Геометрия

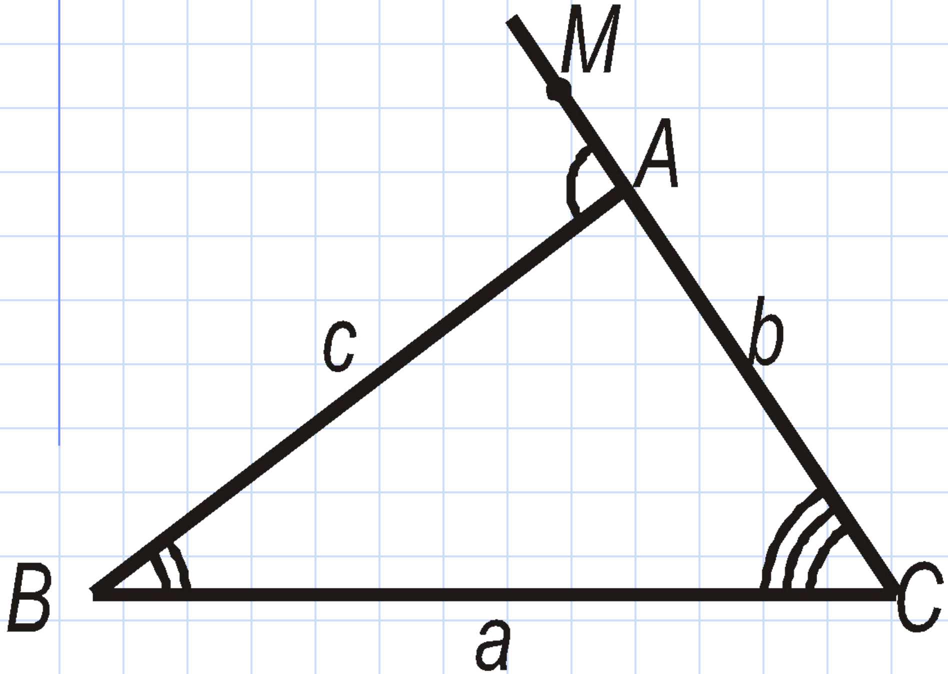
Тема:Треугольник

Выполнила учитель математики
РСШ: Гутникова Е. А.

Цели и задачи

- **Раскрыть содержание понятие треугольник и его элементов.**
- **Сформировать умения наблюдать, подмечать закономерности, обобщать, проводить рассуждения по аналогии.**

Неравенство треугольника



$$\angle BAM = \angle B + \angle C$$

- В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон
- *a-b<c<a + b,*

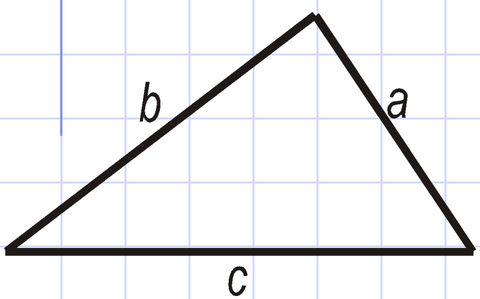
где а, *b, c* — длины сторон треугольника, причем а > *b*

- ***Внешний угол*** треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов

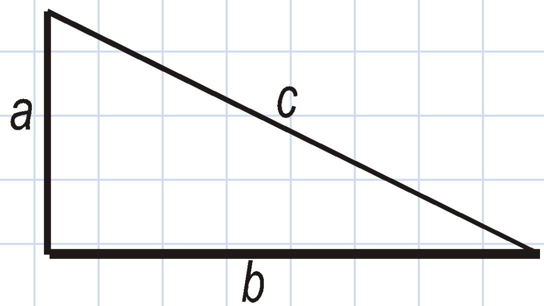
Сумма углов треугольника
180°

- **В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла — большая сторона**

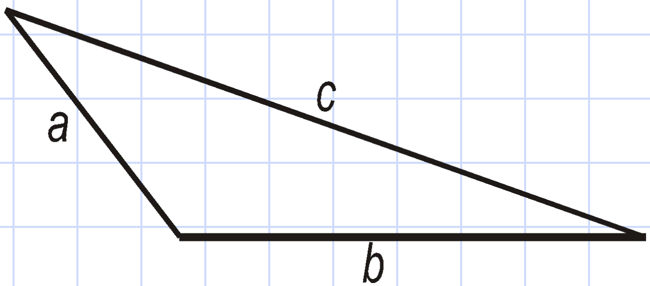
$$a^2 + b^2 > c^2 \qquad a^2 + b^2 = c^2 \qquad a^2 + b^2 < c^2$$



