Лекция 7

ПЛАН ЛЕКЦИИ

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- ***Общие представления о колебательных и волновых процессах.***
- ***Гармонические колебания и их характеристики.***
- ***Гармонический осциллятор.***
- ***Примеры гармонических осцилляторов. Математический маятник***

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Общие представления о колебательных и волновых процессах.

Колебания *- это процессы, повторяющиеся во времени.*

Колебательные процессы наблюдаются в системах различной физической природы. Примеры: колебания груза на пружине, колебания маятника, колебания тока в электрическом контуре и т. д.

В системах с бесконечным числом степеней свободы (сплошная среда) колебательный процесс распространяется в пространстве. В пространстве распространяется *волна*. Волна характеризуется периодичностью как во времени, так и в пространстве. Примеры: звуковые волны, электромагнитные волны и т.д.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Общие представления о колебательных и волновых процессах.

Использование колебательных процессов:
- часы (механические и электронные);
- радиоприемники и телевизоры (колебательные контуры);
- связь (электромагнитные волны);
- другое.

Типы колебаний: свободные и вынужденные, автоколебания и параметрические колебания.

Свободные (*собственные)* - колебания, которые развиваются в системе, представленной самой себе после того, как она была выведена из состояния равновесия. Совершаются за счет первоначально сообщенной энергии. Пример: колебания груза на пружине в поле сил тяготения.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Общие представления о колебательных и волновых процессах.

Вынужденные - колебания, в процессе которых происходит периодическое воздействие внешнего источника энергии. Пример – электромагнитные колебания в контуре, куда включена периодическая ЭДС.

Автоколебания поддерживаются за счет внешнего источника энергии. Но: автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая поступление энергии в такт с колебаниями. Пример – механические часы. Храповой механизм часов подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Внешний источник энергии - сжатая пружина либо опускающийся груз.

Параметрические колебания. Внешнее воздействие периодически изменяет какой либо параметр системы, определяющий ее свойства. Пример: в процессе колебаний маятника может периодически изменяться длина нити, на которой подвешен маятник.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Гармонические колебания и их характеристики

Колебания различной природы подчиняются одинаковым законам. Пример: колебания груза, подвешенного на пружине, и изменение заряда конденсатора в колебательном контуре происходят по одному и тому же закону.

Гармонические колебания - колеблющаяся величина изменяется со временем по закону косинуса (синуса).

Наиболее простой вид колебаний. Изучение гармонических колебаний важно по следующим причинам:

а) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому;

б) различные периодические процессы можно представить как наложение периодических колебаний.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Гармонические колебания и их характеристики

Гармонические колебания некоторой величины x описываются уравнениями вида:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_{02})$$

где A - амплитуда колебания, т.е. наибольшее положительное отклонение величины x от ее значения в состоянии равновесия;

ω - круговая или циклическая частота;

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_{01}$ и $\varphi = \omega_0 t + \varphi_{02}$ - фазы колебаний, характеризующие текущее отклонение величины x от равновесия.

При $t = 0$ $\varphi = \varphi_{01}$ или $\varphi = \varphi_{02}$, т.е. φ_{01} и φ_{02} - это начальные фазы колебаний.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Гармонические колебания и их характеристики

Связь между параметрами гармонических колебаний:

$$\omega = 2\pi\upsilon = \frac{2\pi}{T}$$

где υ - частота колебаний (количество колебаний в единицу времени), T - период колебаний, или время полного колебания.

