A photograph of three students, two women and one man, sitting at a table and looking at a document. The man on the right is pointing at the document. The woman on the left is looking down at the document. The woman in the middle is looking towards the camera. The background is a plain, light-colored wall.

Тема 4. Проверка статистических гипотез

- 9.1. Общий принцип проверки гипотез
- 9.2. Гипотеза о доли признака
- 9.3. Гипотеза о среднем
- 9.4. Гипотеза о дисперсии

Проблемная ситуация

Будучи управляющим компании Oxford Cereal Company, вы отвечаете за процесс расфасовки кукурузных хлопьев по *коробкам*. *Необходимо убедиться*, что конвейер работает нормально, и каждая коробка содержит в среднем 368 г зерна. Для этого вы извлекаете из генеральной совокупности 25 коробок, взвешиваете их и оцениваете отклонение реального веса от номинального. Коробки из этой выборки могут содержать либо слишком мало, либо слишком много хлопьев. В этом случае следует остановить производство и определить причину неполадок. Анализируя разности между реальным весом и номинальным, необходимо решить, равно ли математическое ожидание генеральной совокупности 368 г или нет. Если равно, процесс расфасовки не требует вмешательства, если нет — следует остановить конвейер.

Еще одна проблемная ситуация

В прошлом году компания ABC провела исследование и выяснила, что 5% покупателей заинтересованы в выпуске стирального порошка, который отстирывает чернильные пятна на белых рубашках.

Компания начала выпуск такого порошка и спустя год после начала выпуска провела новое исследование, в ходе которого из 6000 опрошенных 335 положительно отнеслись к выпуску нового продукта.

Можно ли с высокой долей уверенности утверждать, что интерес покупателей к новому продукту возрос? Как это проверить?

Общий принцип проверки статистических гипотез

1. Формулируем основную и альтернативную гипотезы



2. Задаем уровень значимости



3. Выбираем статистику - критерий проверки гипотезы



4. Определяем критическую область



5. Вычисляем значение статистики по выборке



6. Сравниваем значение статистики с критической областью, делаем вывод

Выделяем шесть основных этапов по проверке гипотез.

Рассмотрим каждый из них подробнее.

Основная и альтернативная гипотезы

Статистической гипотезой называют любое предположение о виде или свойствах распределения генеральной совокупности. Мы будем рассматривать две гипотезы: **нулевую** и **альтернативную**.

Нулевая гипотеза H_0 подлежит проверке, по результатам которой ее можно принять либо отклонить. «Принять» означает «не получить убедительных аргументов для отклонения гипотезы».

Альтернативная гипотеза H_1 принимается только тогда, когда есть убедительное статистическое доказательство для отклонения основной гипотезы.

Примеры основной и альтернативной гипотезы

Основная гипотеза:

$$H_0 : a = 368$$

Средний вес выпускаемых коробок равен 368 г,
конвейер работает нормально

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : a \neq 368$$

Средний вес выпускаемых коробок отличен от 368 г,
конвейер требует наладки

Примеры основной и альтернативной гипотезы

Основная гипотеза:

$$H_0 : p = 0,05$$

В порошке по прежнему заинтересованы 5% покупателей

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : p > 0,05$$

В порошке заинтересовано больше 5% покупателей, интерес вырос

Ошибки первого и второго рода

Статистические гипотезы проверяются статистическими методами, на основании выборки, полученной из генеральной совокупности. Из-за случайности выборки в результате проверки могут возникать ошибки и приниматься неправильные решения.

Назовем **ошибкой первого рода** ситуацию, в которой мы отвергаем верную гипотезу H_0 . При **ошибке второго рода** принимается гипотеза H_0 в то время, как она неверна.

| | Основная гипотеза верна | Основная гипотеза неверна |
|--------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| Мы приняли основную гипотезу | Верное решение | Ошибка II рода |
| Мы отклонили основную гипотезу | Ошибка I рода | Верное решение |

Уровень значимости

Уровнем значимости назовем допустимую вероятность совершить ошибку первого рода, то есть принять неверную гипотезу. Обозначим α .

Уровень значимости α выбирается исследователем до того, как будет проверяться гипотеза. Значение обычно выбирается небольшим, например, 0,10; 0,05 или 0,01.

Статистика - критерий проверки гипотезы

Каким образом на основании выборки принимается решение? Для этого необходима специальная функция, называемая **статистикой**. Эта функция зависит от выборки и потому является случайной функцией.

Множество значений статистики включает:

область принятия гипотезы, то есть множество тех значений статистики, при которых гипотеза H_0 принимается

критическую область, то есть множество тех значений статистики, при которых гипотеза H_0 отклоняется и принимается альтернативная гипотеза

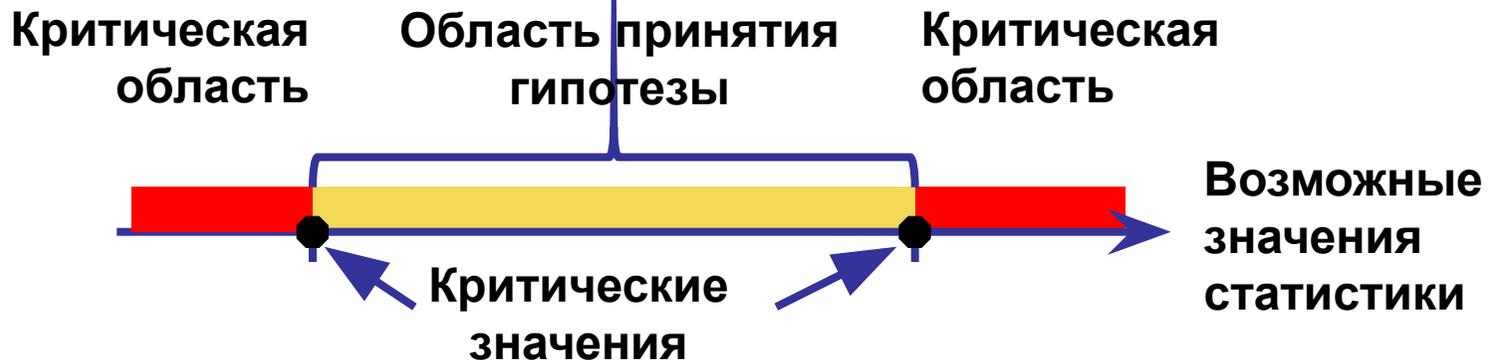


Критическая область и ее границы

Критическая область строится для каждой статистики, основываясь на ее свойствах, и зависит от:

- объема выборки
- уровня значимости, задаваемого исследователем
- вида альтернативной гипотезы

Критическая область ограничена **критическими значениями**, или **границами критической области**, которые вычисляются для каждой статистики при помощи таблиц.