остроугольный



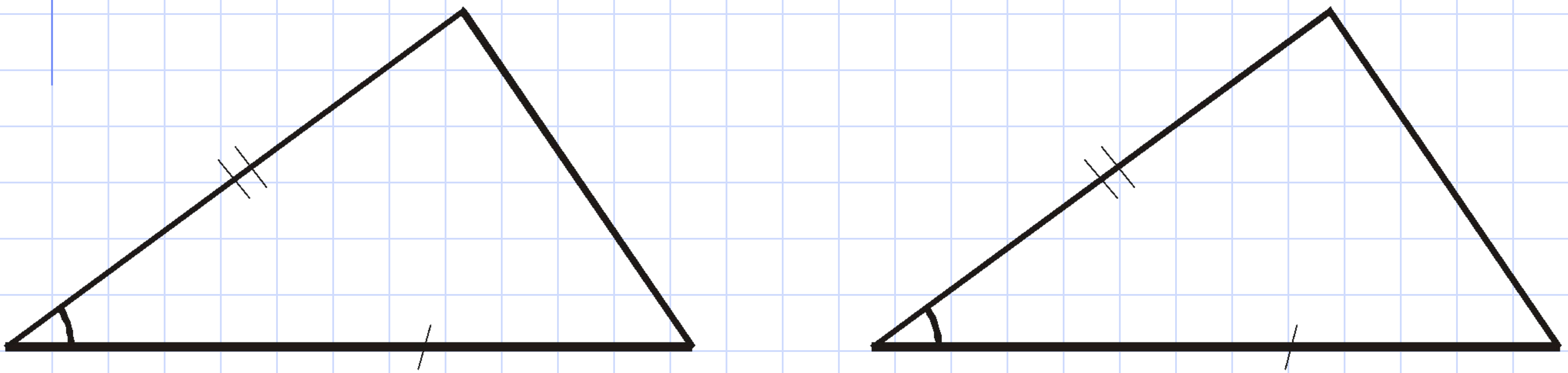
прямоугольный



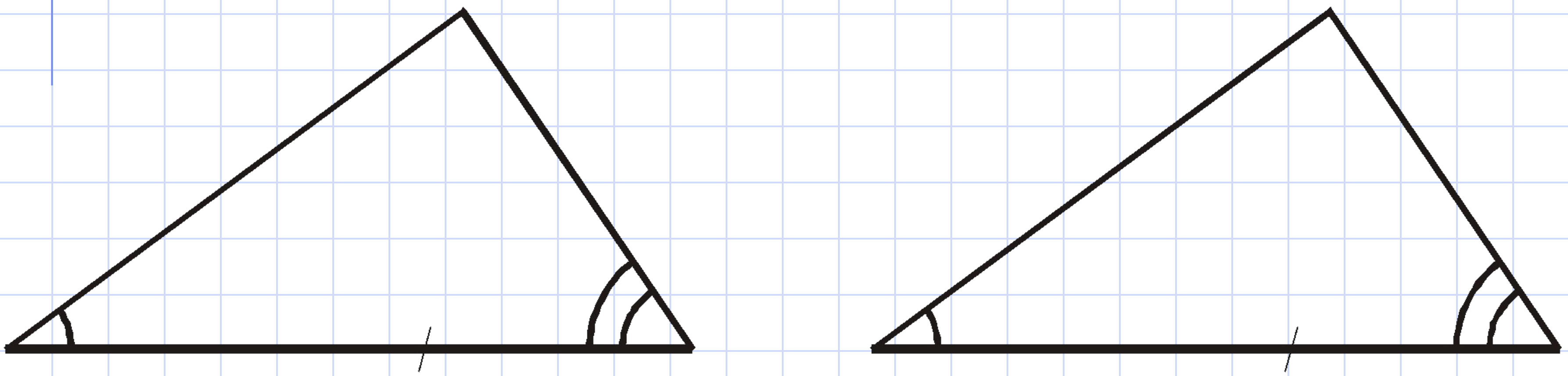
тупоугольный

Признаки равенства треугольников

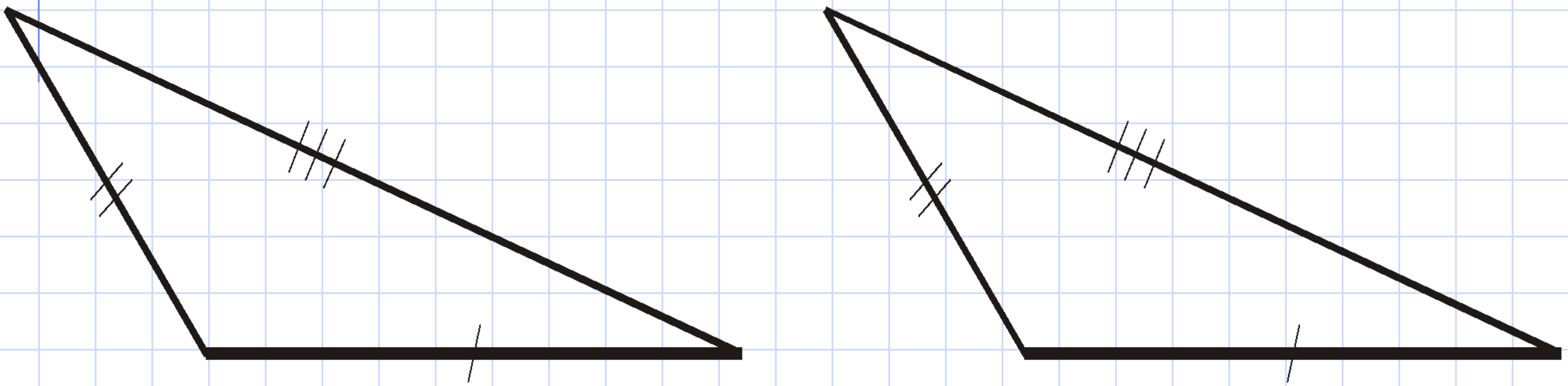
- По двум сторонам и углу между ними (С У С)



- **По стороне и двум прилежащим к ней углам (УСУ)**

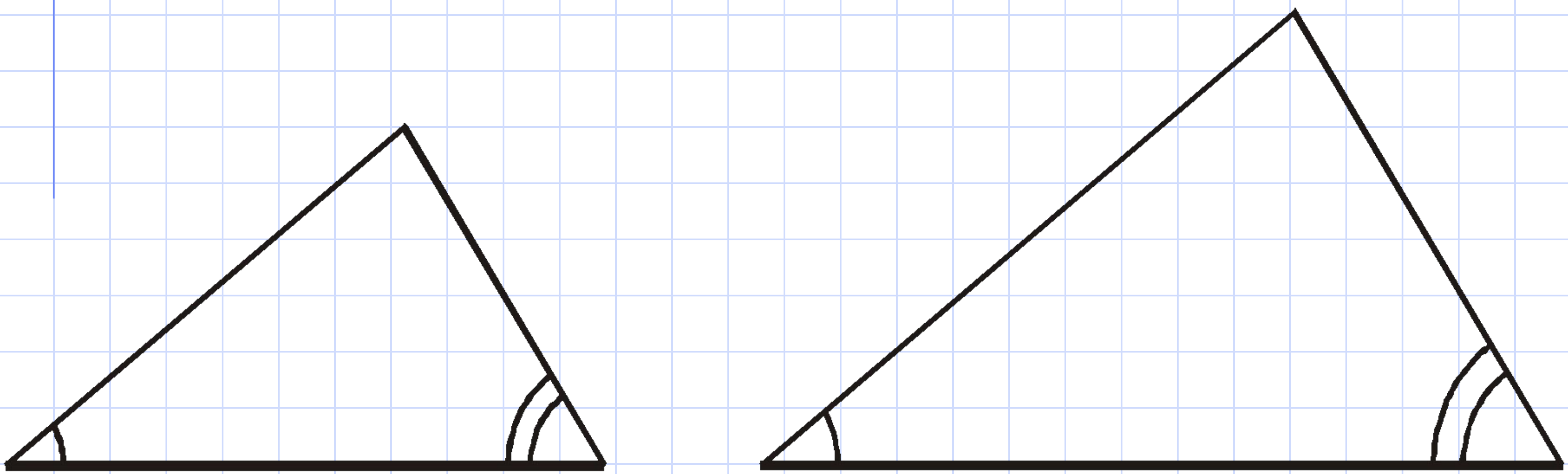


- **По трем сторонам (С С С)**

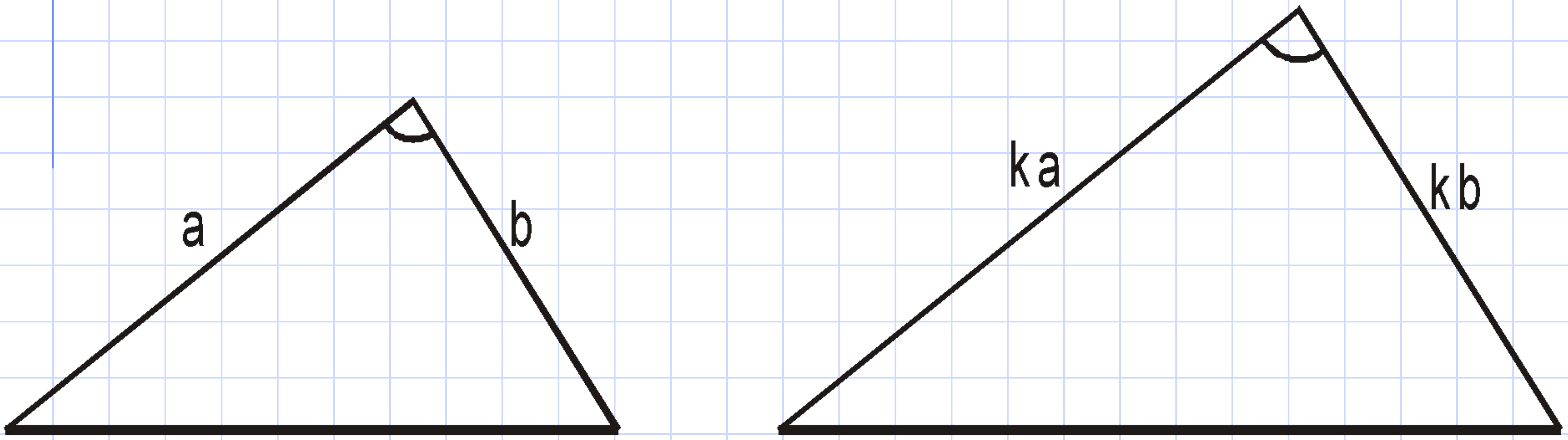


Признаки подобия треугольников

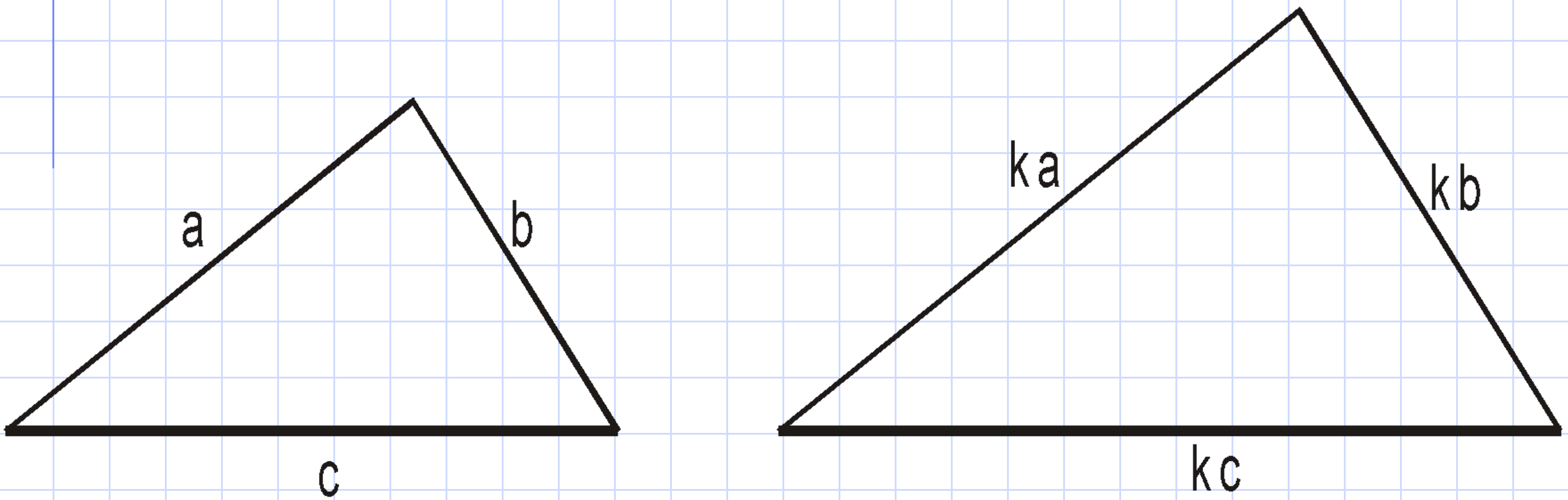
- По двум углам (У У)



