Перпендикулярность

прямых и плоскостей

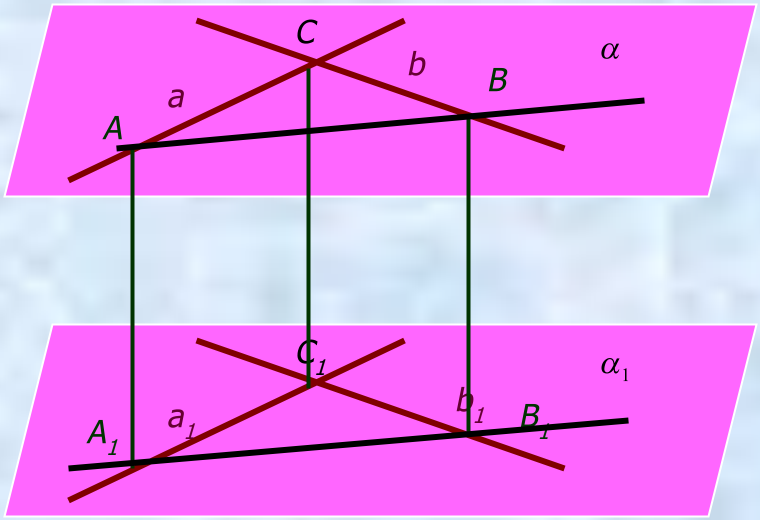
Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема 3.1 Если две пересекающие

прямые параллельны соответственно

двум перпендикулярным прямым,

то они тоже перпендикулярны.



Задача № 3 (П 14). Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если AB = 3 см, BC = 7 см, AD = 1,5 см.

Дано: $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AD \perp AC$.

AB = 3 см, BC = 7 см, AD = 1,5 см.

Найти CD.

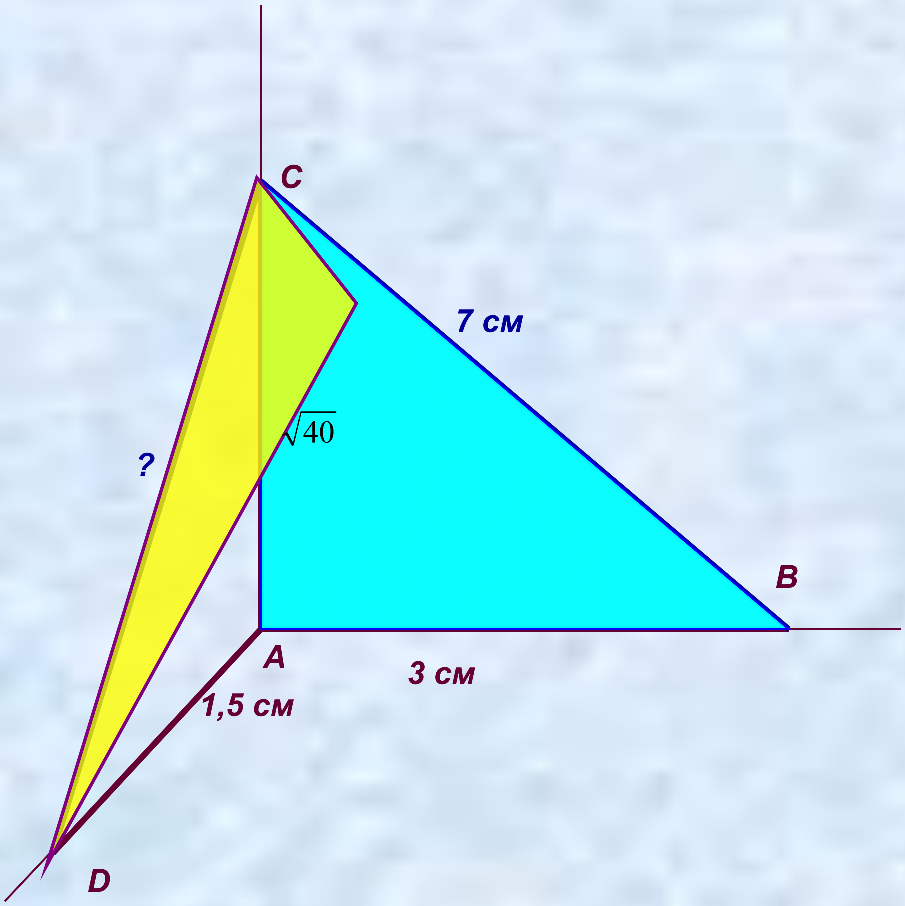
Решение: 1) $\triangle ABC$ – прямоугольный,

по теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 49 - 9 = 40$, $AC = \sqrt{40}$ см.

2) $\triangle ACD$ – также прямоугольный,

по теореме Пифагора $CD^2 = AC^2 + AD^2 = 40 + 2{,}25 = 42{,}25$. $CD = \sqrt{42{,}25}$ см = 6,5 см.

Ответ: CD = 6,5 см.



Задача № 3 2) (П 14). Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если BD = 9 см, BC = 16 см, AD = 5 см.

Дано: $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AD \perp AC$.

BD = 9 см, BC = 16 см, AD = 5 см.

Найти CD.

Решение: 1) $\triangle ABD$ – прямоугольный,

по теореме Пифагора $AB^2 = BD^2 - AD^2 =$ $81 - 25 = 56$, AC = $\sqrt{56}$ см.

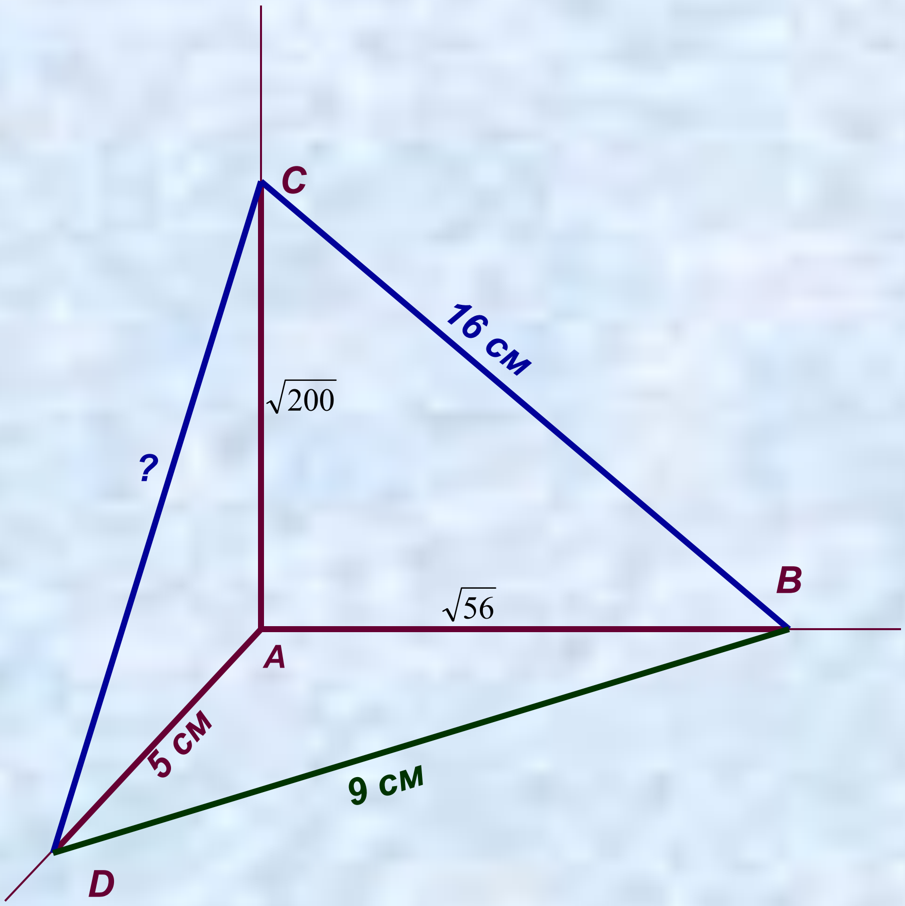
2) $\triangle ACB$ – также прямоугольный,

по теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 - AB^2 =$

$= 256 - 56 = 200$. AC = $\sqrt{200}$ см.

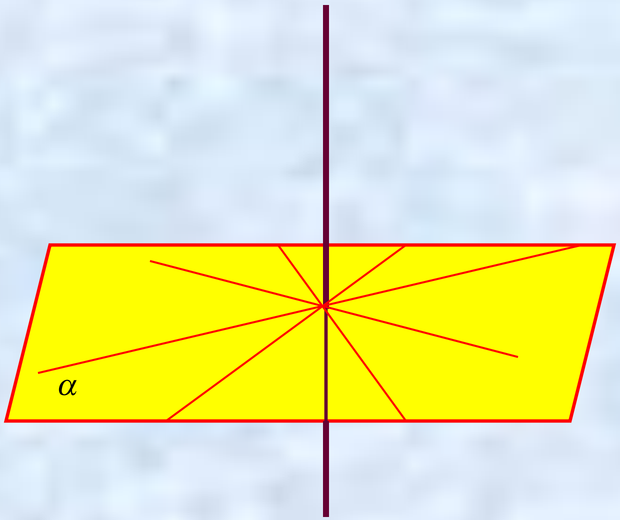
3) $\triangle ACD$ – прямоугольный, $CD^2 = AC^2 + AD^2 = = 200 + 25 = 225$, CD = 15 см.

Ответ: CD = 15 см.



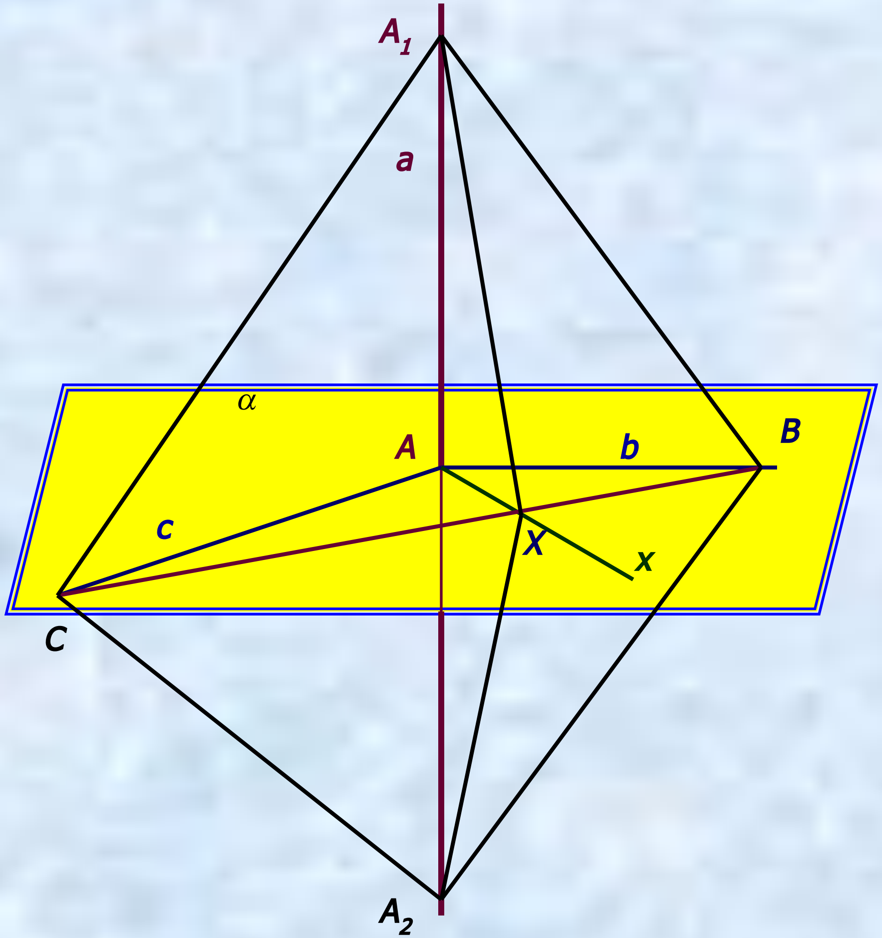
Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения данной прямой и плоскости



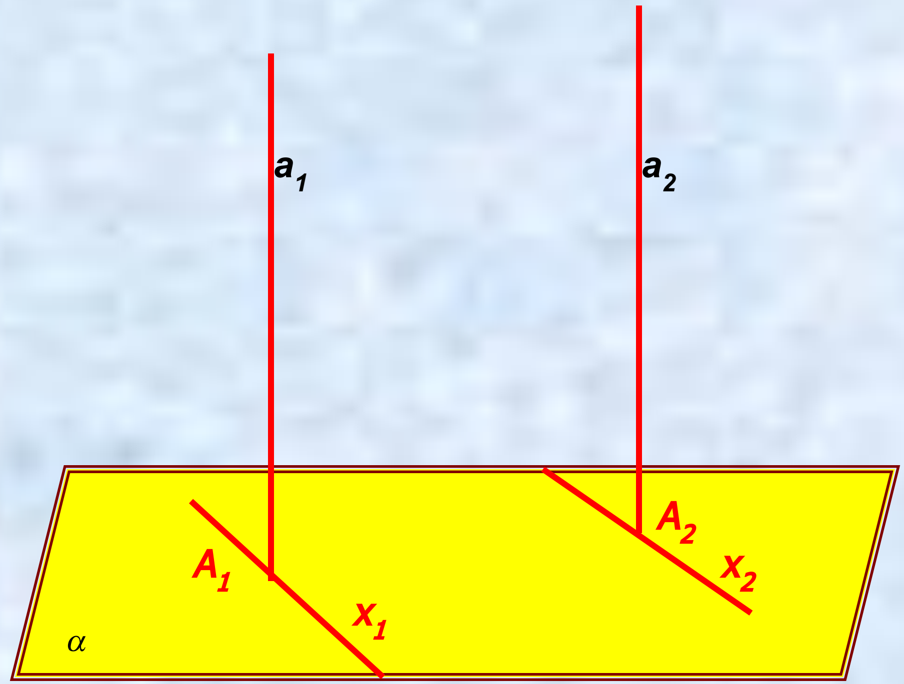
Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 3.2 Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