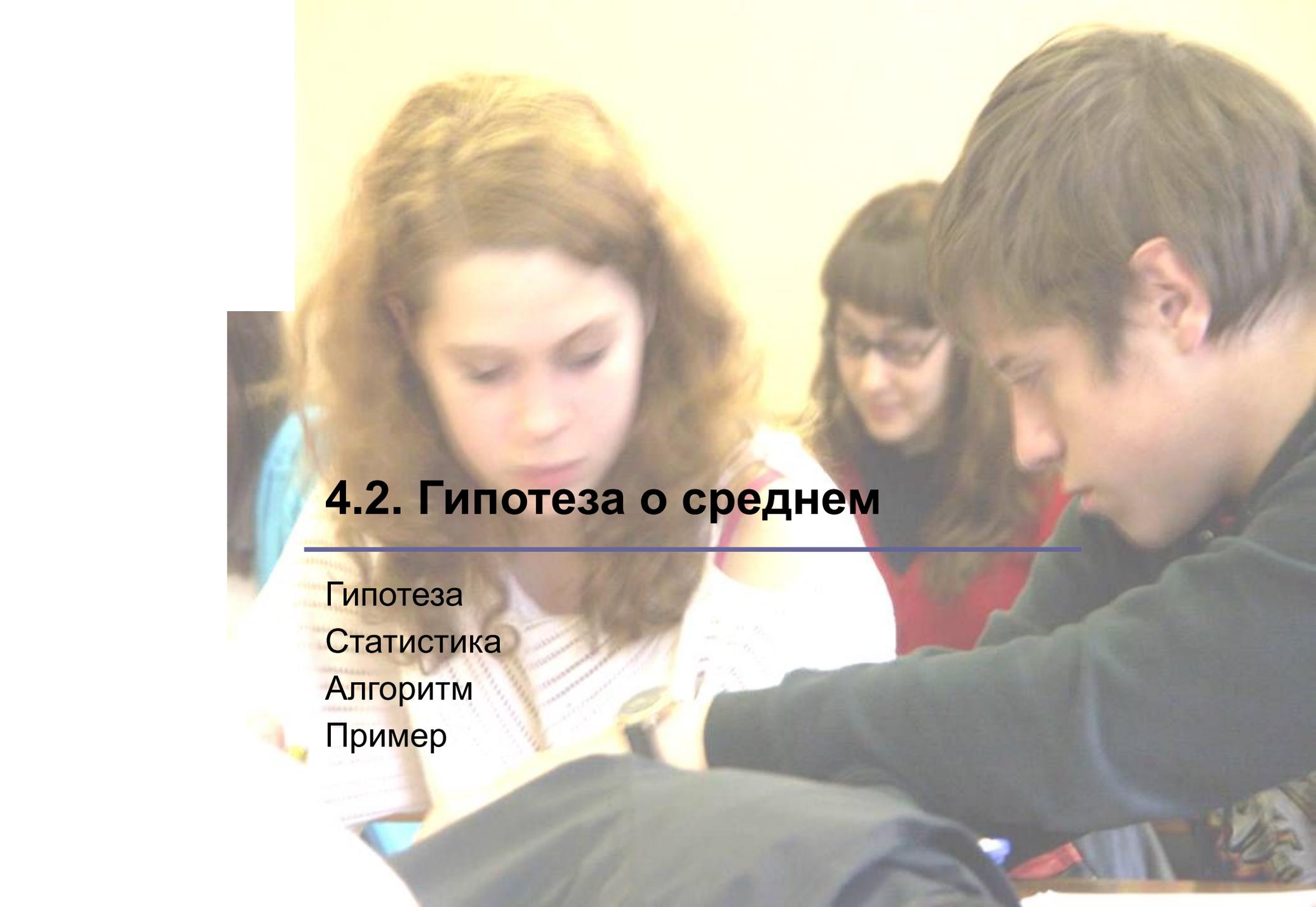


Получение вывода

После построения критической области вычисляется значение статистики по выборке. Затем сравнивается полученное значение статистики с критической областью.

**Если значение статистики попало в область принятия гипотезы,
то гипотеза H_0 принимается**

**Если значение статистики попало в критическую область,
то гипотеза H_0 отклоняется
и принимается альтернативная гипотеза H_1**

A photograph of three students sitting at a table, looking down at a document or book. The student on the left is a young woman with long, wavy brown hair, wearing a white and pink patterned top. The student in the middle is a young woman with dark hair and glasses, wearing a red top. The student on the right is a young man with short brown hair, wearing a dark green sweater. The background is a plain, light-colored wall.

4.2. Гипотеза о среднем

Гипотеза
Статистика
Алгоритм
Пример

Гипотезы

Требуется проверить предположение о значении среднего для нормально распределенной генеральной совокупности.

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a = a_0$$

Альтернативная
гипотеза:

$$H_1 : a \neq a_0$$

Статистика

В качестве статистики выбираем следующую случайную функцию:

$$t = \frac{\bar{x} - a_0}{s / \sqrt{n}}$$

где

- выборочное среднее \bar{x}
- гипотетическое генеральное среднее a_0
- стандартное отклонение выборки s
- размер выборки n

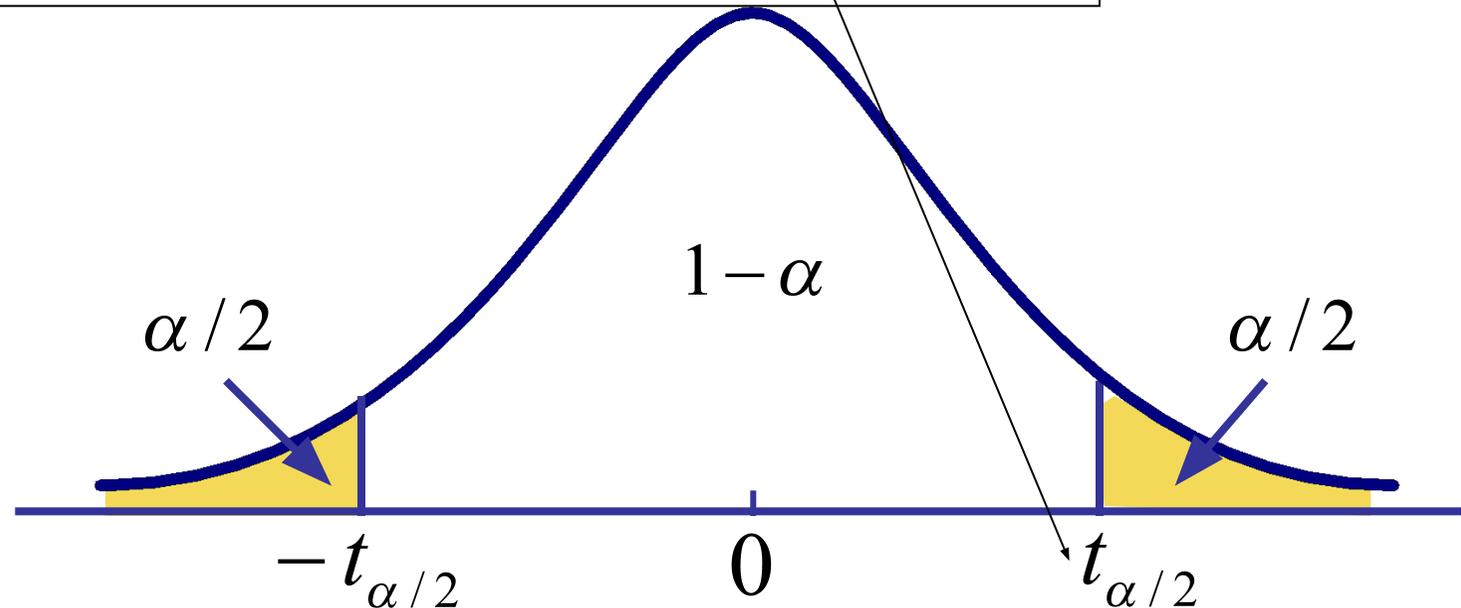
Используемая статистика имеет t-распределение (распределение Стьюк с количеством степеней свободы $df = n - 1$).

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : a \neq a_0$$

Критическое значение находим по таблице t-распределения или через функцию Excel

СТЮДРАСПОБР(уровень значимости α ; степени свободы $n-1$)



Получение выводов

Для получения выводов мы должны проверить, попало ли выборочное значение статистики t в **критическую область**. Мы отвергаем нулевую гипотезу, если:

$$t > t_{\alpha/2} \quad \text{или} \quad t < -t_{\alpha/2}$$

Критическая область

Последовательность действий

Шаг 1. Сформулировать основную и альтернативную гипотезы.

Шаг 2. Задать уровень значимости α .

Шаг 3. По таблице найти критические значения и построить критическую область.

Шаг 4. По выборке сосчитать значение статистики.

Шаг 5. Сравнить полученное значение с критической областью. Если значение попало в критическую область – отклонить основную гипотезу, не попало – принять.

Шаг 6. Написать ответ.