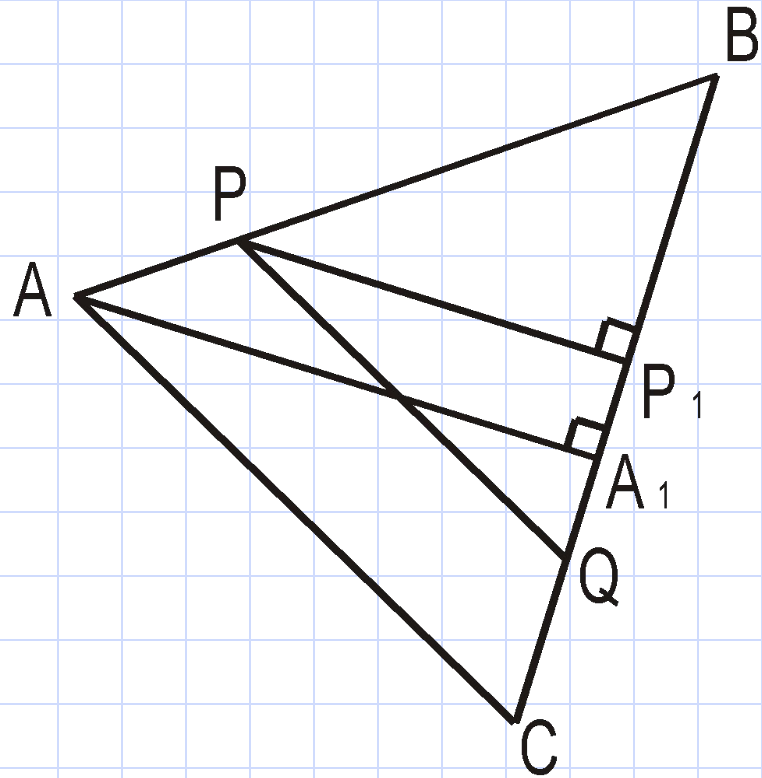
- **По двум сторонам и углу между ними (С У С)**



- **По трем сторонам (С С С)**



- **Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.**
- ***Сходственные линейные элементы*** **подобных треугольников** ***пропорциональны сходственным сторонам.***
- ***Периметры*** **подобных треугольников относятся как** ***сходственные стороны.***
- ***Площади*** **подобных треугольников относятся как** ***квадраты сходственных сторон***



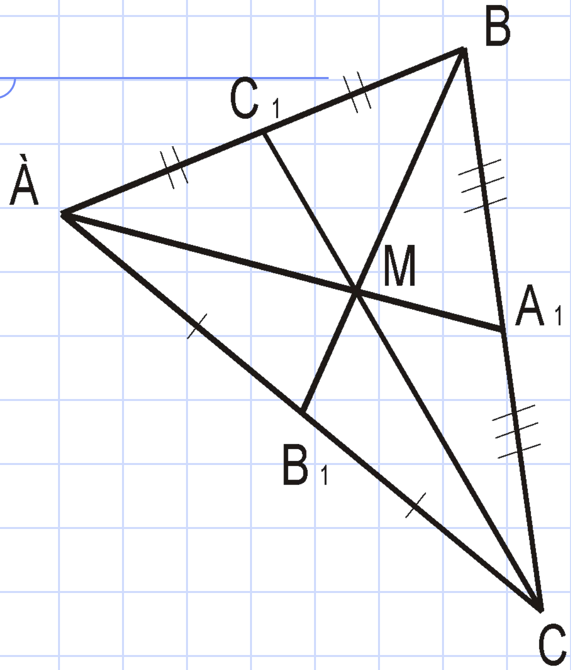
$$PQ \parallel AC \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PBQ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PQ} = \frac{BC}{BQ} = k - \text{коэффициент подобия}$$

$$PP_1 \parallel AA_1 \Rightarrow \frac{AA_1}{PP_1} = k$$

$$\frac{AB + AC + BC}{PB + PQ + BQ} = k; \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta PBQ}} = k^2$$

Медиана



- *Медианой* треугольника называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противолежащей стороны
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке *(центре тяжести* треугольника) и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины
- Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников

$$AM : MA_1 = BM : MB_1 =$$
$$= CM : MC_1 = 2:1$$
$$AA_1 = m_a; BC = a; AC = b; AB = c$$
$$AA_1^2 = m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 + a^2}{4}$$

Высота

- *Высотой* треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону.
- Все высоты треугольника пересекаются в одной точке — *ортоцентре* треугольника