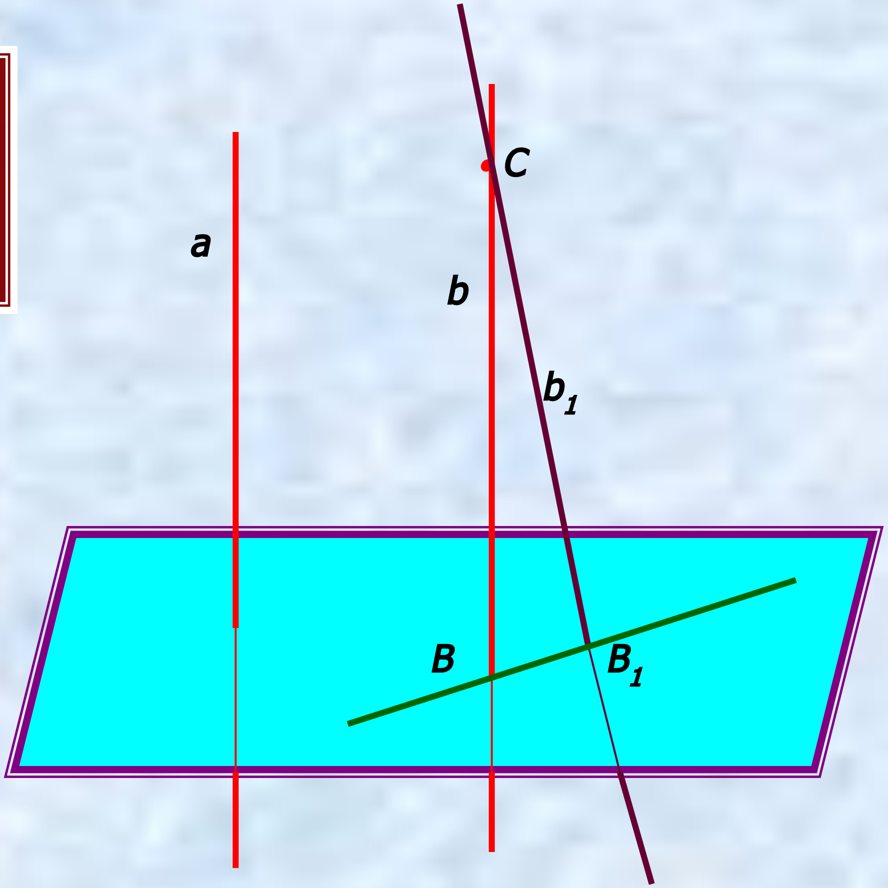


Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

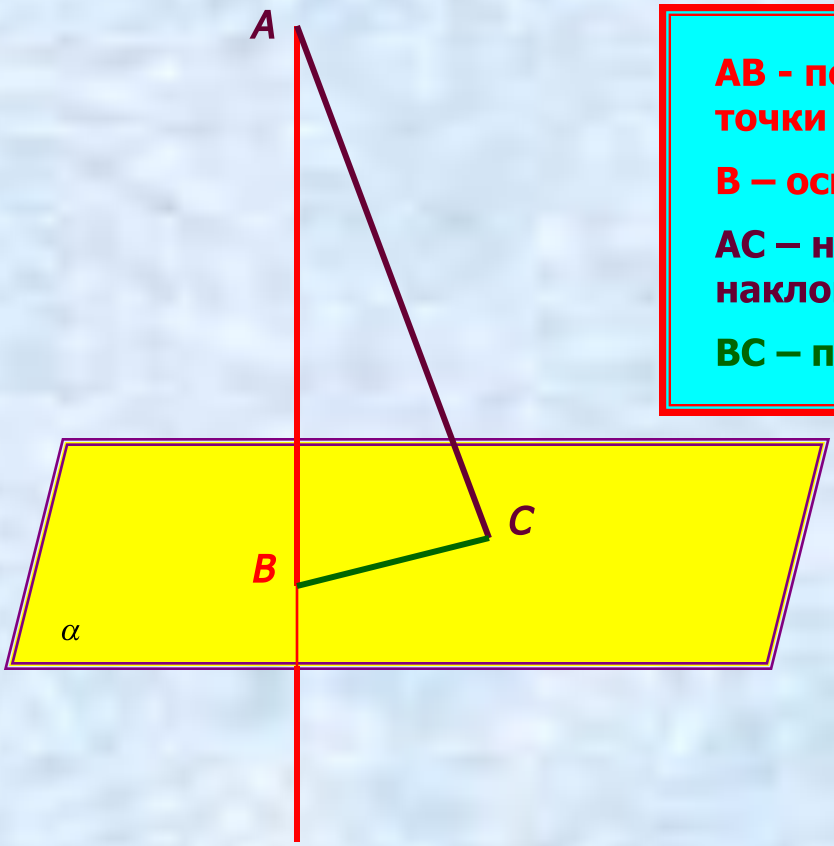
Теорема 3.3 Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.



Теорема 3.4 Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



Перпендикуляр и наклонная.



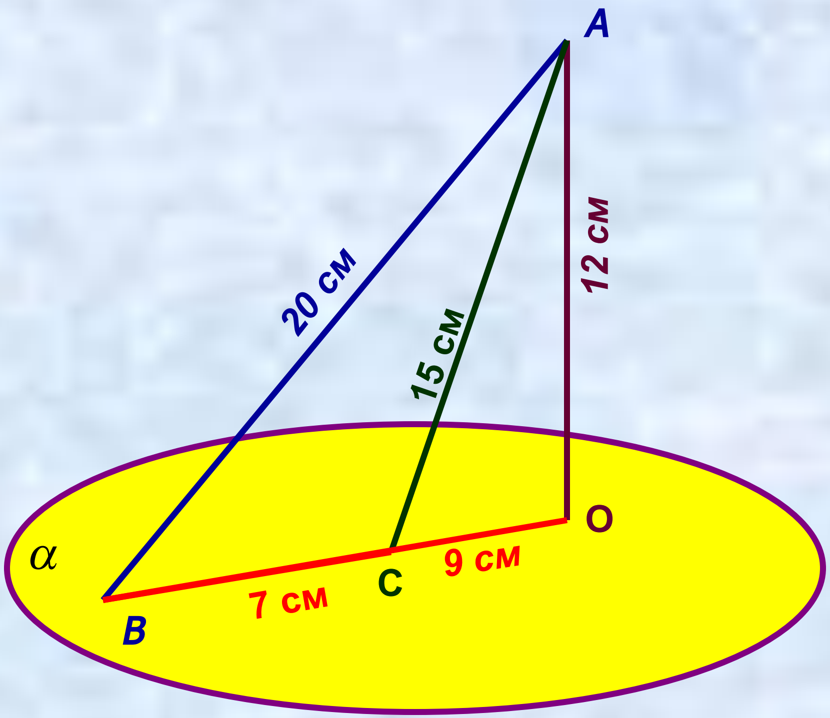
AB - перпендикуляр, расстояние от точки до плоскости.