Скорость и ускорение колеблющейся материальной точки.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Скорость и ускорение колеблющейся точки изменяются со временем по гармоническому закону.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

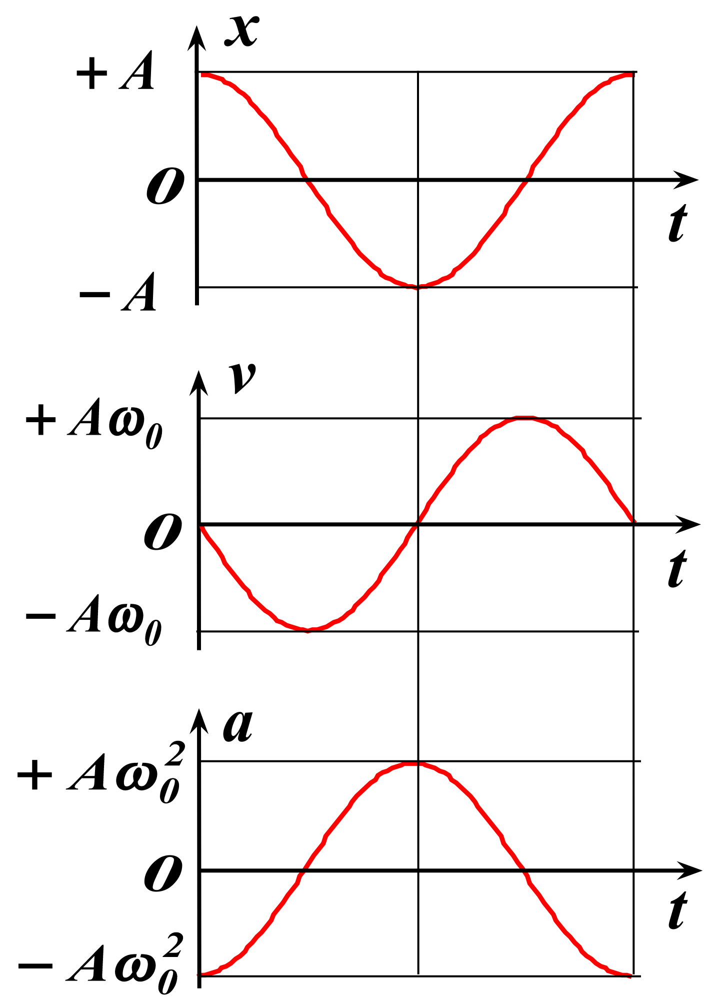
Гармонические колебания

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$$

$$a = A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

Колебания скорости опережают колебания координаты на угол $\pi/2$, колебания ускорения происходят в противофазе с колебаниями координаты.



ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонические колебания

Кинетическая энергия колеблющейся материальной точки массой m

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Произведем простые тригонометрические преобразования для того, чтобы иметь в правой части cos. Воспользуемся формулой из тригонометрии:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}, \longrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

В итоге получим: $$\boxed{K = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\left[1-\cos 2(\omega_0 t+\varphi)\right]}$$

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонические колебания

Для определения потенциальной энергии Π материальной точки, запишем выражение для силы F, действующей на точку. По второму закону Ньютона

$$F = ma = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Поскольку $\cos(\omega_0 t + \varphi) = x$, $F = -m\omega_0^2 x$.

Такая зависимость характерна для *упругой* силы. Работа этой силы при бесконечно малом изменении x равна приращению потенциальной энергии со знаком минус:

$$\Pi = -\int_0^x F dx$$

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонические колебания

$$\Pi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Произведем преобразования по аналогии с выводом формулы для ***К***. Воспользуемся соотношением из тригонометрии:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}, \longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

В итоге получим:

$$\boxed{\Pi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}[1+\cos 2(\omega_0 t + \varphi)]}$$

Полная энергия:

$$E = K + \Pi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$$

$$\left[\begin{aligned} K &= \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}[1-\cos 2(\omega_0 t + \varphi)] \\ \Pi &= \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}[1+\cos 2(\omega_0 t + \varphi)] \end{aligned}\right]$$