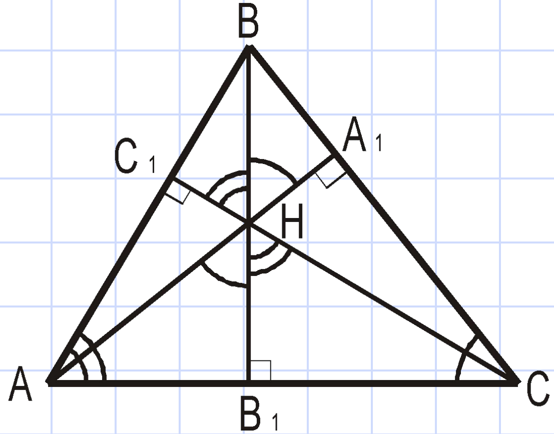
AA_1, BB_1, CC_1 – высота Δ ABC

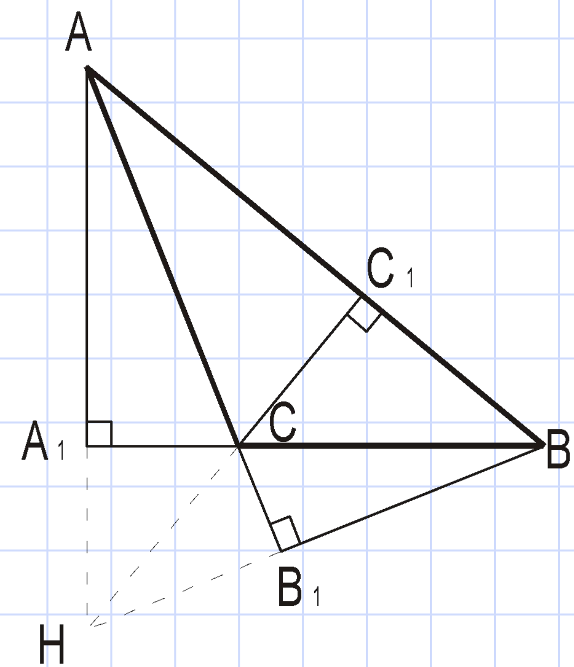
$AA_1 = h_a; BB_1 = h_b; CC_1 = h_c$

h – ортоцентр

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

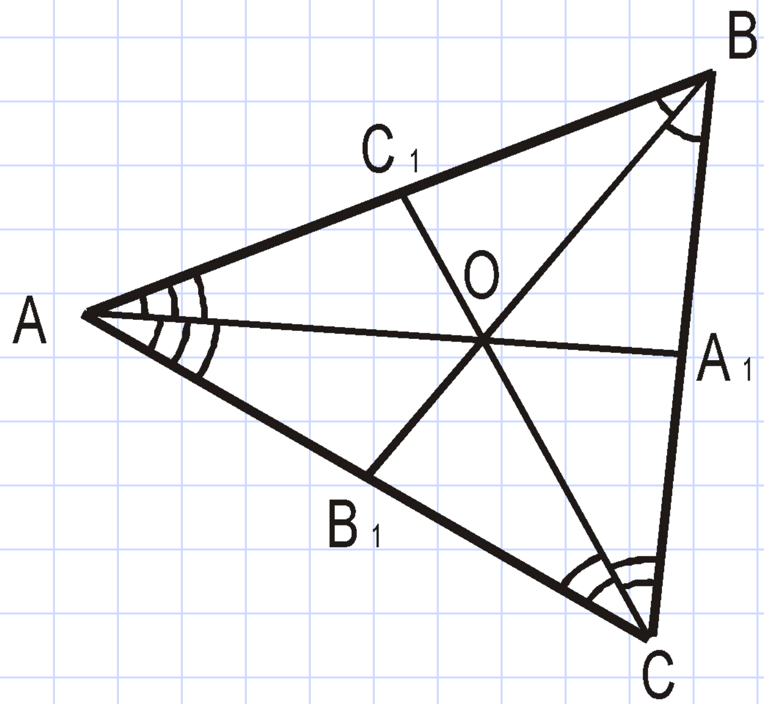
r – радиус вписанной окружности





Биссектриса

- ***Биссектрисой*** **треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника.**
- **Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — *центре вписанной* в треугольник *окружности.***
- **Биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника**

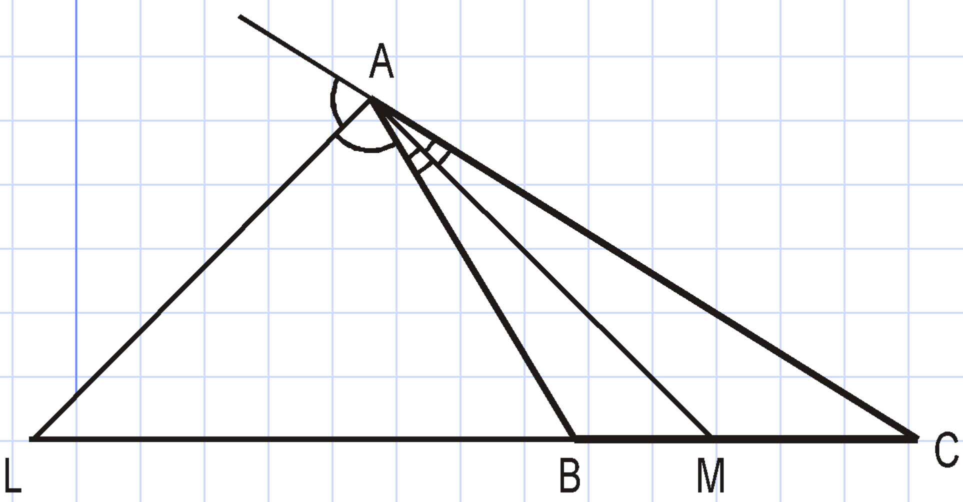


$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow CA_1 = \frac{ab}{b+c};$$

$$A_1B = \frac{ac}{b+c}; \frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$$

$$AA_1^2 = AB \cdot AC - A_1B \cdot A_1C$$

$$AA_1 = \frac{2 \cdot AB \cdot AC}{AB + AC} \cos\frac{A}{2}$$



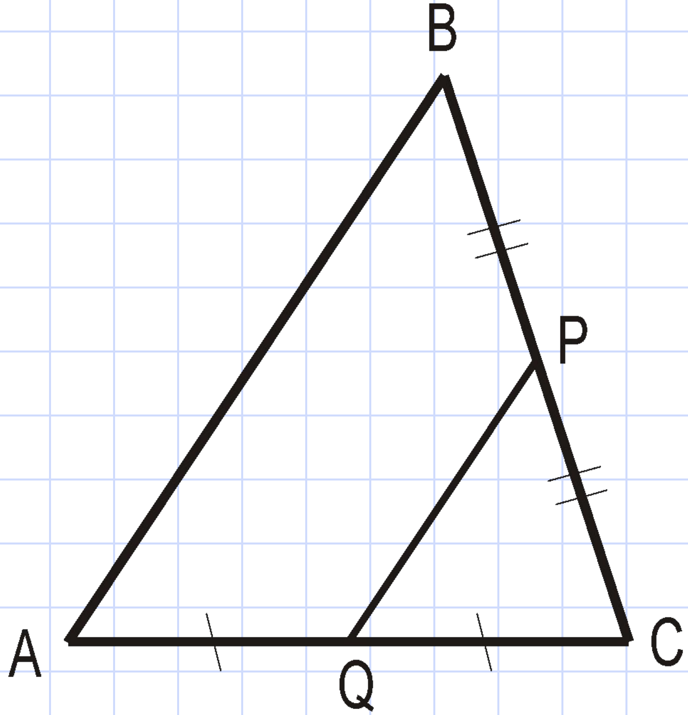
$$\angle LAM = 90^o$$

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

- **Биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего углов треугольника перпендикулярны.**
- **Биссектриса внешнего угла неравнобедренного треугольника пересекает продолжение противолежащей стороны в точке, от стоящей от концов этой стороны на расстояния, пропорциональные длинам двух других сторон**

Средняя линия

- ***Средней линией*** **треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.**
- **Средняя линия** ***параллельна третьей*** **стороне и равна ее** ***половине***

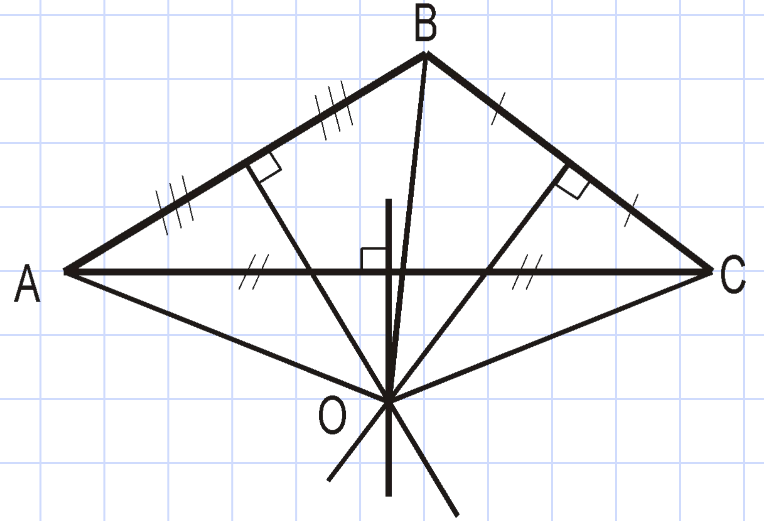


$$PQ \parallel AB$$

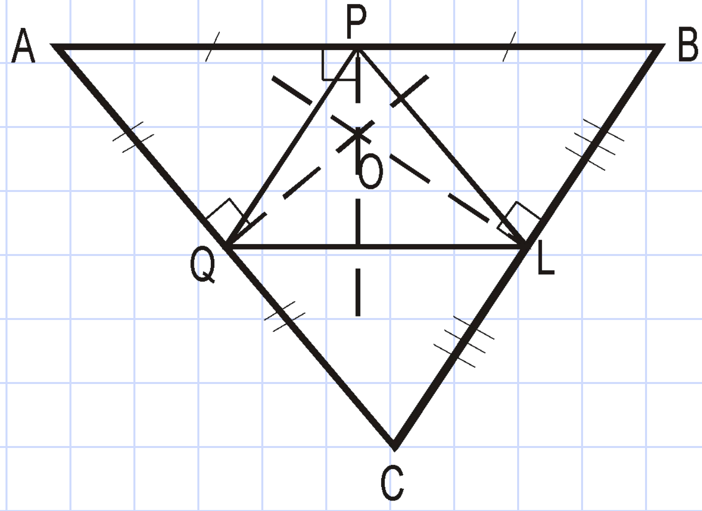
$$PQ = \frac{1}{2} AB$$

Серединный перпендикуляр

- ***Серединным перпендикуляром*** **называется прямая, перпендикулярная стороне треугольника и делящая ее пополам.**
- **Все серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке — *центре описанной* около треугольника *окружности.* Около каждого треугольника можно описать окружность и притом только одну.**
- **Точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника является точкой пересечения высот треугольника, образованного средними линиями данного.**