B – основание перпендикуляра.

AC – наклонная, C- основание наклонной.

BC – проекция наклонной

Задача Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 15 см и 20 см. Разность проекций этих наклонных равна 7 см. Найдите проекции наклонных.



Дано: *AB и AC – наклонные к плоскости* α

AO $\perp \alpha$ *, AB = 20 см, AC = 15 см, BC = 7 см.*

Найти: BO и CO.

Решение: *1) Найдём площадь* $\triangle ABC$ *по формуле Герона:* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

p = (a+b+c)/2 = (20+15+7)/2 = 21 см. $S = \sqrt{21 \cdot (21-20) \cdot (21-15) \cdot (21-7)} = \sqrt{21 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 14} =$

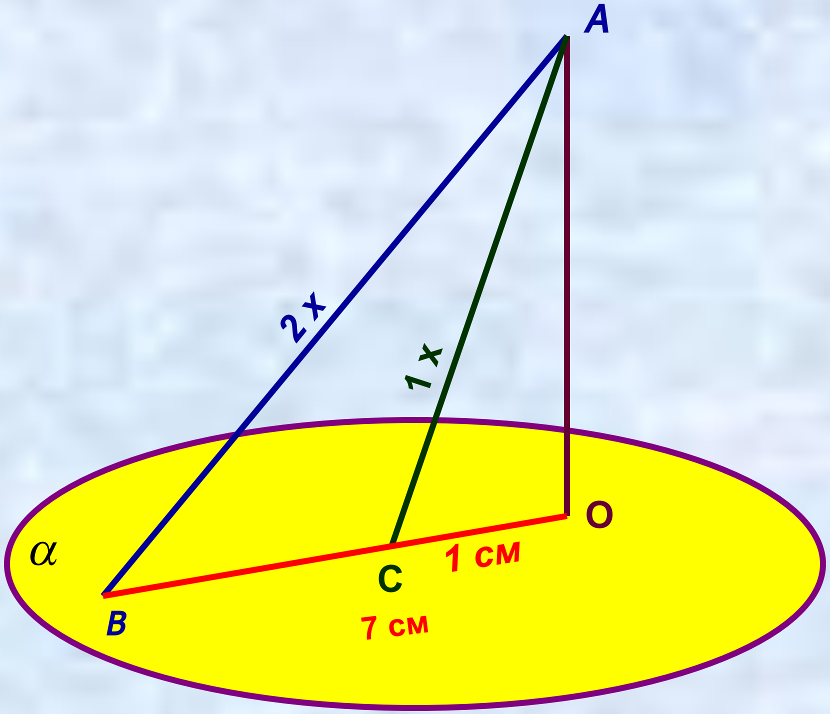
$= \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2}$ *= 7·6 = 42 см*^{2}.

2) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2S}{a}$ *, AO = 2·42/7 = 84/7 = 12 см.*

3) $\triangle$*AOC – прямоугольный, по теореме Пифагора OC*^{2} *= AC*^{2} *– AO*^{2} *= 225 – 144 = 81, OC = 9 см.*   *4) OB = BC + OC = 7 + 9 = 16 см.*

Ответ: *9 см и 16 см.*

Задача 24 2) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если наклонные относятся как 1:2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.



Дано: AB и AC – наклонные к плоскости

$AO \perp \alpha$, $AB : AC = 2 : 1$, $BO = 7$ см, $CO = 1$ см.

Найти: AB и AC.

Решение: Пусть $AB = 2x$ см, $AC = x$. В $\triangle ABO$ $AO^2 = AB^2 - OB^2 = 4x^2 - 49$,

В $\triangle ACO$ $AO^2 = AC^2 - CO^2 = x^2 - 1$. Т. к. левые части этих равенств равны, то равны и правые: $4x^2 - 49 = x^2 - 1$, $3x^2 = 48$, $x^2 = 16$, $x = 4$.

Таким образом, $AC = 4$ см, $AB = 8$ см.

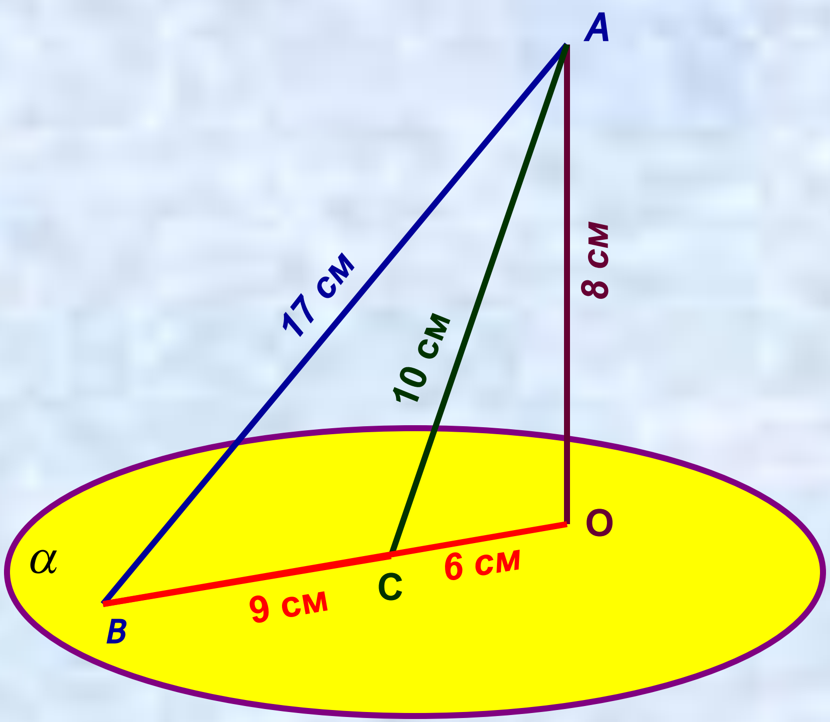
Ответ: 4 см и 8 см.

<u>Задача 23</u> ***Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.***

<u>Дано:</u> AB и AC – наклонные к плоскости α

AO $\perp \alpha$ ***, AB = 17 см, AC = 10 см, BC = 9 см.***

Найти: BO и CO.



