Лекция 12
Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов.

Основные понятия

Пусть задана бесконечная последовательность чисел:

$$u_1,\ u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots .$$

Выражение вида $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) называется *числовым рядом.*

Числа $u_1,\ u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots .$ называются членами ряда, а u_n - общим членом ряда.

Зная общий член ряда можно найти все его члены.

Пример. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2^n}$. Найти его первые три члена.

Решение.

$$u_1 = \frac{5 \cdot 1 + 1}{2^1} = \frac{6}{2} = 3, \quad u_2 = \frac{5 \cdot 2 + 1}{2^2} = \frac{11}{4}, \quad u_3 = \frac{5 \cdot 3 + 1}{2^3} = \frac{16}{8} = 2$$

Т.е. ряд можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2^n} = 3 + \frac{11}{4} + 2 + \ldots$$

Также можно решить обратную задачу: зная несколько первых членов ряда можно составить формулу для его общего члена.

Пример 1. Составить формулу общего члена ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+$$

Решение: Знаменатели членов данного ряда являются квадратами натуральных чисел, поэтому общий член данного ряда будет иметь вид:

$$u_n=\frac{1}{n^2}$$

Пример 2. Составить формулу общего члена ряда

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots+$$

Решение. Числители членов этого ряда – это четные числа вида $2n$, а знаменатели - числа, которые можно получить по формуле $3n+2$, (из формулы общего члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+d(n-1)$ первый член которой $a_1=5$, а разность $d=3$).

Т.е. общий член ряда имеет вид: $u_n=\frac{2n}{3n+2}$

Сумма первых n членов ряда (1) называется *n-й частичной суммой* ряда и обозначается: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \; \ldots.$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (1), то ряд называется *сходящимся*, а этот предел называется *суммой ряда.*

Если предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то числовой ряд называется *расходящимся*.

Пример. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots +$.

Решение. Составляем общий член ряда: $u_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Находим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Вычисляем предел n-ой частичной суммы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Таким образом, ряд сходится и его сумма равна $S = 1$.

Свойства рядов

Пусть дан числовой ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1)

<u>*Свойство 1*</u>. *Е*сли ряд (1) сходится и его сумма равна S, то ряд

$$cu_1 + cu_2 + cu_3 + \ldots + cu_n + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} cu_n$$

где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS.

<u>*Свойство 2.*</u> Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и их суммы

соответственно равны S_1 и S_2, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ и их суммы равны $S_1 \pm S_2$.

<u>*Свойство 3.*</u> Если у ряда (1) отбросить конечное число членов, то полученный ряд и ряд (1) сходятся или расходятся одновременно.

Ряд вида

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots . = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

называется *остатком ряда* (1).

Ряд геометрической прогрессии

Ряд вида

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (a \neq 0) \qquad (2)$$

называется *рядом геометрической прогрессии.*

Данный ряд часто используется при исследовании сходимости рядов.

Сумма первых *n* членов прогрессии равна: $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$

Находим предел этой суммы: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q} - a \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{1-q}$

В зависимости от величины q возможны следующие случаи:

1. Если $|q| < 1$, $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, ряд (2) сходится и его сумма равна: $S = \dfrac{a}{1-q}$

2. Если $|q| > 1$, $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд (2) расходится.

3. Если $|q| = 1$, то ряд (2) принимает вид $a + a + a + \ldots + a + \ldots \quad (q = 1)$ (для него $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = n \cdot a = \infty$, т.е ряд расходится) или $a - a + a - a + \ldots \quad (q = -1)$ (в этом случае $S_n = 0$ при n четном и $S_n = a$ при n нечетном, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд (2) расходится

Признаки сходимости числовых рядов

Необходимый признак. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости). Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{3n+4}$.

Решение. Находим предел общего члена ряда: $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{3n+4} = \frac{5}{3} \neq 0$. Следовательно, ряд расходится.

Необходимое условие сходимости не гарантирует сходимость ряда. Выполнение необходимого признака означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Примером такого ряда является ряд вида $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ (3)

Этот ряд называется *гармоническим*.

Достаточные признаки сходимости рядов

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (4)$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (5)$$

Признак сравнения 1. Если для числовых рядов (4) и (5) выполняется неравенство $u_n \le v_n$, то из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (4), а из расходимости ряда (4) следует расходимость ряда (5).