$$AO = BO = CO = R$$

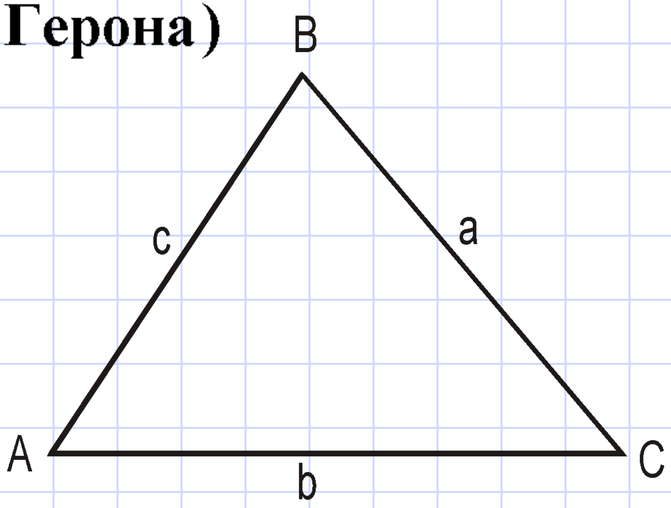


Площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \text{(формула Герона)}$$



$$S=rp$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)-\textit{полупериметр}$$

r – *радиус вписанной окружности*

R – *радиус описанной окружности*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

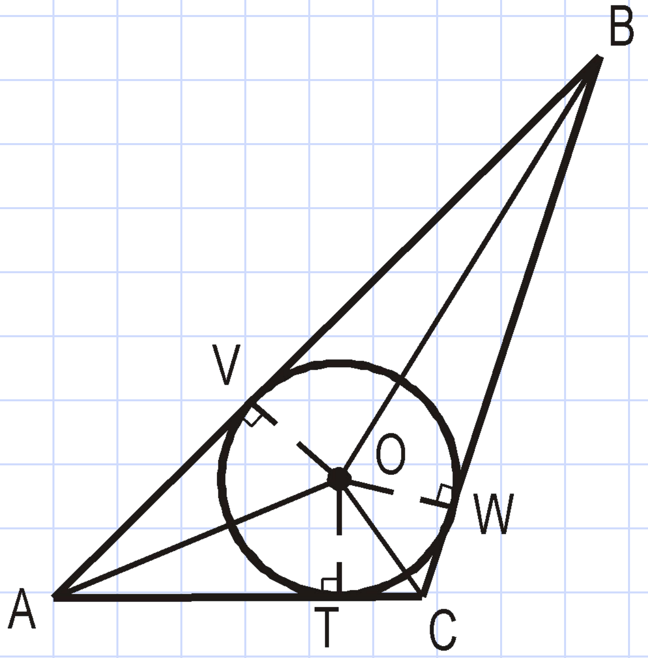
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

- **Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.**

- **Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов.**

Вписанная окружность

- **В каждый треугольник можно *вписать* окружность и притом только *одну*.**
- **Ее центр — *точка пересечения биссектрис*.**
- **Формулы для вычисления радиуса.**



$$r = \frac{S}{p}$$

$$r = (p-a)\cdot tg\frac{A}{2} = (p-b)\cdot tg\frac{B}{2} = (p-c)\cdot tg\frac{C}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$p -$ *полупериметр*

$$OT \perp AC; OV \perp AB; OW \perp BC$$

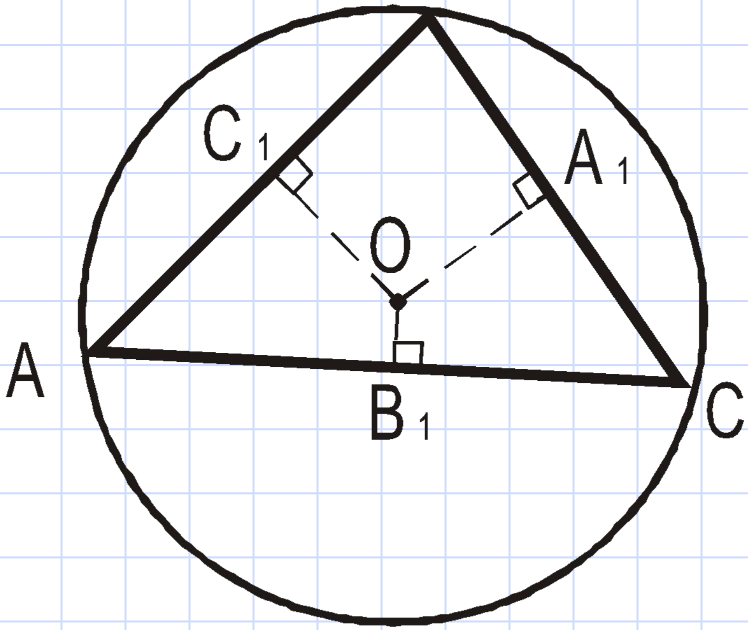
$$AV = AT = p-a$$

$$BV = BW = p-b$$

$$CW = CT = p-c$$

Описанная окружность

- **Около каждого треугольника можно описать окружность и притом только одну.**
- **Ее центр — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Формулы для вычисления радиуса.**



$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$R = \frac{abc}{2S}$$

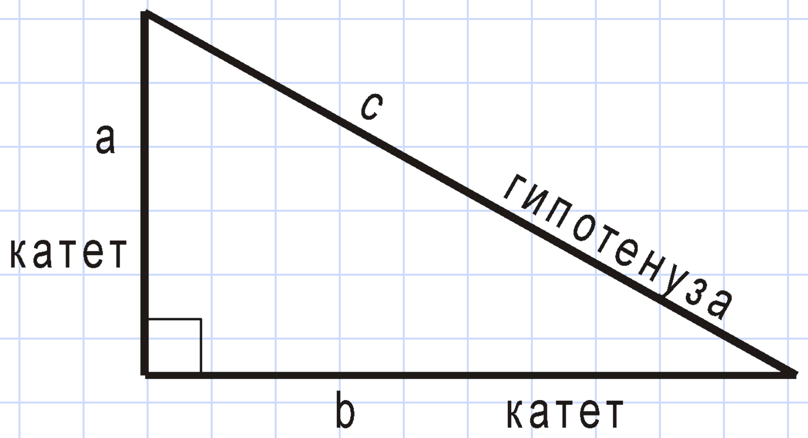
$$AB_1 = B_1C; AC_1 = C_1B; BA_1 = A_1C$$

$$OA_1 \perp BC; OB_1 \perp AC; OC_1 = AB$$

$$OA = OB = OC = R$$

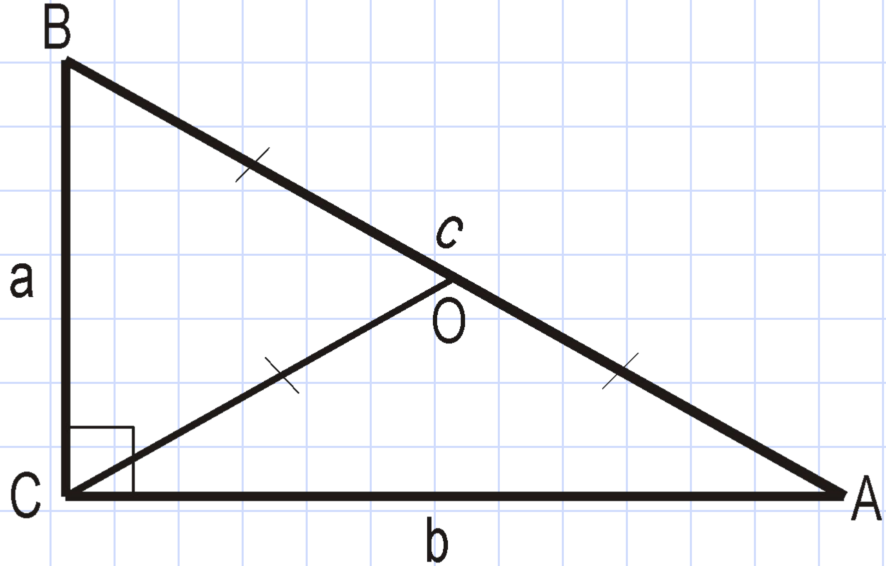
Прямоугольный треугольник

- **Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами*.**
- ***Теорема Пифагора* Квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.** $c^2 = a^2 + b^2$