<u>Решение:</u> 1) Найдём площадь Δ***ABC по формуле Герона:*** $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

p = (a+b+c)/2 = (17+10+9)/2 = 18 см. $S = \sqrt{18 \cdot (18-17) \cdot (18-10) \cdot (18-9)} = \sqrt{18 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} =$

$= \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9}$ ***= 9·4 = 36 см***^{2}***.***

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2S}{a}$ ***, AO = 2·36/9 = 72/9 = 8 см.***

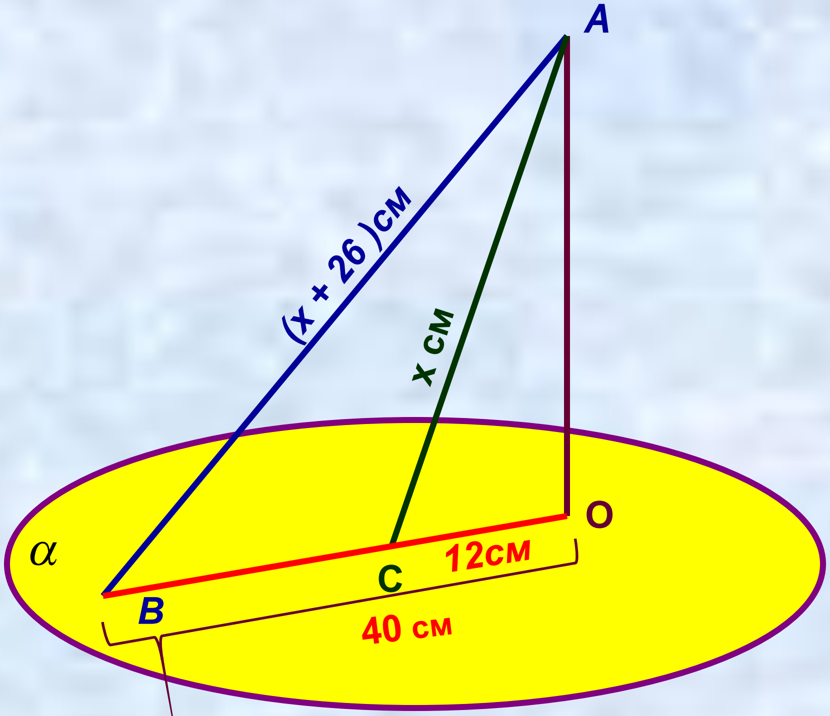
3) Δ***ABC – прямоугольный, по теореме Пифагора OC***^{2} ***= AC***^{2} ***– AO***^{2} ***= 100 – 64 = 36, OC = 6 см. 4) OB = BC + OC = 9 + 6 = 15 см.***

<u>Ответ:</u> 6 см и 15 см.

Задача 24 *1) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см.*

Дано: *AB и AC – наклонные к плоскости $AO \perp \alpha$, AC = x см, AB = x+26 см, CO = 12 см, OB = 40 см.*

Найти: *AB и AC.*



Решение: *Пусть AC = x см, AB = (x+26) см. В $\triangle ABO$ $AO^2 = AB^2 - OB^2 = (x+26)^2 - 40^2$,*

В $\triangle ACO$ $AO^2 = AC^2 - CO^2 = x^2 - 12^2$. Т. к. левые части этих равенств равны, то *равны и правые: $(x+26)^2 - 40^2 = x^2 - 12^2$, $x^2 + 52x + 676 - 1600 = x^2 - 144$, $52x = 780$, $x = 15$ см.*

Таким образом, AC = 15 см, AB = 41 см.

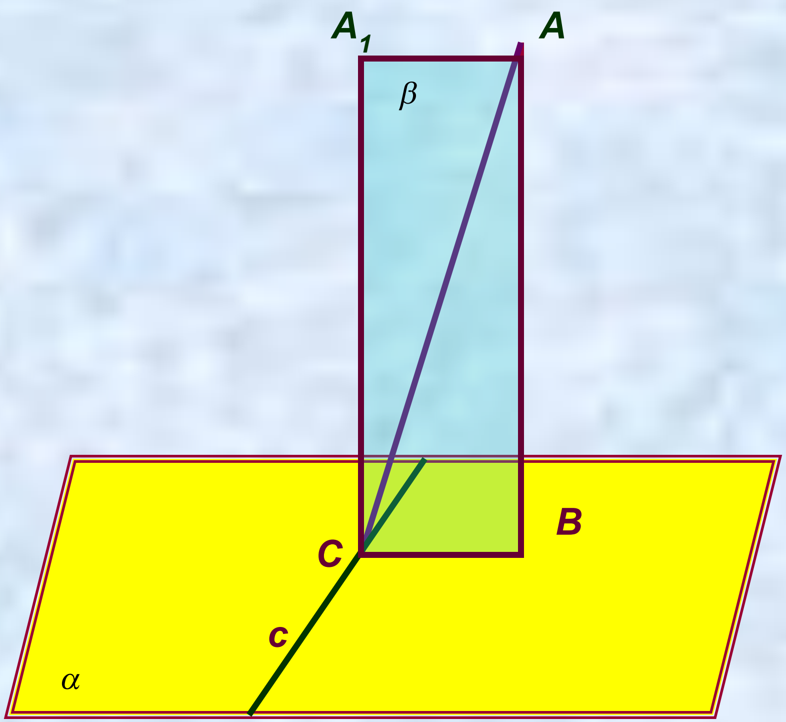
Ответ: *15 см и 41 см.*

Теорема о трёх перпендикулярах.

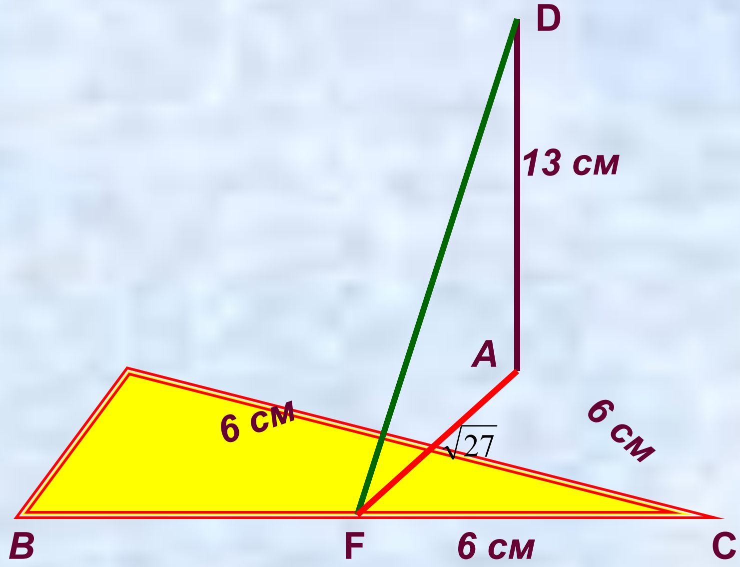
Теорема 3.5 **Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна наклонной.**

Обратная теорема

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



Задача № 48. Из вершины равностороннего треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если AD = 13 см, BC = 6 см.



Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний, $AB=BC=AC=6$ см, $AD \perp (ABC)$, $AD=13$ см.

Найдите: $\rho(D; BC)$.

Решение: Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки D опустим перпендикуляр DF на прямую BC.