Данный признак справедлив также и в тех случаях, когда неравенство выполняется не для всех членов ряда, а начиная с некоторого номера N.

Признак сравнения 2. Если для рядов (4) и (5) существует конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 < A < \infty)$$

то ряды (4) и (5) сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если для числового ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Если $l = 1$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Признак Даламбера применяют когда общий член ряда содержит выражение $n!$ или a^n.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+2}$.

Решение.

Общий член ряда $u_n = \frac{4^n}{n+2}$, тогда $u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)+2} = \frac{4^{n+1}}{n+3}$.

Находим предел:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^{n+1}}{n+3} \div \frac{4^n}{n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^{n+1} \cdot (n+2)}{(n+3) \cdot 4^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4 \cdot (n+2)}{n+3} = 4 > 1$$

Следовательно, ряд расходится.

Интегральный призанк сходимости Коши.

Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), u_3 = f(3), ..., u_n = f(n), ...$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ будет сходиться или расходиться в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Пример. Исследовать на сходимость гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение.

Общий член ряда $u_n = \frac{1}{n}$, тогда функция $f(x) = \frac{1}{x}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1;\infty)$.

Тогда

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$

Т.е. несобственный интеграл расходится, значит исследуемый гармонический ряд тоже расходится

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Если среди членов ряда есть как положительные , так и отрицательные члены, то ряд называется *знакопеременным.*

Если два соседних члена знакопеременного ряда имеют противоположные знаки, то ряд называется *знакочередующимся:*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

или

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots + (-1)^{n} u_n + \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} u_n$$

Признак Лейбница. Если для знакочередующегося ряда выполняются условия:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине, т.е.

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$$

2) общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Если хотя бы одно из условий признака Лейбница не выполняется, то знакочередующийся ряд расходится.

Пример 1. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$.

Решение. Находим несколько первых членов ряда и сравниваем их:

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \frac{1}{9} > \frac{1}{11} > ....$$

Первое условие признака Лейбница выполняется.

Вычисляем предел:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3} = 0$$

Второе условие тоже выполнено, значит исходный знакочередующийся ряд сходится.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

Решение. Проверяем оба условия признака Лейбница:

1) Сравниваем члены ряда:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < ...$$

Первое условие признака Лейбница не выполняется, поэтому ряд является расходящимся.

Абсолютная и условная сходимость

Если знакочередующийся ряд сходится , т. е.для него выполнены условия признака Лейбница и ряд, составленный из абсолютных величин исходного знакочередующегося ряда тоже сходится, то знакочередующийся ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Если же знакочередующийся ряд сходится , т. е.для него выполнены условия признака Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин исходного знакочередующегося ряда расходится, то знакочередующийся ряд называется *условно сходящимся*.

Пример 1. Исследовать знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}$ на сходимость.

Решение. Запишем данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{18}-\frac{1}{81}+\frac{1}{324}-\dots .$$

Члены этого ряда убывают по абсолютной величине:

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{18}>\frac{1}{81}>\frac{1}{324}\dots .$$

Общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}=0 .$$

Значит, знакочередующийся ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин членов этого ряда:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\frac{1}{81}+\frac{1}{324}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n} .$$

Сходимость этого ряда исследуем по признаку Даламбера:

$$u_n=\frac{1}{n\cdot 3^n}, \qquad u_{n+}=\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}=\frac{1}{3}<1 .$$

Значит, ряд сходится, поэтому знакочередующийся ряд абсолютно сходится.

Пример 2. Исследовать знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ на сходимость.

Решение. Представляем ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots .$$

Так как

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots \quad \text{и} \quad \lim_{n \leftarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Составляем ряд из абсолютных величин

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Сходимость этого ряда исследуем по интегральному признаку:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to \infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} \left(2\sqrt{b} - 2\right) = \infty .$$

То есть ряд расходится, следовательно исходный знакочередующийся ряд является условно сходящимся.

Функциональные ряды

Если члены ряда являются функциями от аргумента x:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), \qquad (10.6)$$

то такие ряды называются *функциональными.*

Совокупность всех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимостью ряда*.