Свойства прямоугольного треугольника

- **Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.**
- **Только в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на стороне треугольника (совпадает с серединой гипотенузы)**



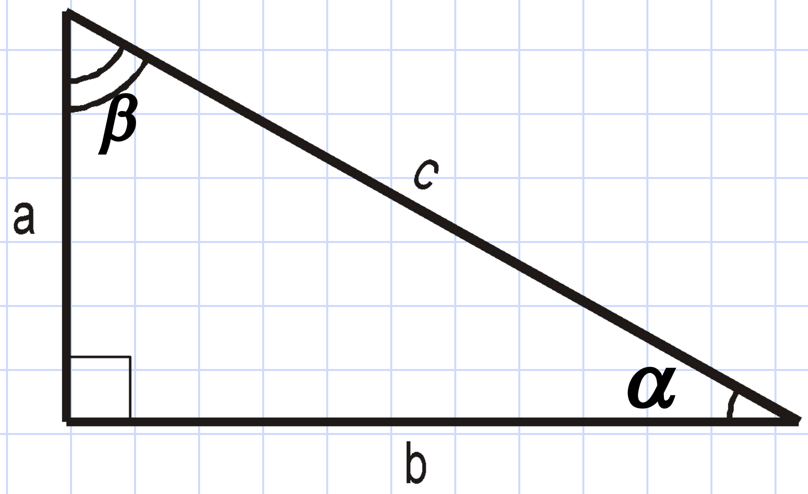
$$OA = OB = OC = R = \frac{1}{2}c$$

Площадь прямоугольного треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad S = \frac{1}{2}ch,$$

h – высота, проведенная к гипотенузе

Тригонометрические функции острых углов прямоугольного треугольника



- ***Синусом*** **острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.**
- ***Косинусом*** **острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.**
- ***Тангенсом*** **острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.**
- ***Котангенсом*** **острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему**

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ tg\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\beta = 90^o - \alpha$$

$$\sin\beta = \sin(90^o - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(90^o - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha$$

$$tg\beta = tg(90^o - \alpha) = \frac{b}{a} = ctg\alpha$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*не опр*	0

Признаки прямоугольных треугольников

- **Если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник прямоугольный. Если медиана треугольника равна половине соответствующей ей стороны, то треугольник прямоугольный**

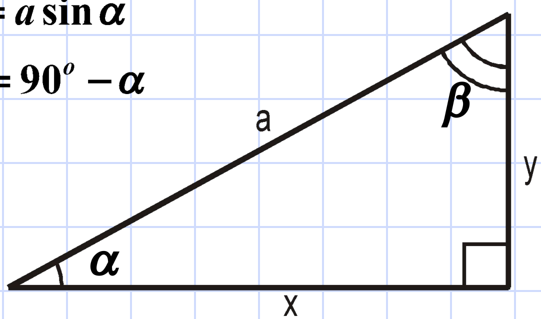
Решение прямоугольных треугольников

Дано : гипотенуза и острый угол

$x = a\cos\alpha$

$y = a\sin\alpha$

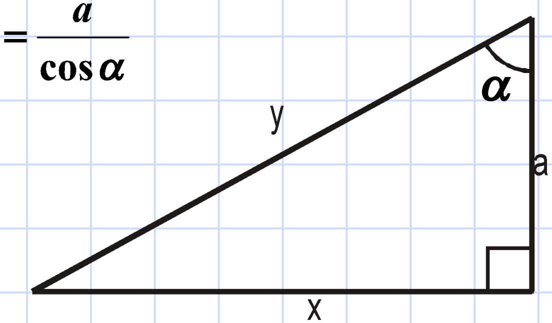
$\beta = 90^o - \alpha$



Дано : катет и острый угол.

$x = a\ tg\alpha$

$y = \dfrac{a}{\cos\alpha}$



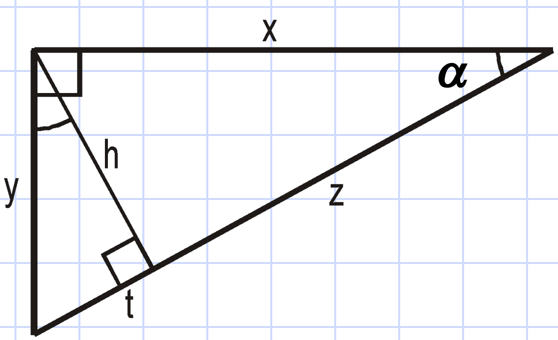
Дано : высота, опущенная на гипотенузу, и острый угол

$y = \dfrac{h}{\cos\alpha}$

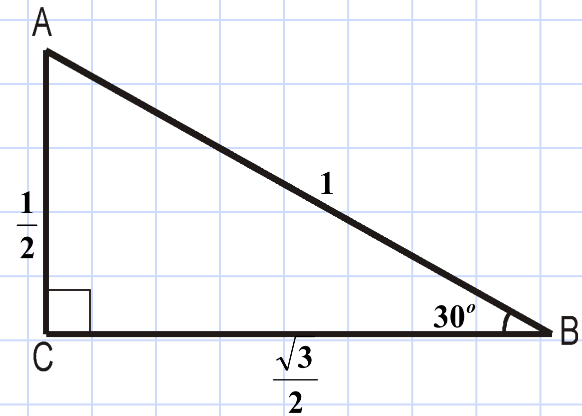
$x = \dfrac{h}{\sin\alpha}$

$z = h\ ctg\alpha$

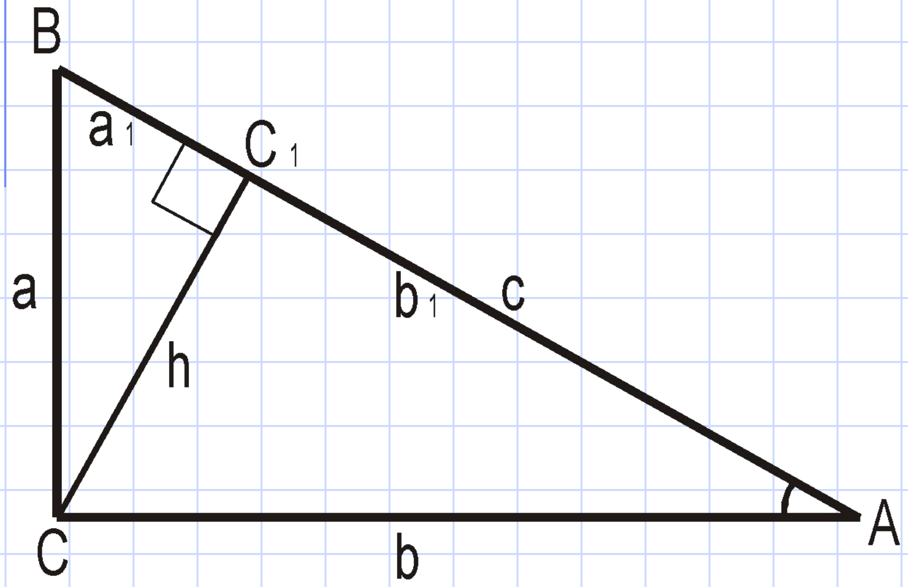
$t = h\ tg\alpha$



Катет, лежащий против угла 30^o, равен половине гипотенузы.