По теореме о трёх перпендикулярах $AF \perp BC$,

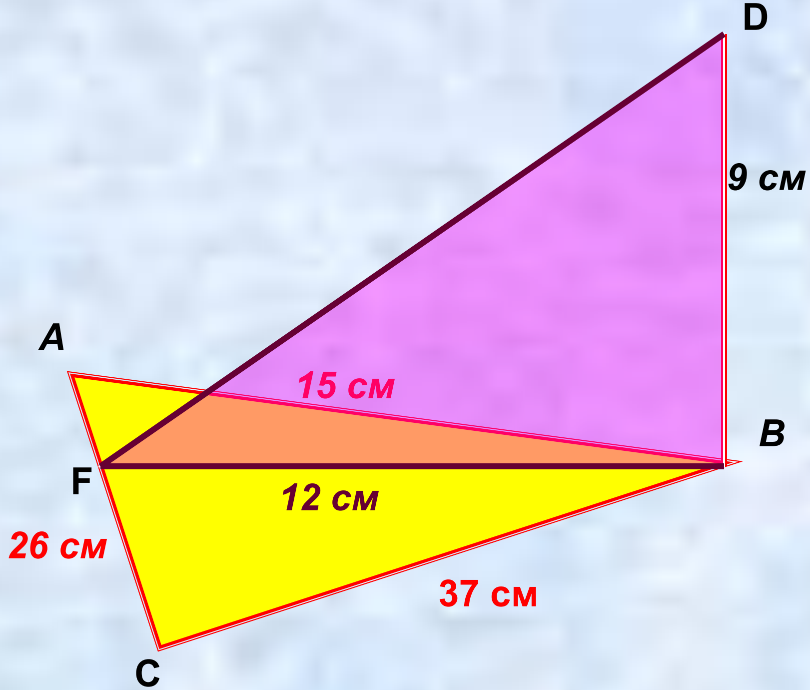
т.к. треугольник ABC- равносторонний, то AF –медиана, т.е. BF=FC= 3 см.

$\triangle AFC$ – прямоугольный. По теореме Пифагора $AF^2 = AC^2 - CF^2 = 36 - 9 = 27$, $AF = \sqrt{27}$ см.

$\triangle ADF$ – прямоугольный, $DF^2 = AD^2 + AF^2 = 169 + 27 = 196$, следовательно $DF = 14$ см.

Ответ: 14 см.

Задача . Стороны треугольника 15 см, 26 см и 37 см. Через вершину среднего по величине угла проведён перпендикуляр в его плоскости, равный 9 см. Найдите расстояние от концов этого перпендикуляра до противоположной стороны.



Решение: Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки B опустим перпендикуляр BF на прямую BC.

По теореме о трёх перпендикулярах DF$\perp$ AC. BF найдём из треугольника ABC.

Найдём площадь треугольника ABC по формуле Герона. p = (a+b+c)/2 = (15+26+37)/2 = 39,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{39 \cdot 24 \cdot 13 \cdot 2} = \sqrt{13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 2} = 13 \cdot 3 \cdot 4 = 156$ (см^2).

$S = \frac{1}{2}$ AC·BF, BF = 2·S/AC= 2·156 / 26 = 12 см.

Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора $DF^2 = DB^2 + BF^2$,

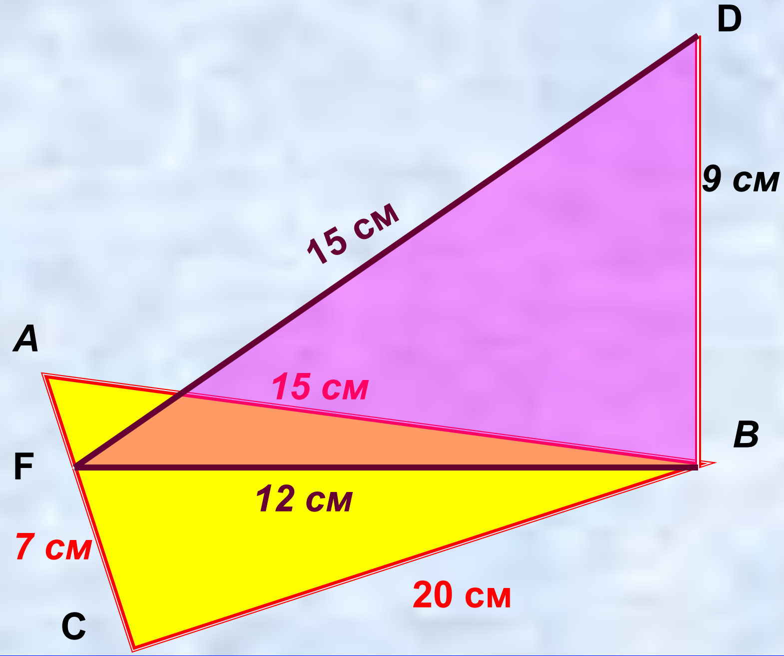
$DF^2 = 81 + 144 = 225$, DF = 15 см.

Ответ: 12 см и 15 см.

Задание на дом: П. 19,

Задача . ***Из вершины треугольника АВС восставлен перпендикуляр BD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны АС, если BD = 9 см, AB = 15 см, BC = 20 см, AC = 7 см.***

Задача . *Из вершины треугольника ABC восставлен перпендикуляр BD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны AC, если BD = 9 см, AB = 15 см, BC = 20 см, AC = 7 см.*



Решение: *Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки до прямой. Поэтому, из точки D опустим перпендикуляр DF на прямую AC.*

По теореме о трёх перпендикулярах BF $\perp$AC. BF найдём из треугольника ABC.

Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона.

p = (a+b+c)/2 = (15+20+7)/2 = 21,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot 1\cdot 6\cdot 14} = \sqrt{7\cdot 3\cdot 1\cdot 6\cdot 7\cdot 2} = 7\cdot 6 = 42$ (см^2).

$S = \frac{1}{2}$ AC·BF, BF = 2·S/AC= 2·42 / 7 = 12 см.

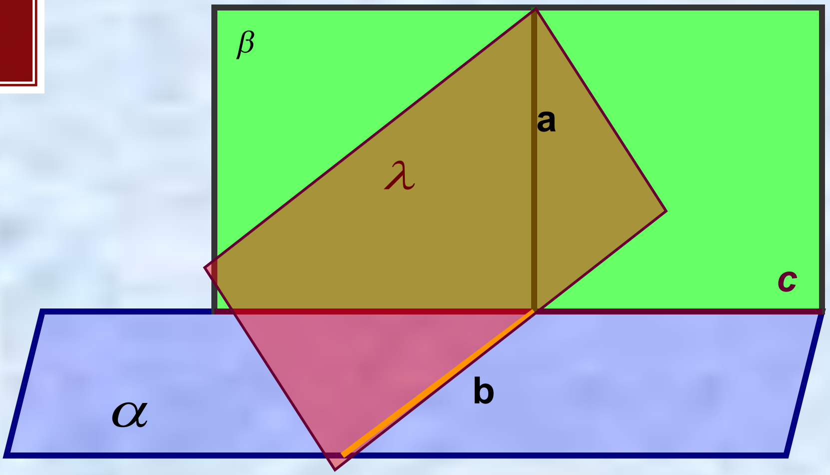
Треугольник DFB – прямоугольный. По теореме Пифагора $DF^2 = DB^2 + BF^2$,

$DF^2 = 81 + 144 = 225$, DF = 15 см.

Ответ: 15 см.

