ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

До сих пор подробно изучалась теория функций одного независимого переменного. В действительности же чаще приходится иметь дело с такими ситуациями, когда изменение одной переменной связано с изменениями одновременно нескольких, не зависящих друг от друга, переменных. Ниже мы рассмотрим понятие функции нескольких переменных, область определения, дифференцирование, экстремум, в основном, для случая двух или трех независимых переменных. Однако эти же понятия можно практически почти слово в слово перенести на случай функции любого числа независимых переменных.

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

.

Пусть каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторой области D соответствует определенной число $z \in E \subset R$. Тогда z называется ***функцией двух переменных*** x и y, x, y - ***независимыми переменными*** или ***аргументами***, D - ***областью определения*** функции, а множество E всех значений функции - ***областью ее значений*** и обозначают $z = f(x, y)$.

Геометрически область определения функции обычно представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области.

Примеры. Найти область определения D функций

- **1.** $z = \ln(y - x^2 + 2x)$.

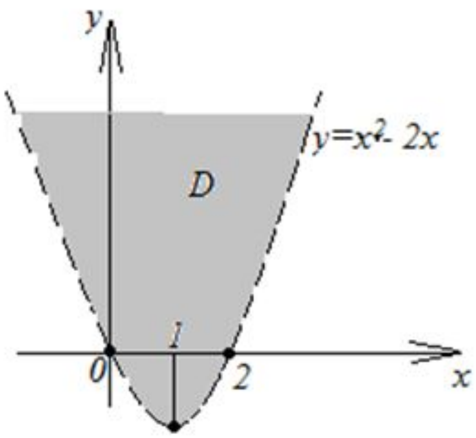


Рис. 1

Данная функция определена в тех точках плоскости Oxy, в которых $y - x^2 + 2x > 0$, или $y > x^2 - 2x$. Точки плоскости, для которых $y = x^2 - 2x$, образуют границу области D. Уравнение $y = x^2 - 2x$ задает параболу (рис. 1); поскольку парабола не принадлежит области D, то она изображена пунктирной линией). Далее, легко проверить непосредственно, что точки, для которых $y > x^2 - 2x$, расположены выше параболы. Область D является открытой и ее можно задать с помощью системы неравенств:

$$D: \{-\infty < x < +\infty, x^2 - 2x < y < +\infty\}.$$

• 2. $z = \ln(x + y)$.

Рассуждая аналогично, получим: $y > -x$, т.е. область определения представляет собой часть плоскости, расположенную выше прямой $y = -x$, за исключением точек самой прямой $y = -x$ (рис. 2).

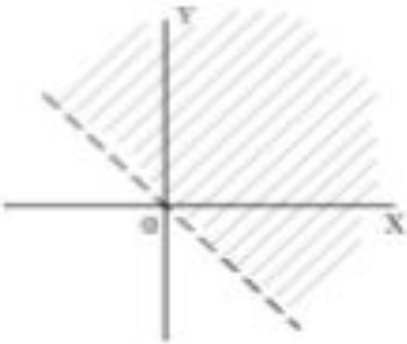


Рис. 2:

• 3. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Ясно, что функция определена только для неотрицательных значений подкоренного выражения. Следовательно, область определения опишется неравенством

$$16 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 16.$$

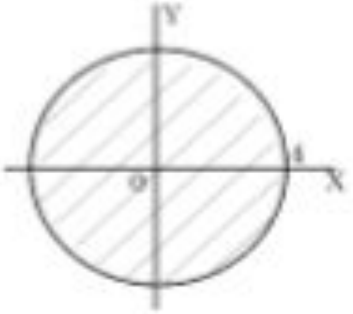


Рис. 3:

Это множество всех точек круга радиуса $r = 4$, включая границу (рис. 3). Область определения является замкнутой.

Функция двух или большего количества независимых переменных, как и функция одной переменной, есть **отображение** области определения функции D на область ее значений E.

Введем понятие графика функции многих переменных. Геометрическим образом функции n независимых переменных $U = U(x_1; x_2; \dots; x_n)$ является множество всех точек $(n+1)$ мерного пространства $(x_1; x_2; \dots; x_n; U)$, координаты которых удовлетворяют заданному соотношению $U = U(x_1; x_2; \dots; x_n)$. В частности, геометрическим образом функции двух переменных $z = f(x; y)$ в трехмерном пространстве является поверхность.