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонические колебания

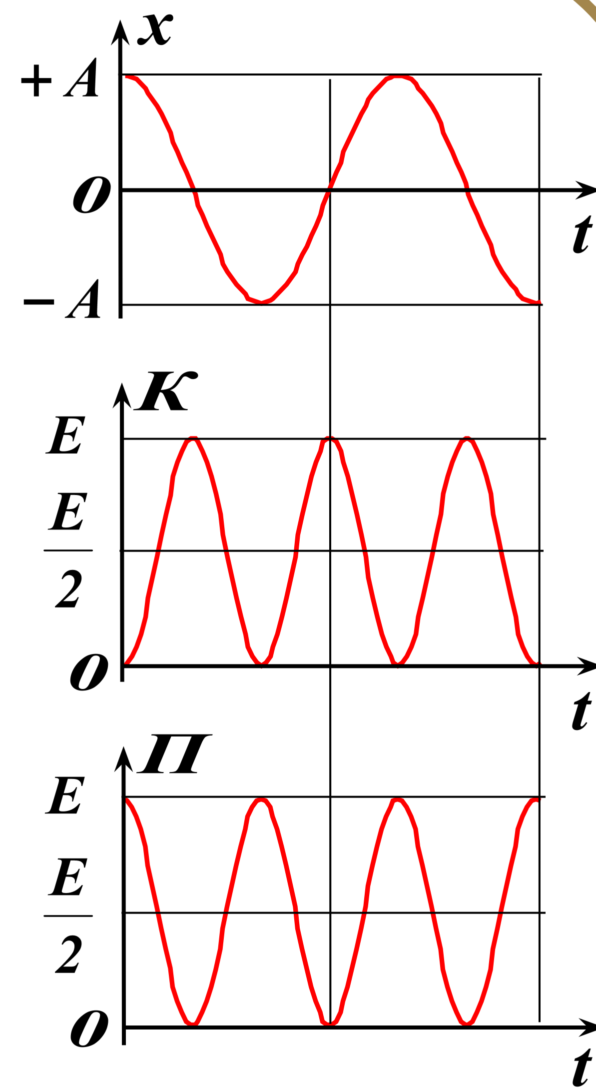
$$K = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

$$\Pi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\left[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

$$E = K + \Pi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$$

Кинетическая и потенциальная энергии периодически изменяются от 0 до E по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$

Колебания кинетической энергии происходят в противофазе с колебаниями потенциальной энергии, а их сумма в любой момент времени одинакова (упругая сила *консервативна*, следовательно, выполняется закон сохранения энергии).



ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор

Любую колебательную систему называют *осциллятором*. Если поведение осциллятора подчиняется гармоническому закону, то *гармоническим осциллятором*.

Определим вид уравнения гармонического осциллятора. Для этого используем вторую производную от уравнения движения колеблющейся материальной точки:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Поскольку $A\cos(\omega_0 t + \varphi) = x$, то получим выражение вида

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

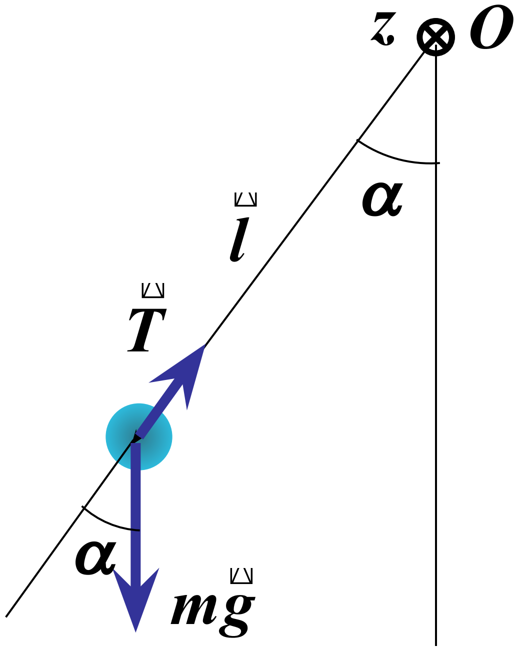
Это дифференциальное *уравнение гармонических колебаний*.