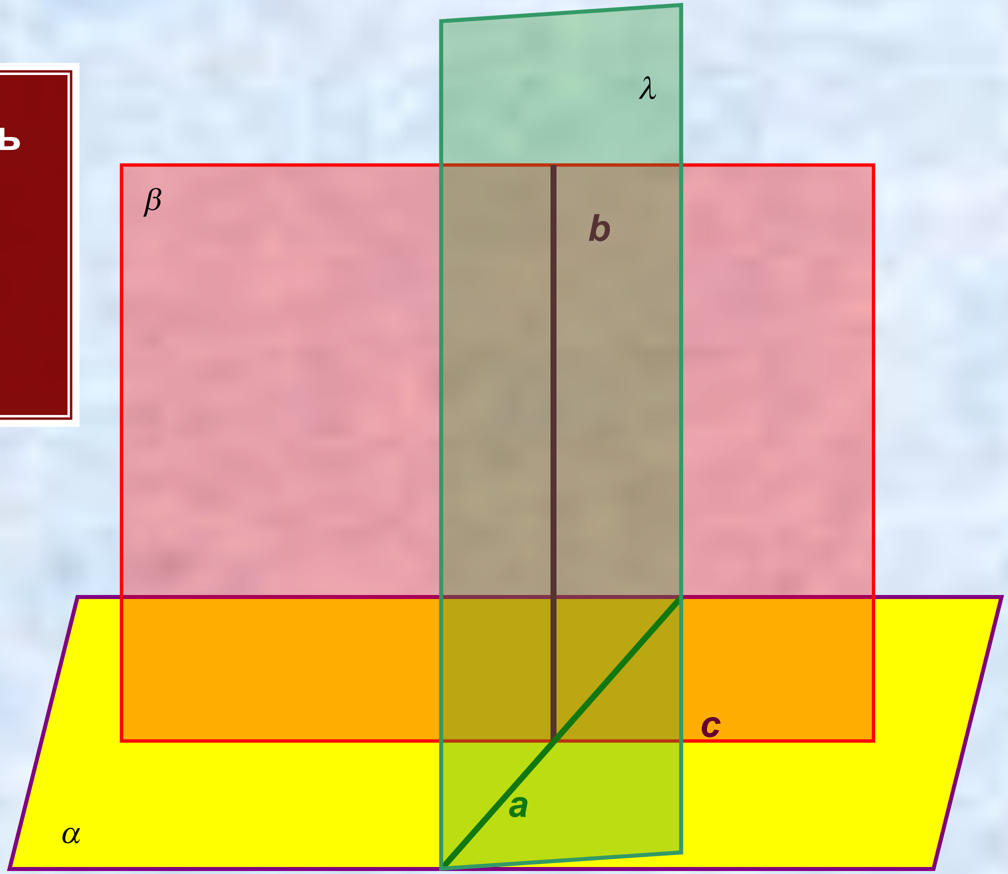
Перпендикулярность плоскостей.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

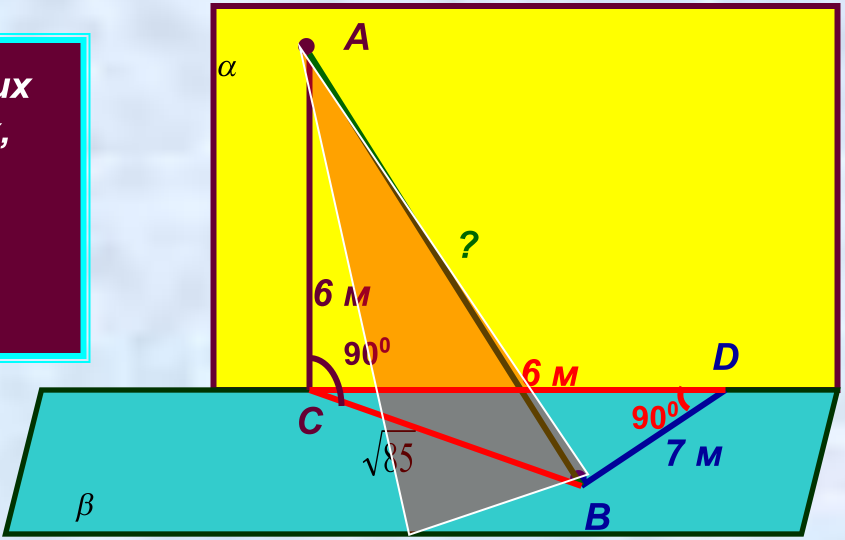


Признак перпендикулярности плоскостей.

Теорема 3.6 **Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.**



Задача № 59 1) *Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если: AC = 6 м, BD = 7 м, CD = 6 м.*



Дано: $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AC \perp CD$, $BD \perp CD$

AC = 6 м, BD = 7 м, CD = 6 м.

Найти: AB.

Решение: Δ BCD – прямоугольный,

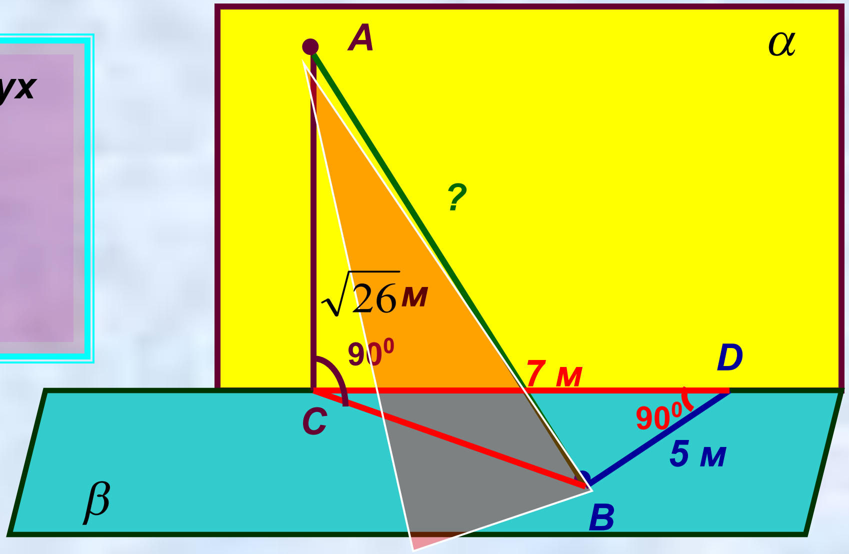
по теореме Пифагора $BC^2 = CD^2 + BD^2$, $BC^2 = 36 + 49 = 85$, $BC = \sqrt{85}$ м.

Δ ABC – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$AB^2 = 36 + 85 = 121$, AB = 11 м.

Ответ : 11 м.

Задача Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если: АС = $\sqrt{26}$ м, BD = 5 м, CD = 7 м.

