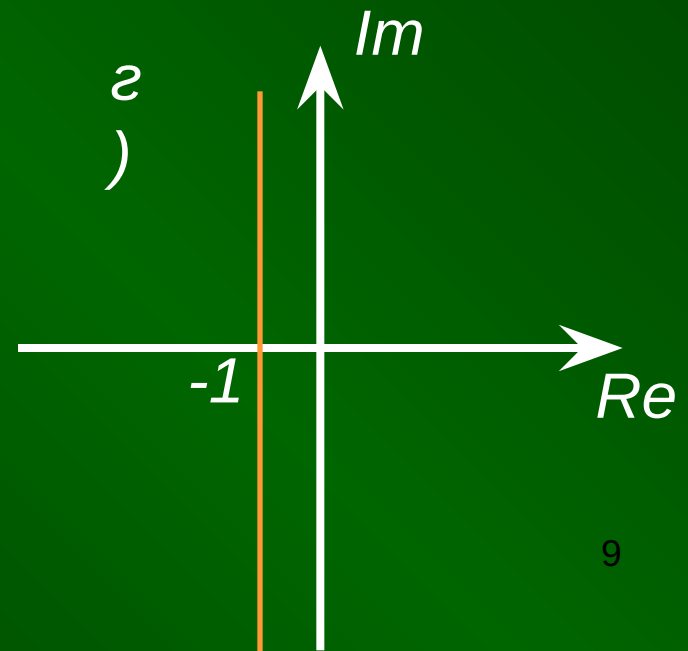
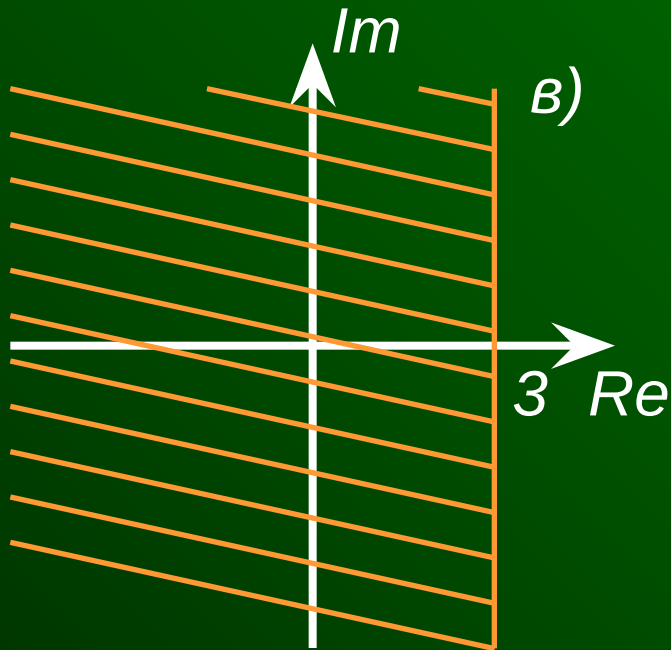
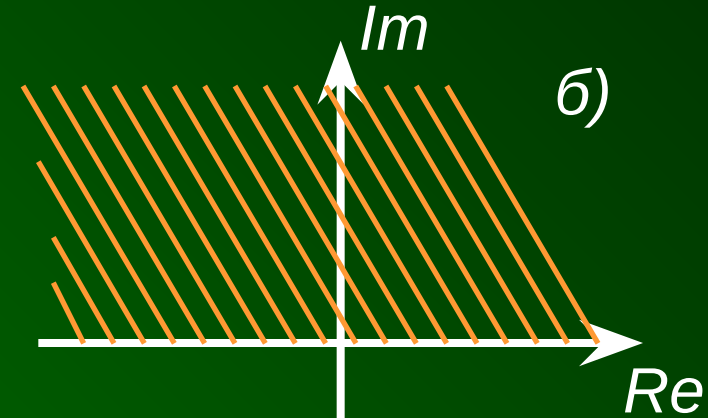
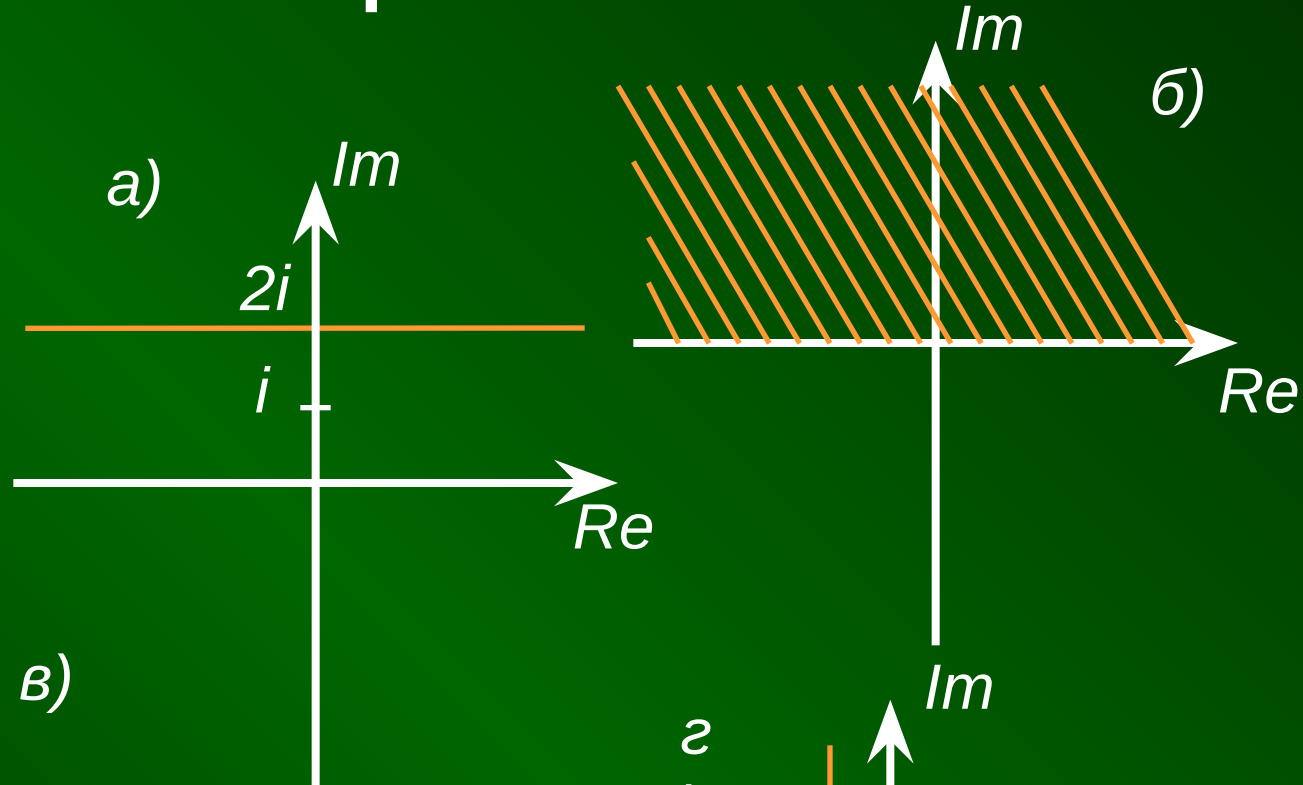
3. Если  $a < 0$  и  $b < 0$ , то  $\varphi = \pi + \arctg \left| \frac{b}{a} \right|$