Пример

В штате Нью-Йорк сберегательным банкам разрешено осуществлять страхование жизни. В процедуру оформления страховки входят изучение запроса, проверка медицинской информации, возможные дополнительные медицинские исследования и проверка информации, поступившей из полиции. Чтобы страхование жизни было прибыльным для банка, необходимо ускорить оформление страховки. Банк создал выборку, в которой указано время, затраченное на оформление 27 страховок в течение одного месяца.

Предыдущие исследования показывают, что средний срок оформления заявки равен 45 дней. Можно ли утверждать, что средний срок оформления изменился, если уровень значимости равен 0,05?

Пример

Основная гипотеза $H_0 : a = 45$

Альтернативная гипотеза $H_0 : a \neq 45$

Пример

Данные

| 1 | Время |
|----|-------|
| 2 | 73 |
| 3 | 19 |
| 4 | 16 |
| 5 | 64 |
| 6 | 28 |
| 7 | 28 |
| 8 | 31 |
| 9 | 90 |
| 10 | 60 |
| 11 | 56 |
| 12 | 31 |
| 13 | 56 |

Описательные статистики

| www.zealsoft.com | |
|------------------------|---------|
| Среднее | 43,89 |
| Стандартное отклонение | 4,87 |
| Медиана | 45,00 |
| Мода | 17,00 |
| Стандартная ошибка | 25,28 |
| Дисперсия | 639,26 |
| Экцесс | -0,90 |
| Асимметрия | 0,52 |
| Интервал | 76,00 |
| Минимум | 16,00 |
| Максимум | 92,00 |
| Сумма | 1185,00 |
| Счет | 27,00 |

t-статистика

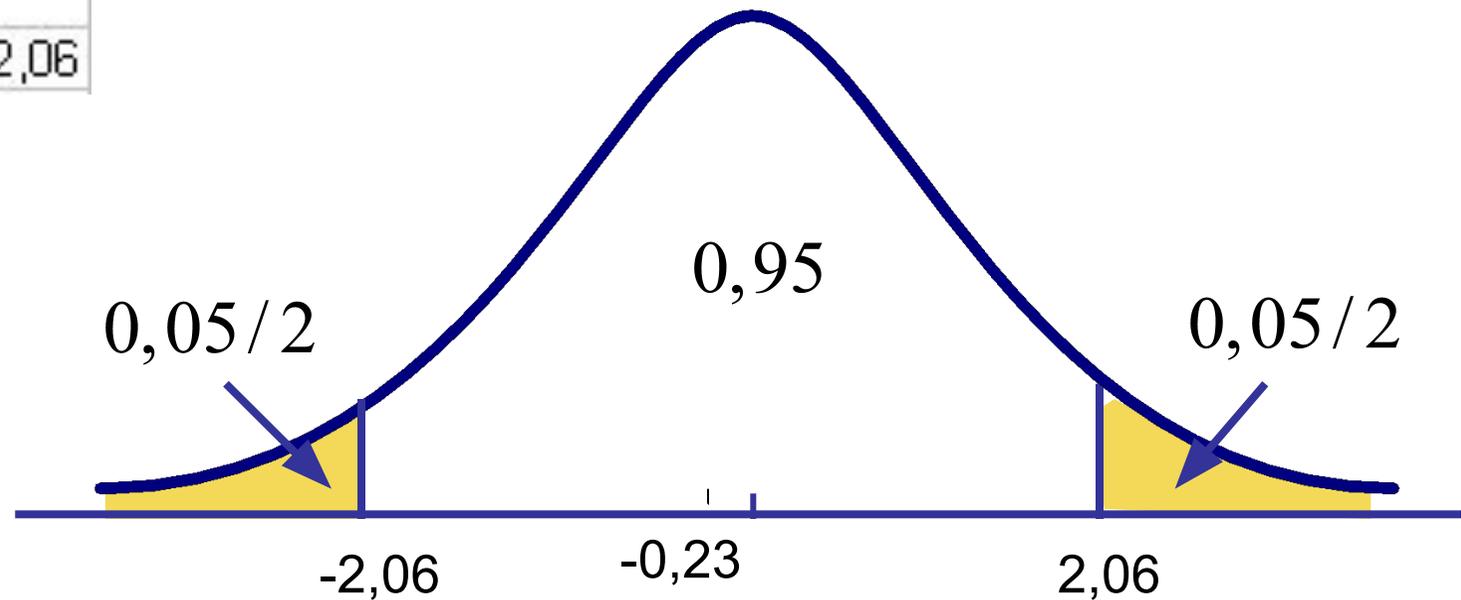
$$t = \frac{\bar{x} - a_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{43,89 - 45}{25,28 / \sqrt{27}} = -0,23$$

Пример

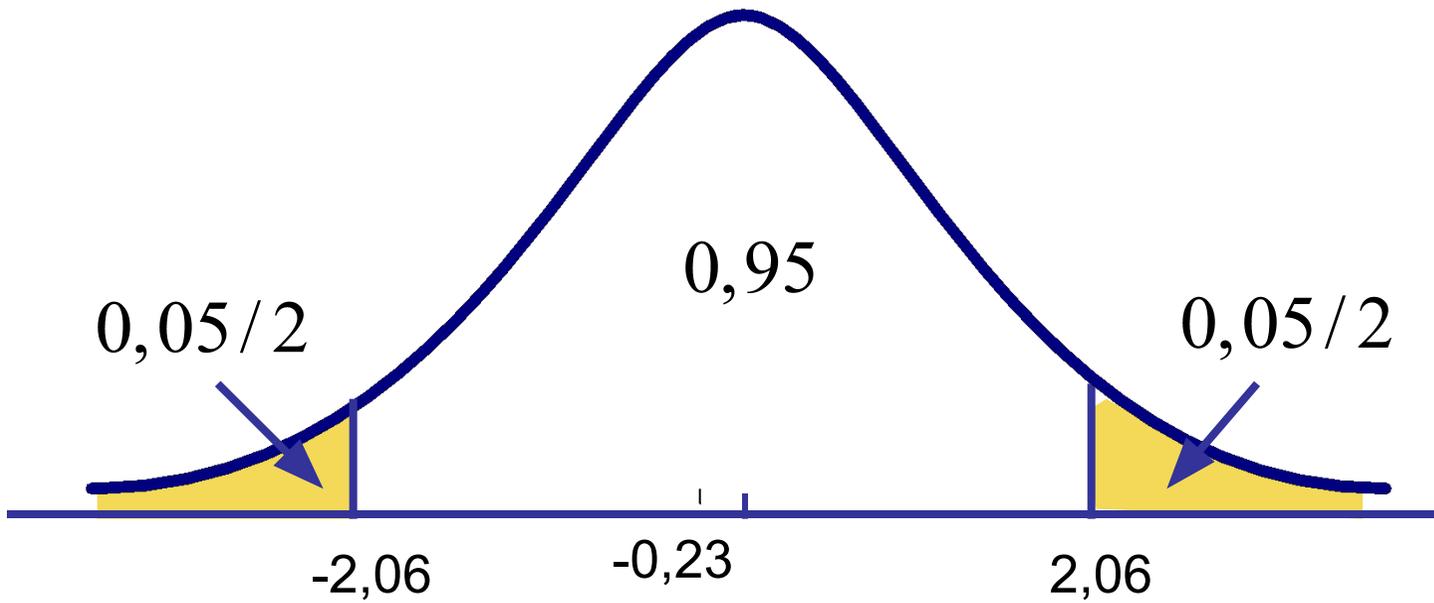
Находим критические значения и строим критическую область

=СТЮДРАСПОБР(0,05;27-1)

| | |
|--|-------|
| www.zeallsoft.com | |
| t-статистика | -0,23 |
| критическое значение | 2,06 |