Соотношения в прямоугольном треугольнике



$$BC^2 = BC_1 \cdot AB; \quad a^2 = a_1 \cdot c$$

$$AC^2 = AC_1 \cdot AB; \quad b^2 = b_1 \cdot c$$

$$CC_1^2 = BC_1 \cdot C_1A; \quad h^2 = a_1 \cdot b_1$$

$$h = \frac{ab}{c}$$

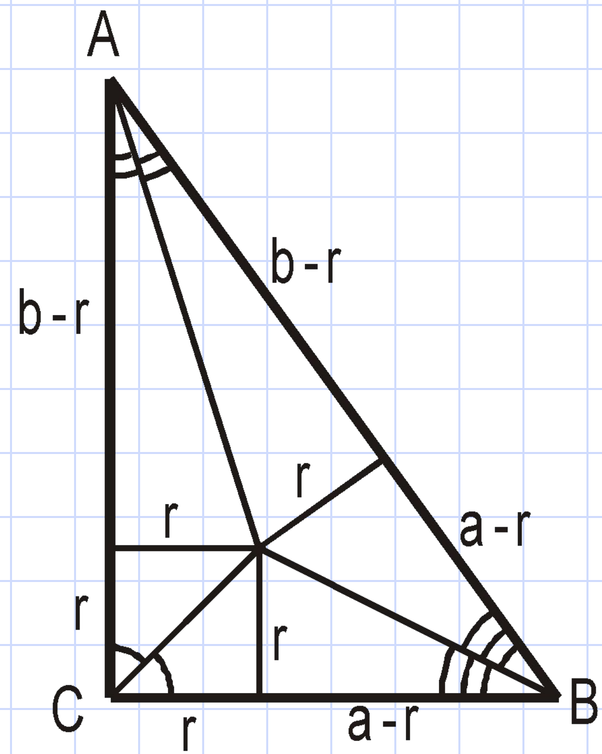
Вычисление радиусов вписанной и описанной окружности

$$2R = AB = c = (b-r)+(a-r) \Rightarrow$$

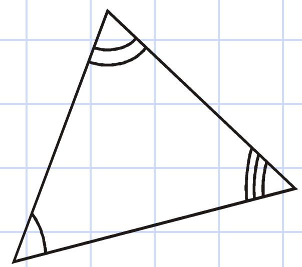
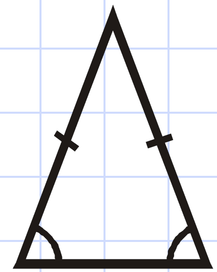
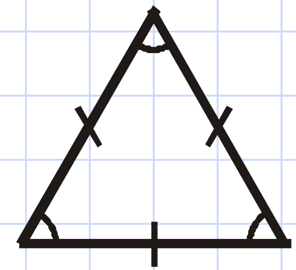
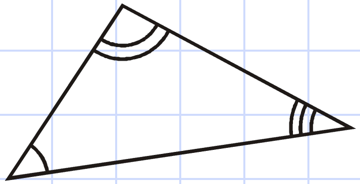
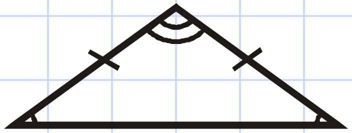
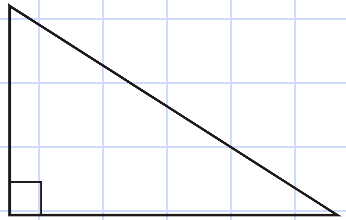
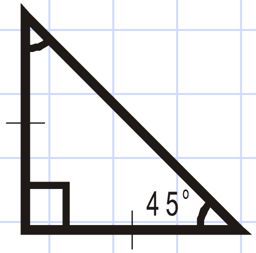
$$\Rightarrow 2R = a+b-2r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{a+b-c}{2} = p-c$$

$$2(R+r) = a+b$$

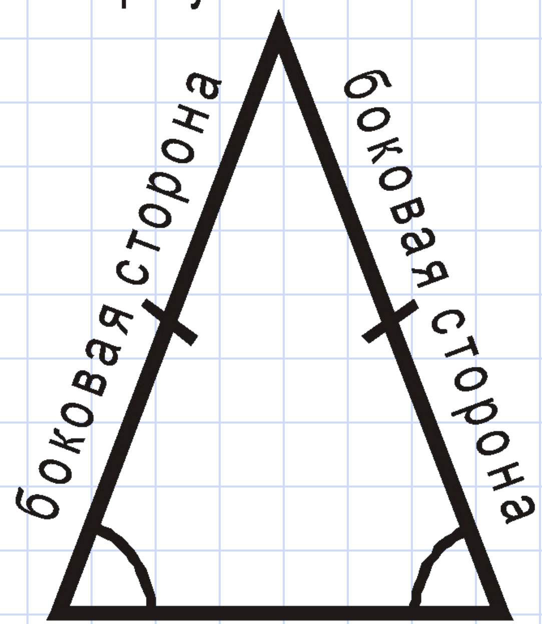


Треугольники классифицируют по сторонам:
разносторонние, равнобедренные, равносторонние;
***а* также по углам: *остроугольные, тупоугольные* и *прямоугольные*.**

Треугольники	**разносторонние**	**равнобедренные**	**равносторонние**
Остроугольные			
Тупоугольные			—
Прямоугольные			—

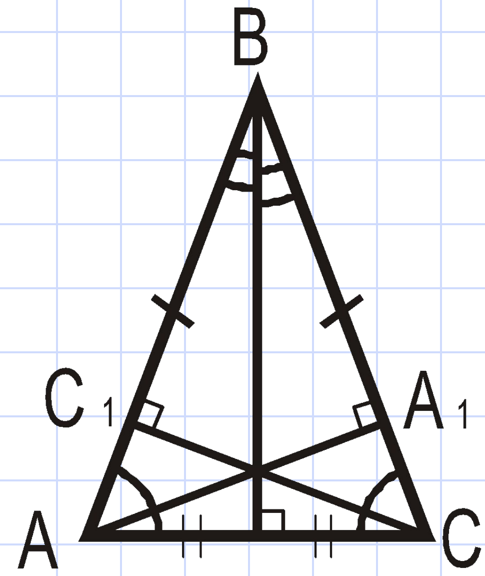
Равнобедренный треугольник

- ***Равнобедренным*** **треугольником называется треугольник с двумя равными сторонами.**
- **Общая вершина равных *(боковых)* сторон называется *вершиной равнобедренного треугольника*, а третья сторона *основанием*.**



Свойства равнобедренного треугольника

- **Углы при основании равны.**
- **Высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является медианой и биссектрисой (осью симметрии).**
- **Высоты (биссектрисы, медианы), проведенные к боковым сторонам, равны**

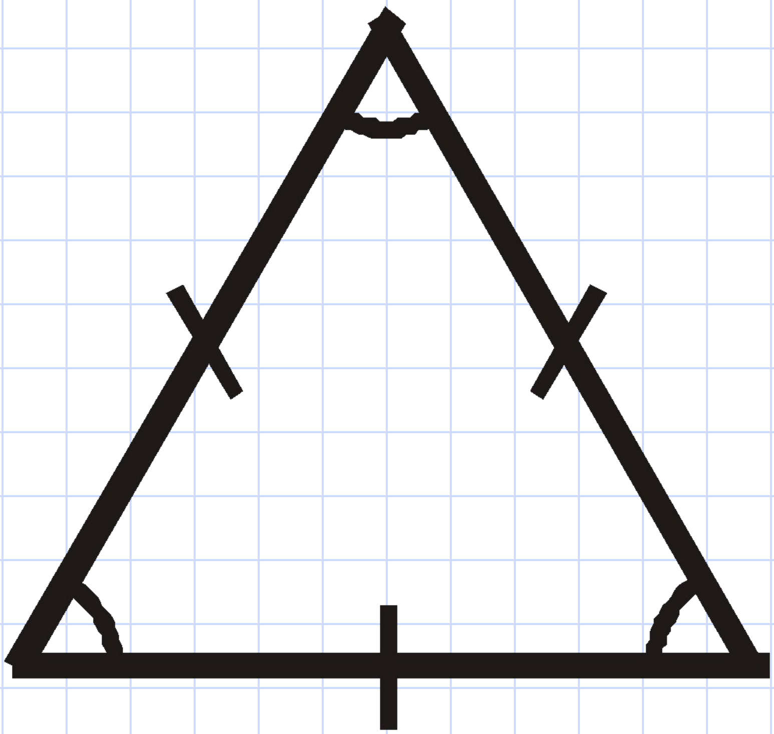


$$\left.\begin{array}{l} AA_1 \perp BC \\ CC_1 \perp AB \end{array}\right. \Leftrightarrow AA_1 = CC_1$$

Все эти свойства равнобедренного треугольника обратимы и могут быть использованы для получения *признаков равнобедренного треугольника*