Решение этого уравнения: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Математический маятник.

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и совершающая колебания под действием силы тяжести.



Пусть нить подвеса отклонена влево от вертикали на угол α, маятник движется влево.

O - неподвижная точка подвеса,

z - ось, направленная от нас.

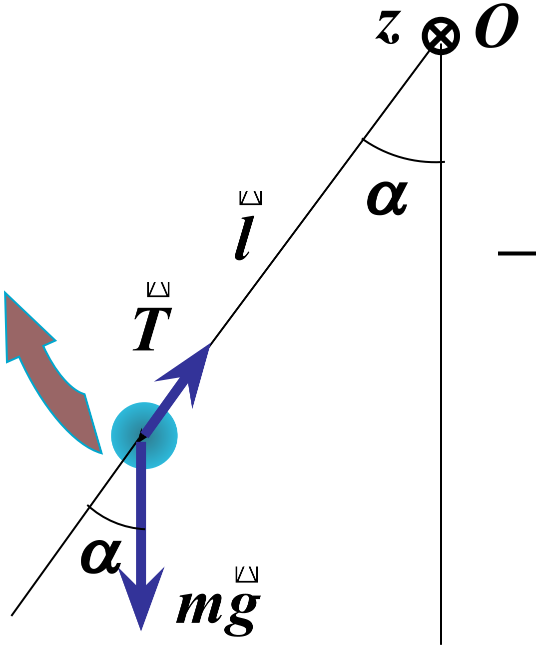
$\vec{l}$ - радиус-вектор.

$m\vec{g}$ - сила тяжести,

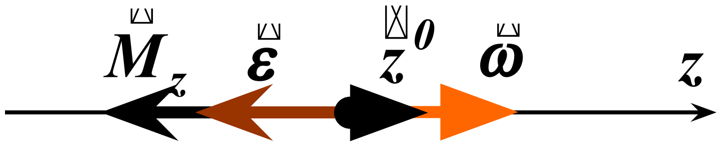
$\vec{T}$ - сила натяжения нити,

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Математический маятник.



Покажем расположение параметров колебательной системы в пространстве.



$\vec{z}^{\,0}$ - орт оси z

$\vec{\omega}$ - угловая скорость. Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения так, что образует правый винт с направлением движения маятника.

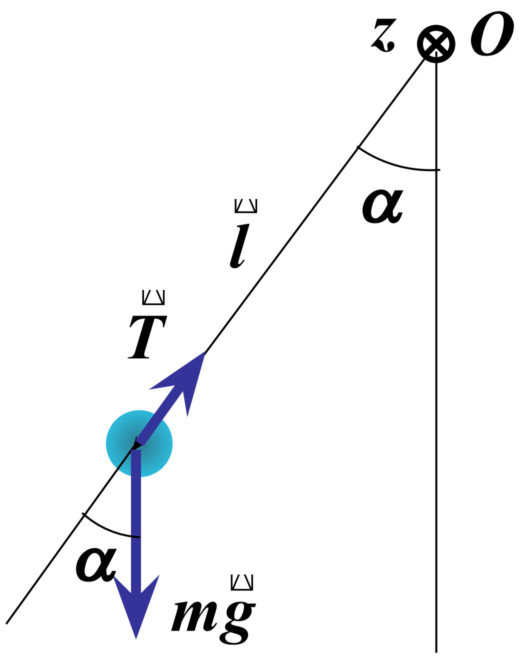
$\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение. Направление вектора совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$, если $\vec{\omega}$ увеличивается, и направлено в противоположную сторону, если угловая скорость уменьшается.

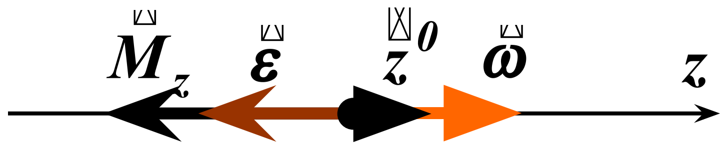
$\vec{M}_z$ - момент силы тяжести.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор

Математический маятник.