Пример



Статистика не попала в критическую область. Принимаем

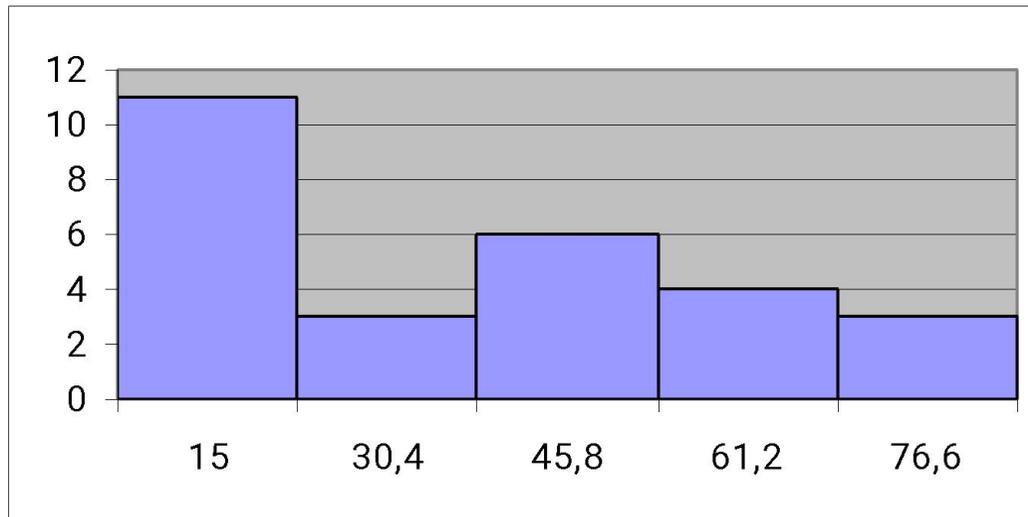
$$H_0 : a = 45$$

Вывод: Средний срок оформления страховок не изменился.

Условия применимости критерия проверки гипотезы о сред

Выборка извлечена из нормальной генеральной совокупности

Проверить условие можно, построив гистограмму



Распределение не нормальное!
Выводы могут быть ошибочны.

Односторонние критерии проверки гипотез

Пример. Фабрика по производству полуфабрикатов закупает булочки на хлебозаводе, чтобы использовать их при изготовлении котлет. Хлебозавод гарантирует средний вес одной булочки 45 г. Фабрика проводит ежедневный контроль качества поставки. При проверке выборки из 25 булочек средний вес оказался равен 44 г. Будет ли принята партия? .

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a \geq 45$$

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : a < 45$$

Гипотезы формулируются так, чтобы знак равенства был у основной гипотезы!

Односторонние критерии проверки гипотез

Пример. Банкоматы должны содержать достаточное количество денег, чтобы удовлетворить запросы клиентов на протяжении выходных. Допустим, что в конкретном отделении банка среднее количество денег, извлекаемых клиентами из банкомата, равно 160 долл. Предположим, что для анализа из генеральной совокупности извлечена выборка, состоящая из 36 транзакций. Выборочное среднее оказалось равным 172 долл. Есть ли основания утверждать, что среднее количество денег, снятых клиентами, больше 160 долл. ?

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a \leq 160$$

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : a > 160$$

Гипотезы формулируются так, чтобы знак равенства был у основной гипотезы!

Односторонние критерии проверки гипотез

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a \geq a_0$$

Альтернативная
гипотеза:

$$H_1 : a < a_0$$

I

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a \leq a_0$$

Альтернативная
гипотеза:

$$H_1 : a > a_0$$

II

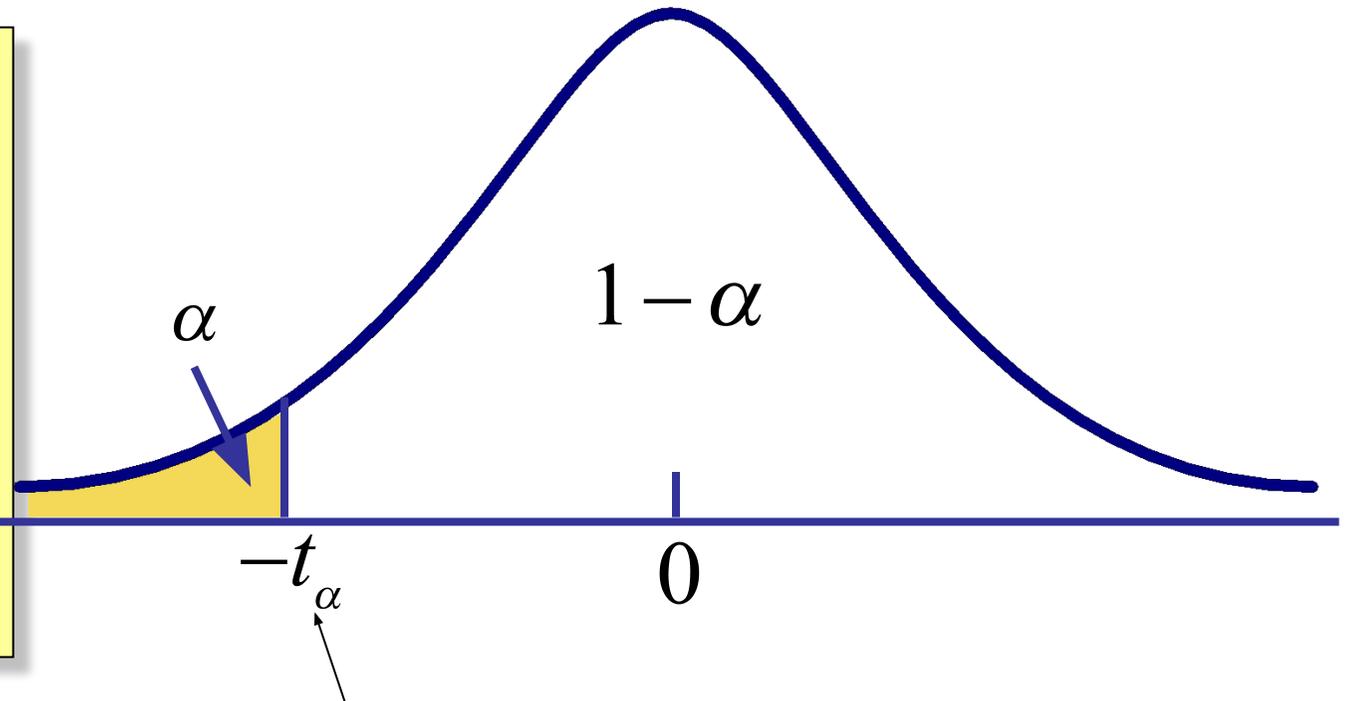
Односторонние критерии проверки гипотез

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a \geq a_0$$

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : a < a_0$$



СТЮДРАСПРОБР(2α ; степени свободы $n-1$)

Функция Excel СТЮДРАСПРОБР рассчитана на двусторонний критерий, поэтому при использовании одностороннего задается уровень значимости 2α