4. Если  $a > 0$  и  $b < 0$ , то  $\varphi = 2\pi - \arctg \left| \frac{b}{a} \right|$



# Устная работа

- 1)  $\text{Im}Z = 2$
- 2)  $\text{Re}Z = -1$
- 3)  $\text{Im}Z > 0$
- 4)  $\text{Re}Z \leq 3$



# Формы записи комплексных чисел

- Алгебраическая  $z = a + bi$
- Тригонометрическая(  $a = r \cos \varphi$ ,  
 $b = r \sin \varphi$ )  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- Показательная

# Показательная форма записи комплексного числа.

- **Формула Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

- **Показательная форма**

$$z = r e^{i\varphi}$$

# Переход от одной формы к другой

$$a + bi \leftrightarrow \begin{cases} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \\ z = r \cdot e^{i\varphi} \end{cases}$$

## Задание:

1. Записать комплексное число  $z = -1 + i$  в тригонометрической и показательной формах.
2. Ответ проверить обратным переходом

# Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

| Тригонометрическая                                                                                                  | Показательная                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Умножение</p> $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$   | $r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$           |
| <p>2. Деление</p> $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ | $\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ |
| <p>3. Возведение в степень</p> $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$                                        | $(r e^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi n}$                                                      |

# Действия над комплексными числами

- Возведение в степень

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = -i \cdot i = 1$$

# Математический шедевр

- В формулу Эйлера  
подставить  $\varphi=\pi$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Всем  
большое  
спасибо !!!