Функциональный ряд вида, членами которого являются степенные функции, называется *степенным рядом*.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (10.7)$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, ..$ называются *коэффициентами степенного ряда.*

Ряд (10.7) разложен по степеням x.

Рассматриваются также степенные ряды, разложенные по степеням $(x - x_0)$:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (10.8)$$

При $x = 0$ всякий степенной ряд вида (10.7) или (10.8) сходится. Поэтому область сходимости степенного ряда содержит по крайней мере одну точку $(x = 0)$.

Об области сходимости степенного ряда можно судить из теоремы:

<u>Теорема Абеля.</u> Если степенной ряд (10.7) сходится в точке $x = x_0$, то он сходится при всех значениях x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд (10.7) расходится в точке $x = x_0$, то он расходится при всех x, для которых $|x| > |x_0|$.

Для всякого степенного ряда (10.7), который имеет ненулевые точки сходимости и точки расходимости, существует такое число $R > 0$, что ряд сходится во всех точках интервала $(-R; R)$ и расходится вне этого интервала.

Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а число R называется *радиусом сходимости*. Если $R = 0$, то степенной ряд (10.7) сходится только при $x = 0$., если $R = \infty$, то степенной ряд (10.7) сходится на всей числовой прямой.

Для ряда (10.8) интервал сходимости имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Для нахождения области сходимости степенного ряда необходимо сначала найти радиус сходимости, затем записать интервал сходимости и исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = \pm R$.

Для отыскания радиуса сходимости можно пользоваться следующими способами:

1) Если среди коэффициентов ряда $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ нет равных нулю, т.е ряд содержит все целые положительные степени x (или $x - x_0$), то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{или} \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2) Если степенной ряд содержит не все степени x, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно по признаку Даламбера.

Пример 1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$.

Решение. Радиус сходимости степенного ряда найдем по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

$$a_n=\frac{n!}{4^n},\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{4^{n+1}}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{4^n}\div\frac{(n+1)!}{4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,4^{n+1}}{4^n(n+1)!}=$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=4\cdot 0=0.$$

Т.е. степенной ряд сходится только при $x=0$.

Пример 2. Найти интервал сходимости ряда $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots$

Решение. Так как $a_n=a_{n+1}=1$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1.$$

Следовательно, интервал сходимости ряда является интервал (-1;1).

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Решение. Находим сначала радиус сходимости: $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$. Тогда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$.

Интервал сходимости имеет вид $(-1;1)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x=\pm 1$.

При $x=-1$ получим знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\dots.$$

Сходимость этого ряда исследуем по признаку Лейбница: так как члены ряда убывают по абсолютной величине

$$1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\frac{1}{16}>\frac{1}{25}>\dots \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to}\frac{1}{n^2}=0,$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Поэтому точка $x=-1$ принадлежит области сходимости ряда.

При $x=1$ получим знакочередующийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, сходимость которого исследуем по интегральному признаку: $u_n=\frac{1}{n^2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то ряд тоже сходится. Значит, точка $x=1$ принадлежит области сходимости.

Следовательно, областью сходимости степенного ряда будет интервал $[-1;1]$.

Пример 4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$ и исследовать его сходимость на концах интервала сходимости.

Решение. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\right|\div\left|\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|\cdot n}{3(n+1)}=\frac{|x-1|}{3}.$$

Следовательно, данный ряд сходится при

$$\frac{|x-1|}{3}<1,\ \text{т.е. при}\quad |x-1|<3$$

или

$$-3<x-1<3\qquad,\qquad -2<x<4.$$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-2$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно, а при $x=4$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как гармонический.

Значит область сходимости ряда $[-2;4)$.

Пример 5. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{3}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{3^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{3^n}+\ldots.$$

Решение. Данный ряд содержит не все степени x, поэтому для определения интервала сходимости применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{3^{n+1}}\frac{3^n}{x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{3}\right|=\frac{x^2}{3}.$$

Таким образом, ряд сходится при

$$\frac{x^2}{3}<1, \qquad x^2<3, \qquad |x|<\sqrt{3}.$$

Итак, интервал сходимости ряда имеет вид $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

При $x=\pm\sqrt{3}$ получаем ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\pm\sqrt{3}\right)^{2n-1}}{3^n}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\ldots..,$$

которые расходятся. Следовательно, точки $x=\pm\sqrt{3}$ не принадлежат области сходимости ряда.