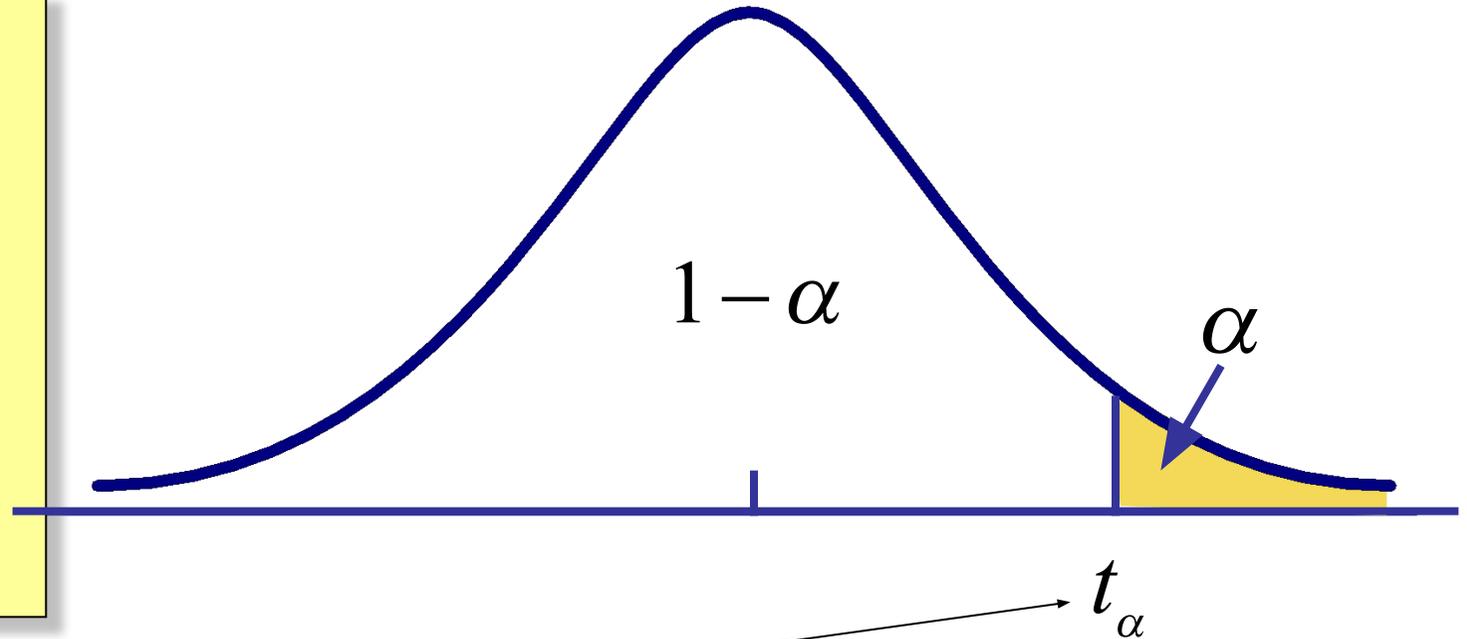
Односторонние критерии проверки гипотез

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a \leq a_0$$

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : a > a_0$$



СТЫЮДРАСПОБР(2α ; степени свободы $n-1$)

Функция Excel СТЫЮДРАСПРОБР рассчитана на двусторонний критерий, поэтому при использовании одностороннего задается уровень значимости 2α

Задача. Булочки для котлет

Фабрика по производству полуфабрикатов закупает булочки на хлебозаводе, чтобы использовать их при изготовлении котлет. Хлебозавод гарантирует средний вес одной булочки $\mu = 45$ г. Фабрика проводит ежедневный контроль качества поставки. При проверке выборки из 25 булочек средний вес оказался равен 44 г., среднеквадратичное отклонение 2 г. Будет ли принята партия? Уровень значимости $\alpha=0,05$.

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a \geq 45$$

Альтернативная
гипотеза:

$$H_1 : a < 45$$

Задача. Булочки для котлет

Фабрика по производству полуфабрикатов закупает булочки на хлебозаводе, чтобы использовать их при изготовлении котлет. Хлебозавод гарантирует средний вес одной булочки $\mu = 45$ г. Фабрика проводит ежедневный контроль качества поставки. При проверке выборки из 25 булочек средний вес оказался равен 44 г., среднеквадратичное отклонение 2 г. Будет ли принята партия? Уровень значимости $\alpha=0,05$.

Рассчитываем t-статистику

$$t = \frac{\bar{x} - a_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{44 - 45}{2 / \sqrt{25}} = \frac{-1}{0,4} = -2,5$$