Пренебрежем силами трения и сопротивления среды. Получим уравнение движения.

Основной закон вращательного движения твердого тела относительно оси z :

$$J_z \vec{\varepsilon} = \vec{M}_z ,$$

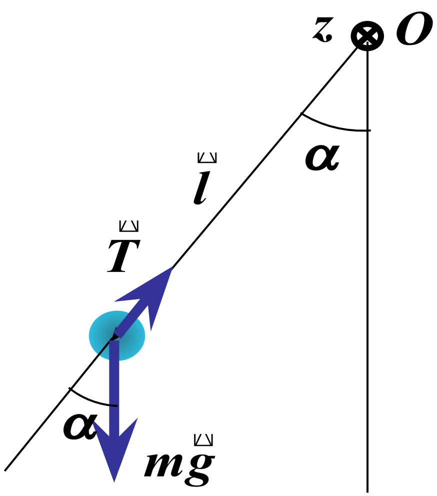
J_z - момент инерции точки относительно оси z .

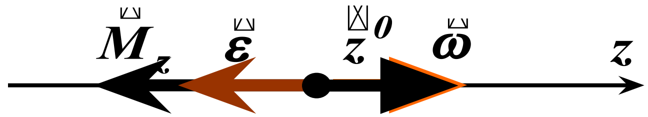
Момент силы $\vec{T}$ относительно оси z равен нулю.

Момент силы тяжести M_z стремится возвратить маятник в положение равновесия.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Математический маятник.





$$J_z\vec{\varepsilon}=\vec{M}_z$$

Величины, входящие в уравнение $J_z\varepsilon = M_z$, запишем следующим образом:

$$\vec{M}_z=\left[\vec{l},m\vec{g}\right],\quad M_z=lmg\sin\alpha,\quad \vec{\omega}=\frac{d\alpha}{dt}\vec{z}_0,$$

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d^2\alpha}{dt^2}\vec{z}_0,\quad J_z=ml^2$$

Отсюда основной закон вращательного движения в проекции на ось z может быть записан в виде:

$$ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-mgl\sin\alpha,\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\alpha$$

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Математический маятник.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$$

Знак «минус» означает, что действие силы тяжести направлено против движения маятника.

Окончательно получим: $$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\alpha = 0}$$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Это нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее движение математического маятника при любой величине угла отклонения от вертикали.

Если рассматривать малые отклонения маятника от положения равновесия $\alpha \ll 1$, то получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний (при $\alpha \ll 1$ $\sin\alpha \approx \alpha$):

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0}$$

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Математический маятник.

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\omega_0^2\alpha=0}$$

В этом уравнении ω_0 имеет смысл собственной круговой частоты малых колебаний математического маятника.

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Период этих колебаний определяется по формуле

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

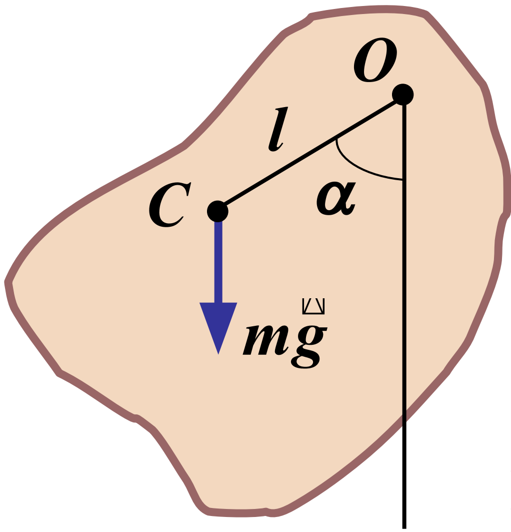
Решение полученного уравнения:

$$\alpha=\alpha_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Физический маятник.