Правильный треугольник

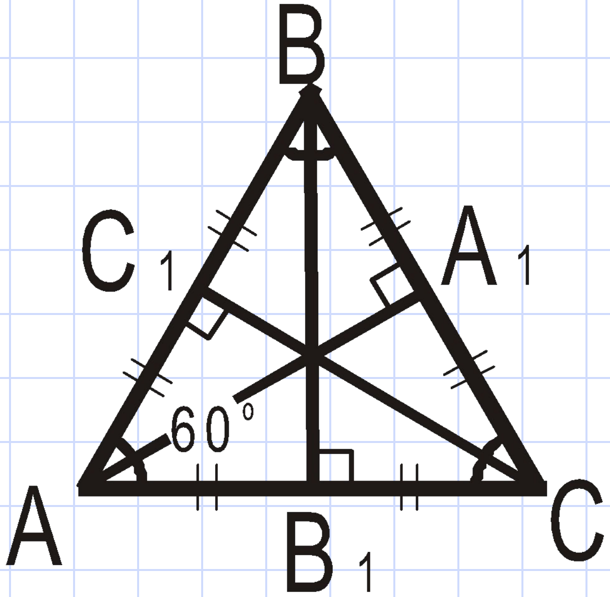
- ***Правильным (равносторонним)*** **называется треугольник, все стороны которого равны**



Свойства правильного треугольника

- **Все углы равностороннего треугольника равны 60°.**
- **Только в правильном треугольнике совпадают точки пересечения медиан, биссектрис, высот, серединных перпендикуляров. Эта точка называется *центром правильного треугольника* и является центром вписанной и описанной окружностей.**
- **Центр правильного треугольника делит его высоты в отношении 2:1, считая от вершины.**
- **Только в правильном треугольнике**

$$R = 2r = \frac{2}{3}h = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



$$AB = BC = AC = a$$

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

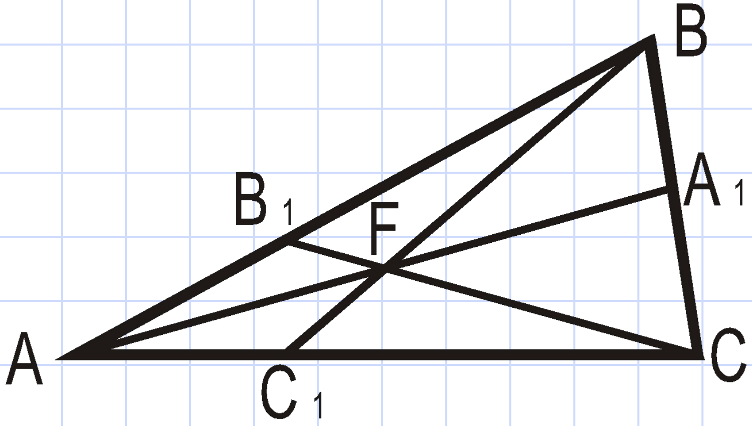
Площадь равностороннего треугольника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Теорема Чевы

Отрезки *AA₁*, *BB₁*, *CC₁* тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда

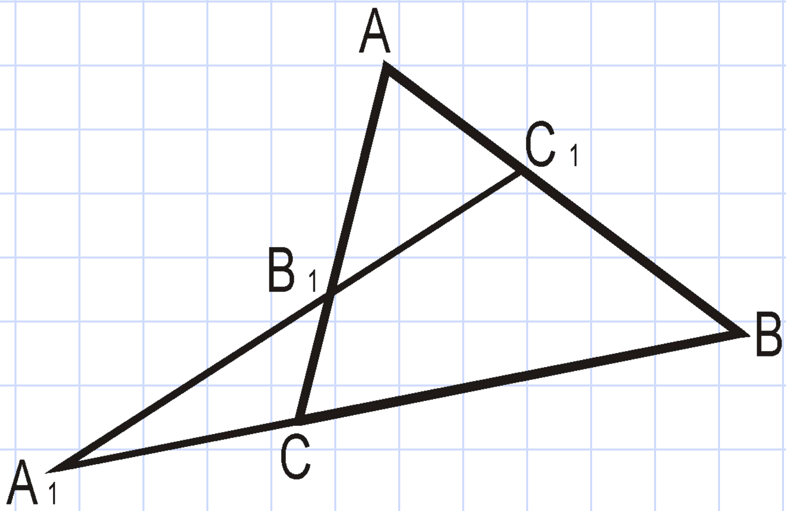
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



Теорема Менелая

Точки *A_1*, *B_1*, *C_1* тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда

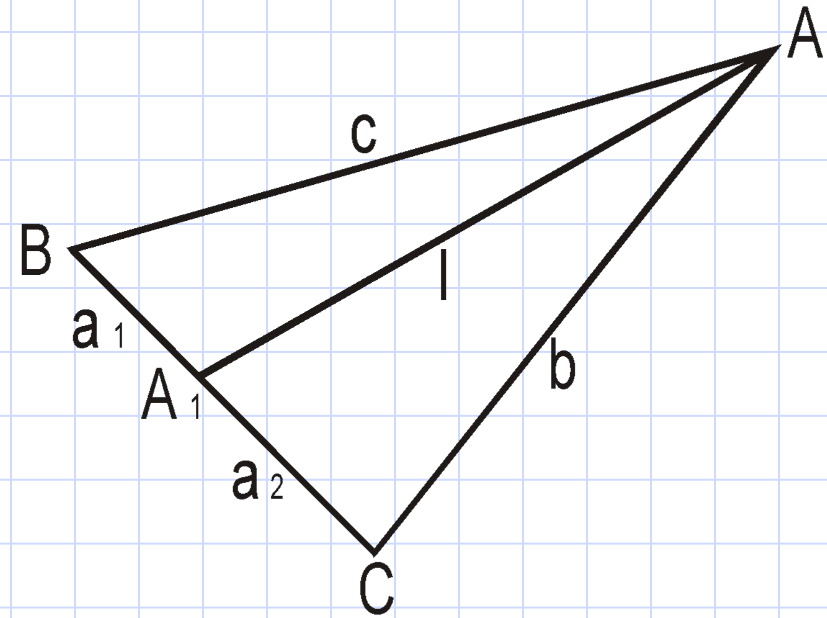
$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}=1$$



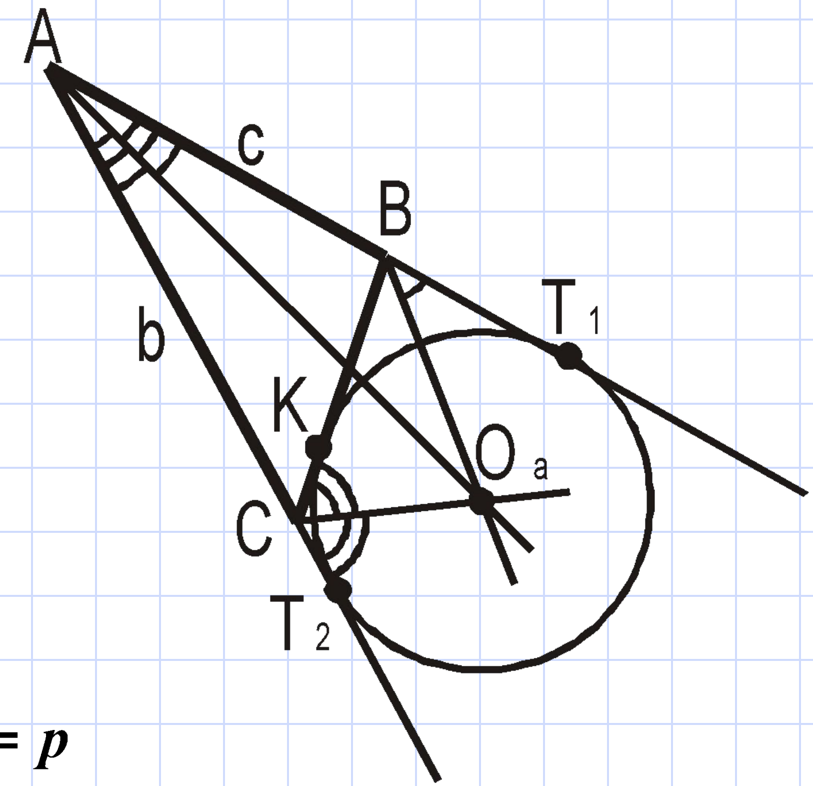
Теорема Стюарта

$AA_1 = l$, тогда

$$l^2 \frac{b^2 a_1 + c^2 a_2}{a_1 + a_2} - a_1 a_2$$



Центры *вневписанных окружностей* лежат в точках пересечения биссектрисы внутреннего и двух биссектрис внешних углов треугольника.



$$AT_1 = AT_2 = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = p$$

$$BK = p - c; \quad CK = p - b$$