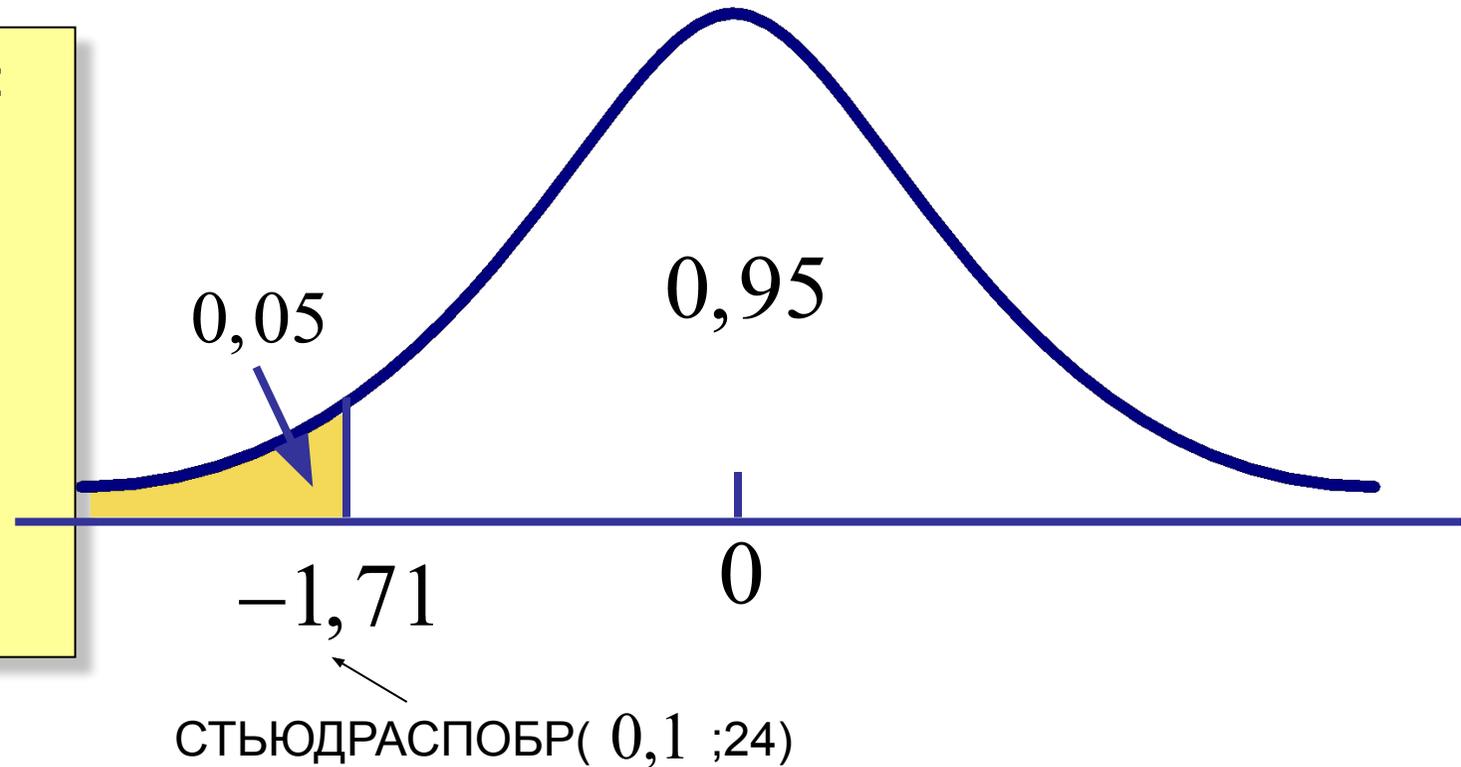
Строим критическую область

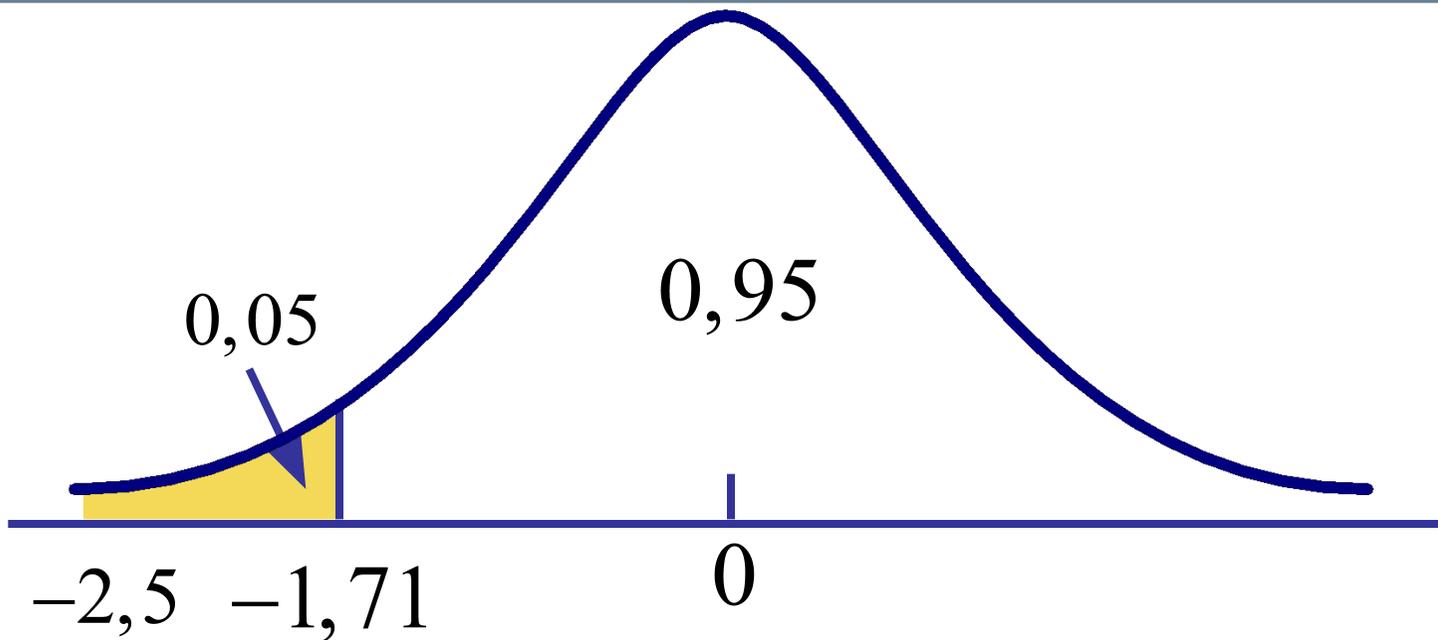
Нулевая гипотеза:

$$H_0 : a \geq 45$$

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : a < 45$$

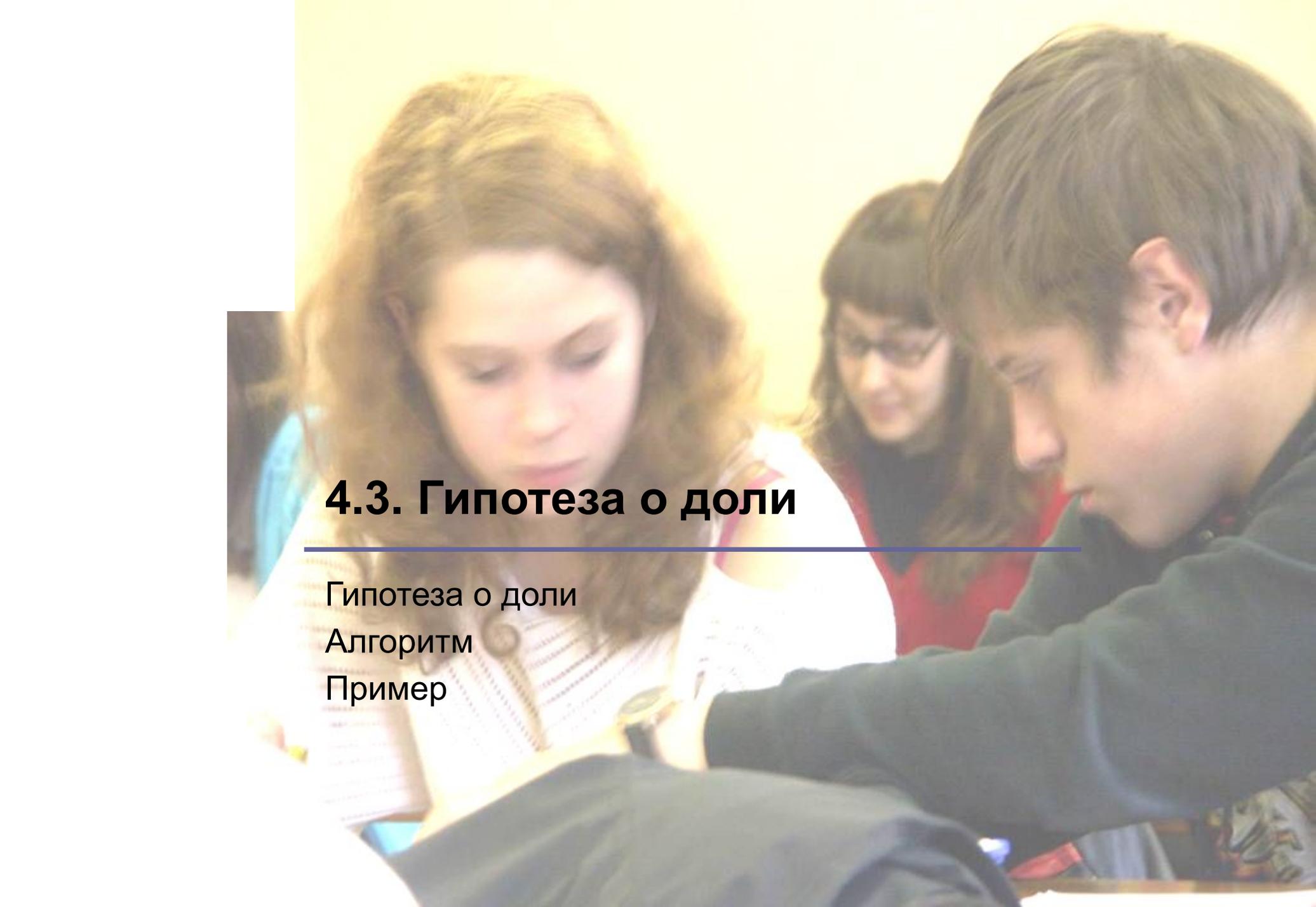




Статистика $t=-2,5$ попала в критическую область.

Принимаем $H_1: a < 45$

Вывод: Средний вес булочек ниже нормативного. Партию не принимаем.

A photograph of three students sitting at a table, looking down at papers or a device. The student on the left is a young woman with long, wavy brown hair, wearing a white and pink patterned top. The student in the middle is a young woman with dark hair and glasses, wearing a red top. The student on the right is a young man with short brown hair, wearing a dark green sweater. The background is a plain, light-colored wall.

4.3. Гипотеза о доли

Гипотеза о доли

Алгоритм

Пример

Гипотезы

Требуется проверить предположение о значении доли генеральной совокупности.

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : p = p_0$$

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : p \neq p_0$$

I

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : p \leq p_0$$

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : p > p_0$$

II

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : p \geq p_0$$

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : p < p_0$$

III

Статистика

В качестве статистики выбираем следующую случайную функцию:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