Так, $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения,

$z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ – нижняя полусфера,

$z = \sqrt{x}$ – верхняя часть параболического цилиндра.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в области D и точка $M_0(x_0; y_0)$ – некоторая точка этой области.

Определение

Число A называется пределом функции $z = f(x; y)$ при стремлении точки $M(x; y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$, если для каждого сколь угодно малого числа $\epsilon > 0$ существует соответствующее число $\delta > 0$, что для всех точек M, удовлетворяющих неравенству $0 < |M_0M| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x; y) - A| < \epsilon$.

Этот факт записывается символически

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A, \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Условие $0 < |M_0M| < \delta$ означает, что точка M принадлежит δ-окрестности точки M_0.

Для функции нескольких переменных понятия бесконечно малой и бесконечно большой величин аналогичны этим же понятиям для функции одной переменной.

Для нахождения предела функции нужно, конечно, убедиться в том, что он существует, т.е. точка M_0 является точкой «сгущения» функции, а затем вычислить предел, подставив в выражение, стоящее под знаком предела, вместо текущих переменных их предельные значения. Так,

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to \pi}} \frac{x \cos(xy)}{x^2 - 1} = \frac{2 \cos 2\pi}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

Однако не все так просто. Для функций одной переменной мы имели богатый арсенал приемов раскрытия неопределенностей всех видов. Для функций нескольких переменных чаще всего раскрыть неопределенности вообще не удается. Дело объясняется тем, что для существования предела необходимо, чтобы он не зависел от траектории, по которой точка M приближается к точке M_0. Если же величины пределов зависят от таких траекторий, то это значит лишь то, что предел не существует. Например, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

1) Будем приближаться к началу координат от соседней точки плоскости по лучу $y = kx$. В этом случае

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

2) Если перейти к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и приближаться к началу координат по спирали $\rho = k\varphi$, $\varphi \to 0$, $\rho \to 0$, то получим

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\varphi\to 0} \frac{k^2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{k^2\rho^2} = \lim_{\varphi\to 0} \sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

В данном случае предел оказался не зависящим от k. Но в итоге мы всё равно можем утверждать, что предела нет.

ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Перейдем к понятию непрерывности функции. Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в области D и $M_0(x_0; y_0)$ – некоторая внутренняя точка этой области.

Определение

Функция $z = f(x; y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если выполняется условие

$$\lim_{M \to M_0} f(x; y;) = f(x_0; y_0).$$

Определение

Функция $z = f(x; y)$ называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Непрерывность функции в замкнутой области $(\overline{D})$ означает, что она непрерывна во всех точках области, включая и точки ее границы.

Переформулируем определение непрерывности функции на языке «приращений». Для этого
стремление точки $M(x;y)$ к точке $M(x_0;y_0)$ заменим
$x \to x_0, \quad y \to y_0$ или $x - x_0 = \Delta x \to 0, \quad y - y_0 = \Delta y \to 0$,
стремление функции $f(x;y) \to f(x_0;y_0)$ заменим
$\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \to 0$.
Тогда условие непрерывности функции перепишется в виде

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Тем самым, определение непрерывности функции можно сформулировать следующим образом (на языке «приращений»).

Определение

Функция $z = f(x;y)$ называется непрерывной в точке, или в области, если в этой точке, или в каждой точке области, бесконечно малым приращениям ее аргументов соответствует бесконечно малое приращение самой функции.

Непрерывность функции в точке требует существования предела функции в этой точке и поэтому функция $xy/(x^2+y^2)$ не является непрерывной в точке $O(0;0)$, так как предел функции в этой точке не определен.

- Функция $z = xy - y^3$ непрерывна на всей плоскости XOY, так как в любой точке M плоскости ее приращение

$$\Delta z = [(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^3]-[xy-y^3] =$$

$$= xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - y^3 + 3y^2\Delta y - 3y\Delta^2 y + \Delta^3 y - xy + y^3 =$$

$$= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y + 3y^2\Delta y - 3y\Delta^2 y + \Delta^3 y \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

- Функция $z = \dfrac{x+2y-1}{x^2-y}$ будет непрерывной во всех точках, кроме точек параболы $y = x^2$.
- Функция $z = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-y^2}}$ будет непрерывной во всех точках, кроме точек, принадлежащим прямым $y = \pm x$.