Физический маятник – это твердое тело, совершающее в поле сил тяжести колебания относительно горизонтальной оси, которая проходит через точку, не совпадающую с центром инерции.



O - точка подвеса,

C - положение центра инерции тела,

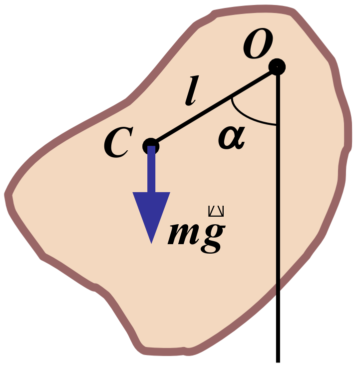
l - расстояние от точки подвеса до центра инерции,

m - масса тела.

Вывод уравнения движения физического маятника идентичен выводу уравнения движения математического маятника.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Физический маятник.



Отличие - в общем случае невозможно записать вид выражения для момента инерции маятника.

$$J_z \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha$$

Пусть собственная частота колебаний физического маятника выражается как $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_z}}$

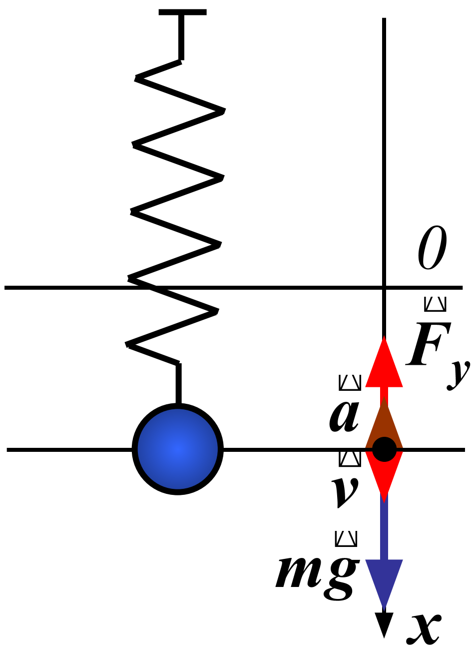
Получим такие же уравнения, как и для математического маятника:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0,$$ решение: $$\alpha = \alpha_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Пружинный маятник.

Пружинный маятник – это колебательная система, состоящая из груза массой $\boldsymbol{m}$, подвешенного на абсолютно упругой пружине и совершающего прямолинейные гармонические колебания в поле сил тяжести под действием упругой силы.



Пусть груз сместился от положения равновесия $x = 0$ вниз и продолжает движение вниз.

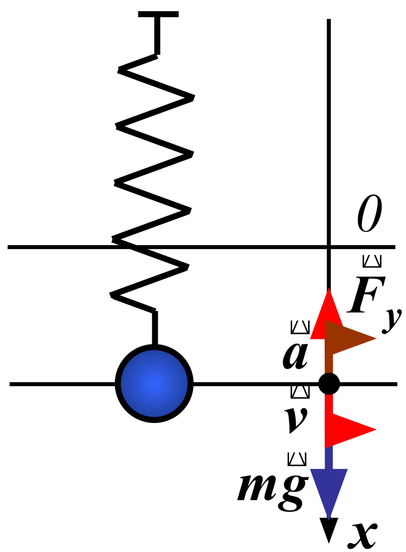
На груз действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}_y$ деформированной пружины, пропорциональная смещению x от положения равновесия:

$$\vec{F}_y = -kx$$

$\boldsymbol{k}$ - величина, называемая жесткостью пружины.

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Гармонический осциллятор Пружинный маятник.



Закон движения пружинного маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Уравнение колебаний маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0 x = 0$$

Маятник совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

с собственной круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Приведенные примеры показывают, что различные механические системы совершают колебания, которые описываются одинаковыми уравнениями, т.е. ведут себя аналогичным образом.