где

- \hat{p} выборочная доля

- p_0 гипотетическая доля генеральной совокупности

- n размер выборки

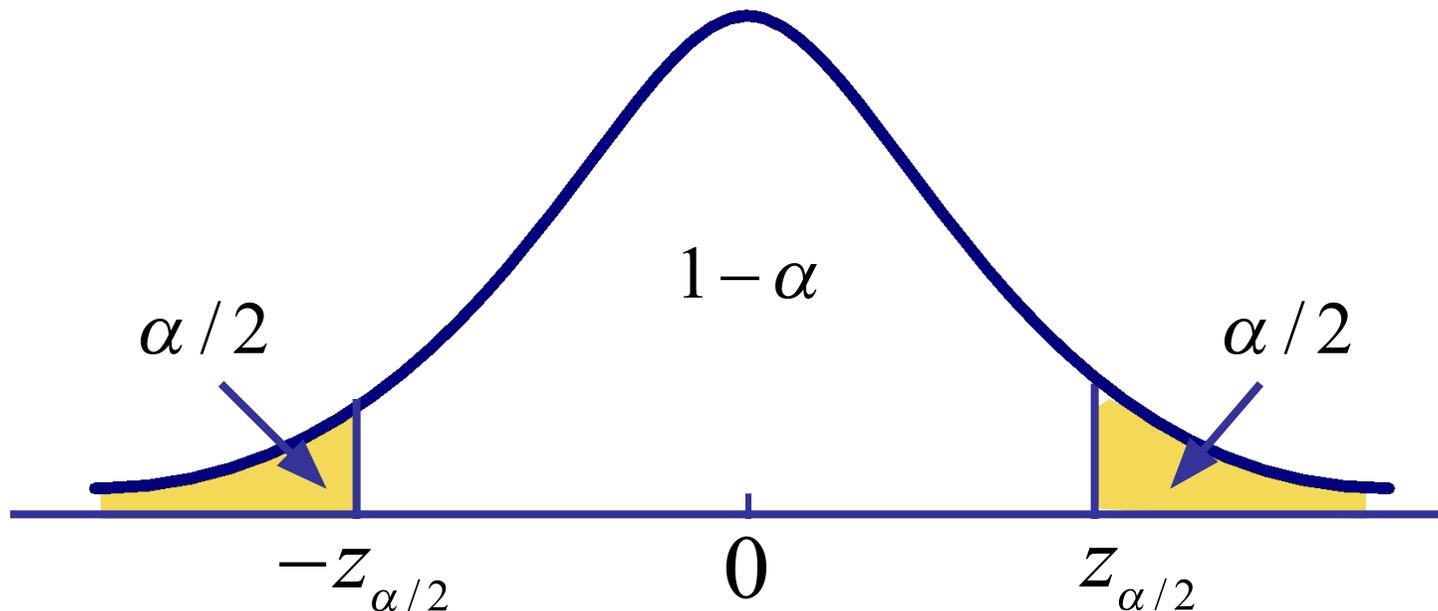
Используемая статистика имеет нормальное распределение

Критическое значение находим по таблице нормального распределения или через функцию Excel.

Для случая I (двусторонний критерий)

`=НОРМСТОБР(1- α /2)`

В скобках площадь ЛЕВЕЕ критического значения

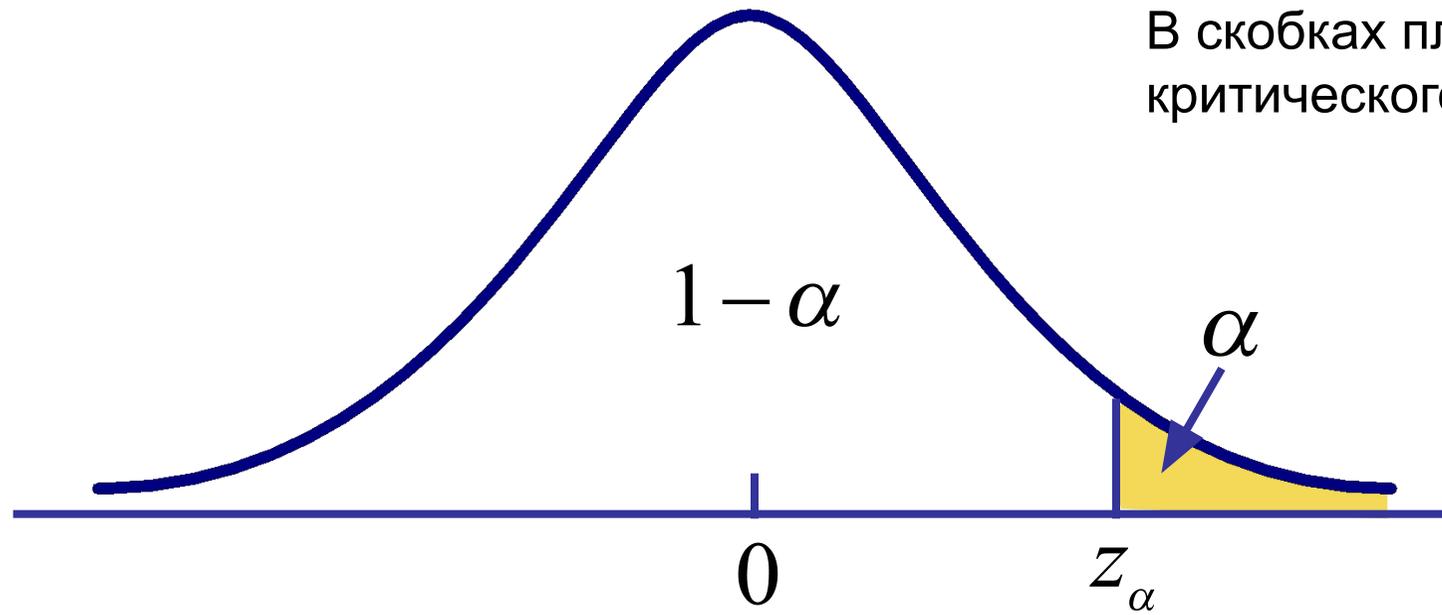


Для случая II (односторонний критерий)

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

=НОРМСТОБР($1 - \alpha$)



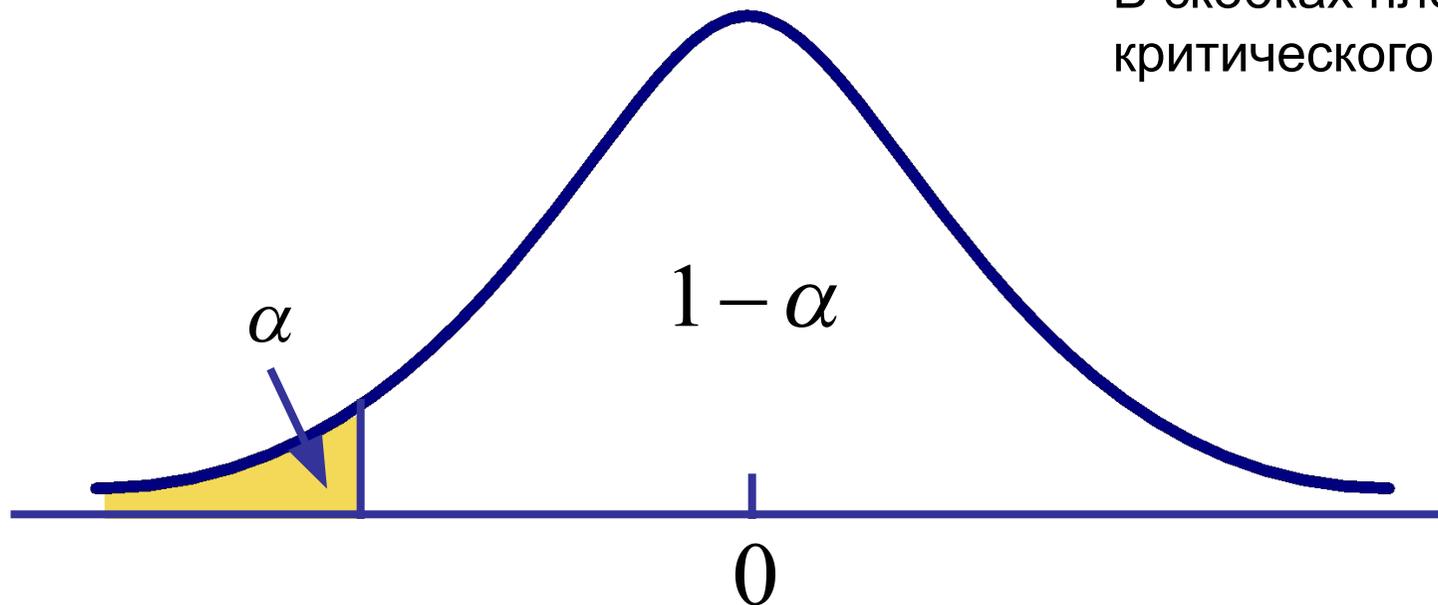
В скобках площадь ЛЕВЕЕ критического значения