Сформулируем свойства непрерывных функций (аналогичные свойствам непрерывных функций одного аргумента).

ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ

Теорема

Алгебраическая сумма, произведение и частное непрерывных функций есть функция непрерывная (в случае частного функция, стоящая в знаменателе, не должна обращаться в 0 в предельной точке).

Теорема (Вейерштрасса)

Всякая непрерывная в замкнутой области функция достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений.

Другими словами, если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области $(\overline{D})$, то обязательно найдутся две точки M_1, M_2 внутри области или на ее границе, такие что $f(M_1) = f_{\text{наим}}$, $f(M_2) = f_{\text{наиб.}}$.

Теорема (Коши)

Непрерывная в области функция, переходя от одного своего значения к другому, необходимо пробегает каждое промежуточное значение.

Определение

Функция $z = f(x; y)$ называется равномерно непрерывной в области (D), если для каждого $\epsilon > 0$ существует не зависящее от точки M число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что выполняется неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \epsilon$ для всех пар точек M и M_0 области, удовлетворяющих условию $|M_0M| < \delta$.

Теорема (Кантора)

Если в ограниченной замкнутой области $(\overline{D})$ функция $f(x; y)$ непрерывна, то она и равномерно непрерывна в этой области.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Если переменной x дать некоторое приращение Δx, а y оставить постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое ***частным приращением функции z по переменной x***:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_y z$, называемое ***частным приращением функции z по переменной y***:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Если существуют пределы:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \equiv z'_x \equiv f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv z'_y \equiv f'_y(x, y),$$

они называются ***частными производными функции*** $z = f(x, y)$ ***по переменным*** x ***и*** y соответственно.

Замечание 1. *Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.*

Замечание 2. *Так как частная производная по любой переменной является производной по этой переменной при условии, что остальные переменные – постоянны, то все правила дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.*

Примеры Найти частные производные функции

$$z = arctg\frac{y}{x}.$$

Решение. Находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$u = \ln^2(x^2+y^2+z^2).$$

Решение. Находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\ln(x^2+y^2+z^2)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\ln(x^2+y^2+z^2)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\ln(x^2+y^2+z^2)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФНП

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Главная часть полного приращения функции $z = f(x, y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, ***называется полным дифференциалом функции*** и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Аналогично, для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ полный дифференциал определяется выражением

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

.

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy$$

Пусть функция $f(x,y,z)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ частные производные первого порядка по всем переменным. Тогда вектор $\{f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\}$ называется *градиентом* функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и обозначается $\nabla f(M_0)$ или $grad\ f(M_0)$.

Замечание. *Символ* "∇" *называется оператором Гамильтона и произносится "намбла".*

Производной функции $z=f(x,y)$ **в точке** $M(x,y)$ ***по направлению вектора*** $\vec{l}=\vec{MM_1}$ называют предел отношения $\dfrac{f(M)-f(M_1)}{MM_1}$ при $MM_1\to 0$:

$$\frac{\partial z}{dl}=\lim_{MM_1\to 0}\frac{f(M)-f(M_1)}{MM_1}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho},\ \text{где}\ \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,.$$

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{dl}=\frac{\left(grad\ \bar{z},l\right)}{|l|}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\,,$$

где α, β - углы, который вектор $\vec{l}$ образует с осями Ox и Oy соответственно.

Связь градиента с производной по направлению.

Теорема: *Пусть задана функция $u = u(x, y, z)$ и поле градиентов*

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ *по направлению некоторого вектора* $\vec{l}$ *равна проекции вектора grad u на вектор* $\vec{l}$.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т. п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Примеры. Найти градиент функции

$$u = tgx - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + ctg\,z \text{ в точке } M_0(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}).$$

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3\cos y - 3\sin^2 y \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{1}{\sin^2 z}$$

и вычислим их значения в точке $M_0(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 2 - 1 = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно, $\nabla f(M_0) = \left\{1, \frac{3}{8}, 0\right\}.$

Пример. Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M_0(3, 2, 1)$ в направлении вектора $\vec{M_0N}$, где $N(5, 4, 2)$.