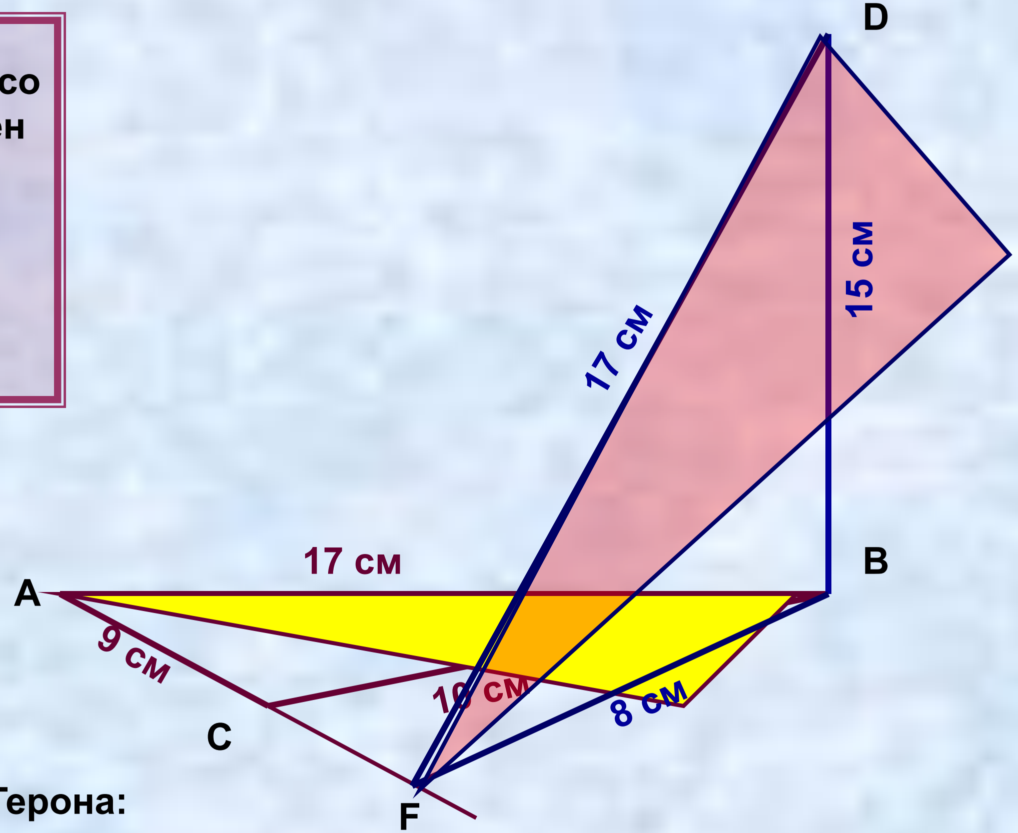


Дано: $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AC \perp CD$, $BD \perp CD$

АС = $\sqrt{26}$ м, BD = 5 м, CD = 7 м.

Найти: АВ.

Задача. **Из меньшего угла треугольника со сторонами 9 см, 10 см и 17 см восставлен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Найдите расстояния от концов этого перпендикуляра до прямой, содержащей противолежащую сторону.**



Решение:

1) Т.к. $\triangle$ ABC - тупоугольный, то перпендикуляр, проведённый из точки B, мы должны провести на продолжение стороны AC.

2) Найдём площадь $\triangle$ ABC по формуле Герона:

p=(a + b + c): 2= (9 + 10 + 17): 2 = 18 (см), $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18\cdot(18-9)\cdot(18-10)\cdot(18-17)}$

$= \sqrt{18\cdot 9\cdot 8\cdot 1} = \sqrt{9\cdot 2\cdot 9\cdot 8\cdot 1}$ **= 9·4 = 36 см^2.**

3) $S_\Delta = \dfrac{a\cdot h}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2\cdot S}{a}$ **, BF = (2·S) : AC = (2· 36) : 9 = 8 (см).**

4) DF $\perp$ AC по теореме о трёх перпендикулярах. $\triangle$DBF – прямоугольный, поэтому

DF^2 = BD^2 + BF^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289, DF = 17 см.

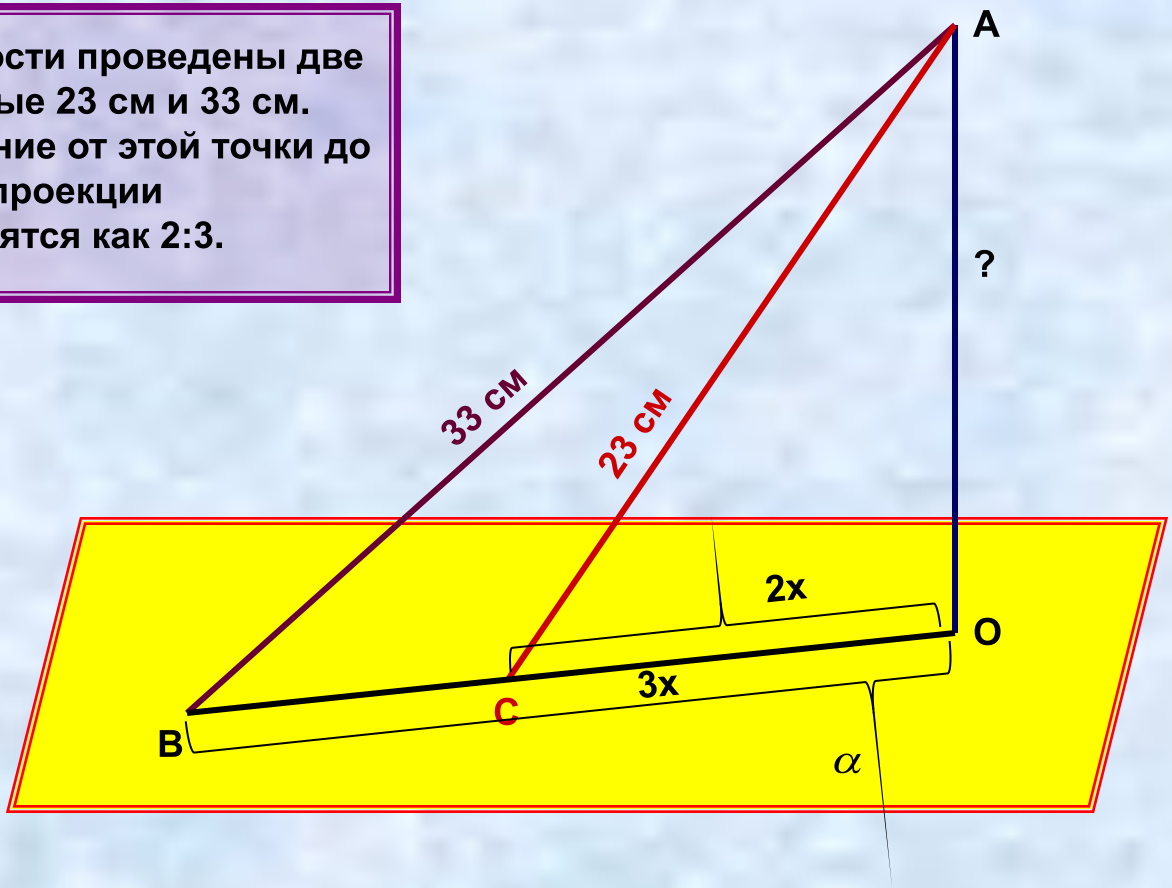
Ответ: 8 см и 17 см.

***<u>Задание на дом</u>*: П 20,**

задачи № № 25, 59 3),

К задаче № 25

Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.



Выполнить конспект в тетрадях и режить задачи.

До свидания.