Для случая III (односторонний критерий)

$$H_0 : p \geq p_0$$

$$H_1 : p < p_0$$

=НОРМСТОБР(α)



В скобках площадь ЛЕВЕЕ критического значения

Получение выводов

Построив критическую область, вычислим значение статистики по выборке. Для получения выводов мы должны проверить, попало ли выборочное значение статистики в критическую область. Мы отвергаем нулевую гипотезу, если:

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : p < p_0$$

Критическая область:

$$z < -z_{\alpha}$$

I

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : p > p_0$$

Критическая область:

$$z > z_{\alpha}$$

II

Альтернативная гипотеза:

$$H_1 : p \neq p_0$$

Критическая область:

$$z > z_{\alpha/2}$$

$$z < -z_{\alpha/2}$$

III

Пример

В ходе общенационального опроса, проведенного организацией Peter D. Hart Research Associates, 357 человек из 811 опрошенных владельцев персональных компьютеров указали, что считают защиту информации об их кредитных карточках основным препятствием для развития электронной торговли.

Проверьте нулевую гипотезу о том, что 50% всех владельцев персональных компьютеров в США считают защиту информации об их кредитных карточках основной проблемой. Альтернативная гипотеза утверждает, что доля таких респондентов не равна 50%. Уровень значимости равен 0,05.

Расчет Z статистики

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

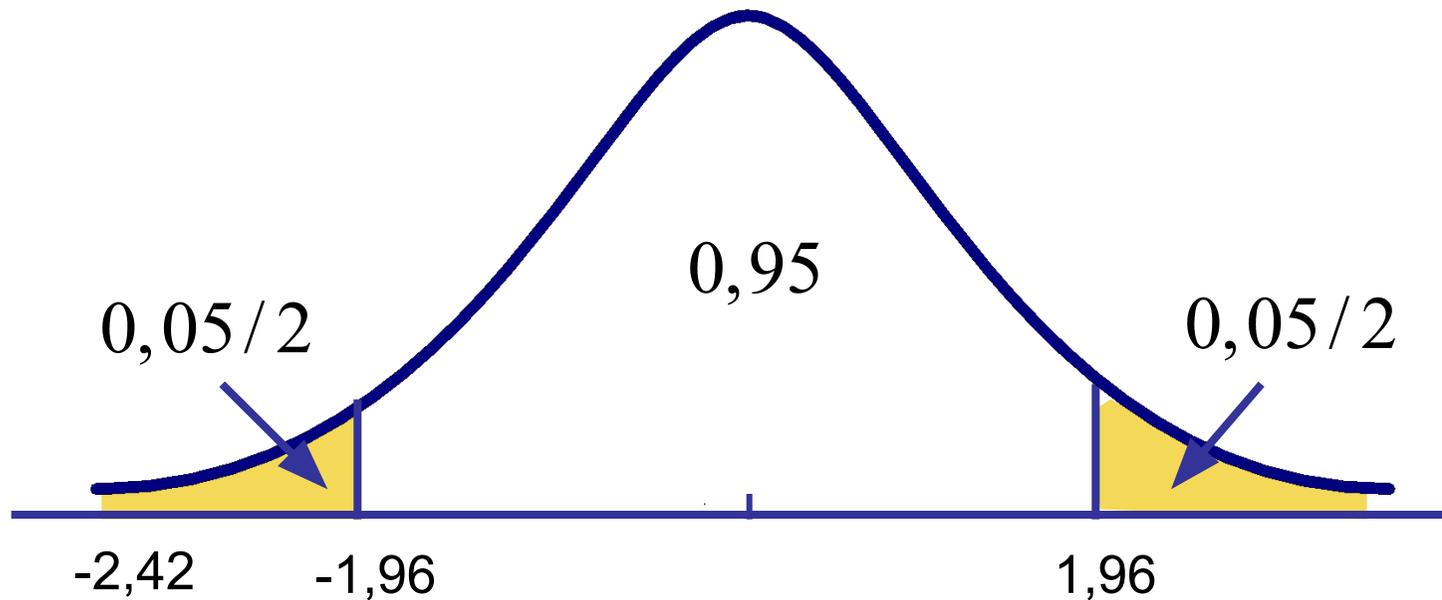
$$\hat{p} = \frac{357}{811} \approx 0,44 \quad p_0 = 0,5$$

$$z = \frac{0,44 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{811}}} = \frac{-0,06}{0,025} = -2,42$$

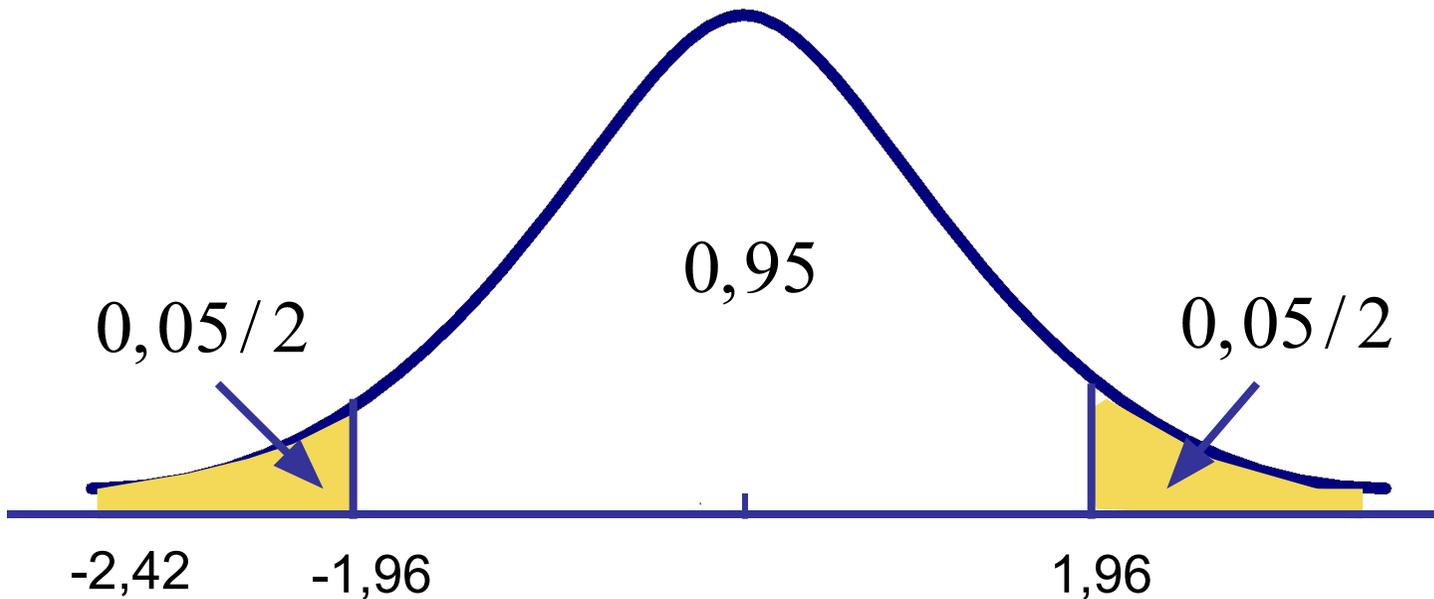
Расчет критического значения

=НОРМСТОБР(1-0,05/2)

| | |
|----------------------|----------------------|
| www.zeallsoft.com | |
| z статистика | -2,42 |
| Критическое значение | <input type="text"/> |
| значение | -1,95996279 |



Расчет критического значения



Статистика попала в критическую область. Принимаем

$$H_1 : p \neq 0,5$$

Вывод: Доля владельцев персональных компьютеров, считающих защиту информации о кредитных карточках основной проблемой существенно отличается от 50%.