Поэтому областью сходимости ряда будет интервал $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Ряды Фурье

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (10.9)$$

называется *тригонометрическим рядом.*

Числа $a_0, a_n, b_n \ (n = 1,2,\ldots.)$ называются *коэффициентами тригонометрического ряда.*

Если ряд (10.9) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π, т.е. $f(x) = f(x + 2\pi)$).

Для представления $f(x)$ в виде ряда (10.7) определим коэффициенты тригонометрического ряда.

Пусть функция $f(x)$ периодическая и представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi;\pi)$, т.е. является суммой этого ряда

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (10.10)$$

Проинтегрируем обе части равенства (10.10)

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nxdx\right),$$

тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx=\frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}(\sin\pi n-\sin(-\pi n))=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}(\cos\pi n-\cos(-\pi n))=-\frac{1}{n}(\cos\pi n-\cos\pi n)=0.$$

Следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi a_0,$$

откуда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \qquad (10.11)$$

Для определения коэффициентов a_n умножим обе части (10.10) на $\cos kx$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx\right).$$

При $n \neq k$ имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\right)dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(n+k)x + \sin(n-k)x\right)dx = 0.$$

При $n = k$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}dx = \pi$$

Следовательно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx = a_n\pi$$

откуда при $k = n$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (10.12)$$

Умножая обе части (10.10) на $\sin kx$ и интегрируя , получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (10.13)$$

Коэффициенты, определяемые по формулам (10.11), (10.12), (10.13) называются *коэффициентами Фурье*, а тригонометрический ряд (10.9) с такими коэффициентами называется *рядом Фурье.*

Теорема Дирихле. Если 2π - периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывная, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва;
2) $f(x)$ кусочно-монотонная, т.е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1) в точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2) в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т.е.равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3) на концах отрезка, т.е. в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2}.$$

Если функция $f(x)$ имеющая период 2π на отрезке $[0;2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для неё имеет место разложение (10.10), где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \qquad (10.14)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 1,2,3,\dots \qquad (10.15)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,3,\dots \qquad (10.16)$$

Пример 1. Периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π определена следующим образом: $f(x)=x, \quad -\pi \le x \le \pi$. Разложить эту функцию в ряд Фурье.

Решение. Эта функция кусочно монотонная и ограниченная. Следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье.

По формуле (10.11) найдем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Применяя формулу (10.12) найдем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx=\left| \begin{array}{ll} u=x, & dv=\cos nx dx \\ du=dx, & v=\dfrac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right]=0.$$

На основании формулы (10.13) получим:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx=\left| \begin{array}{ll} u=x, & dv=\sin nx dx \\ du=dx, & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right]=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Тогда получим ряд $\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$

Или $\quad f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right].$

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Если разлагаемая в ряд Фурье функция является четной или нечетной, то вычисление коэффициентов ряда Фурье упрощается.

Известно, что

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \textit{четная} \\ 0, & f(x) - \textit{нечетная} \end{cases}.$$

Тогда, если функция $f(x)$ - четная, то функция $f(x)\cos nx$ - четная, а $f(x)\sin nx$ - нечетная. Если же $f(x)$ - нечетная, то функция $f(x)\cos nx$ - нечетная, а $f(x)\sin nx$ - четная.

С учетом этого из формул (10.11) - (10.13) получаем формулы для определения коэффициентов ряда Фурье четной функции

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx \qquad (10.17)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad b_n = 0 \qquad (10.18)$$

Таким образом, ряд Фурье для четной функции будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (10.19)$$

Если функция нечетная, то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \qquad (10.20)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \qquad (10.21)$$

т.е. ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (10.22)$$

Пример. Разложить в ряд Фурье 2π - периодическую функцию $f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi; \pi)$.

Решение. Данная функция является четной, поэтому ряд Фурье будет иметь вид (10.19). Находим коэффициенты ряда по формулам (10.17) и (10.18):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2, \quad dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx, \quad v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n} x^2 \sin nx \Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \left| \begin{array}{c} u = x, \quad dv = \sin nx dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{1}{n} x \cos nx \Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \frac{4}{\pi n^2}\left(\pi \cos \pi n \right) = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Значит, ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx.$$