Решение. Найдем вектор $\vec{M_0N}$ и его направляющие косинусы:

$$\vec{M_0N} = \vec{l} = (5-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{3}, \ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{3}.$$

Вычислим значения частных производных в точке $M_0(3, 2, 1)$:

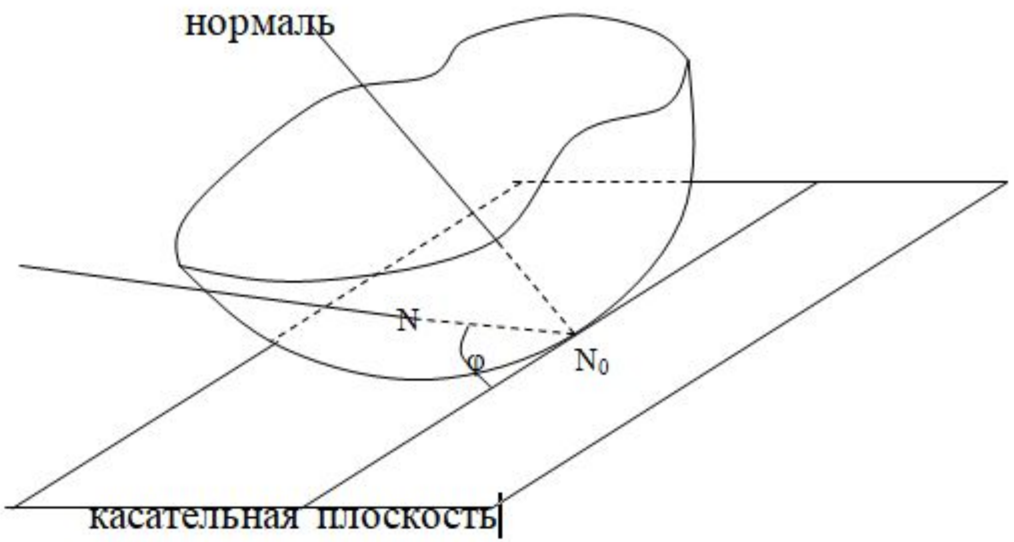
$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2; \ \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 12, \ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 36.$$

Получаем

$$\frac{\partial u}{dl} = 4\cdot\frac{2}{3} + 12\cdot\frac{2}{3} + 36\cdot\frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ.



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется ***касательной плоскостью*** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, ***касательная плоскость*** в точке $N_0(x_0,y_0,(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение ***нормали*** к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Если поверхность задана неявно, уравнением

$$F(x,y,z)=0,$$

то *касательная плоскость* в точке $N_0(x_0, y_0, (x_0, y_0))$ существует и описывается уравнением:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

.

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке ($x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$).

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x-1) + 2(y-1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

Пример. Написать уравнение касательной плоскости и нормали в точке

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-z^2=0 \quad M(4;0;-1).$$

Уравнение касательной плоскости

$$F'_x\big|_M(x-x_0)+F'_y\big|_M(y-y_0)+F'_z\big|_M(z-z_0)=0.$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{2x}{16}\right|_M=\frac{1}{2};\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{2y}{9}\right|_M=0;\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M=-2z\big|_M=2.$$

Уравнение касательной плоскости

$$\frac{1}{2}(x-4)+0(y-0)+2(z+1)=0.$$

$$\frac{1}{2}x-2+2z+2=0 \quad \frac{1}{2}x+2z=0.$$

$$x+4z=0.$$

Уравнение нормали $\dfrac{x-x_0}{F'_x\big|_M}=\dfrac{y-y_0}{F'_y\big|_M}=\dfrac{z-z_0}{F'_z\big|_M}.$

$$\frac{x-4}{1/2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{2}.$$

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно значение

$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Из заданного выражения определим

$\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $\Delta y = 1{,}99 - 2 = -0{,}01$,

$\Delta z = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$.

Найдем значение функции $u(x, y, z) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1{,}2{,}1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.