Урюпинский филиал ГБОУ СПО «Волгоградский медицинский колледж»

Понятие предела функции в точке

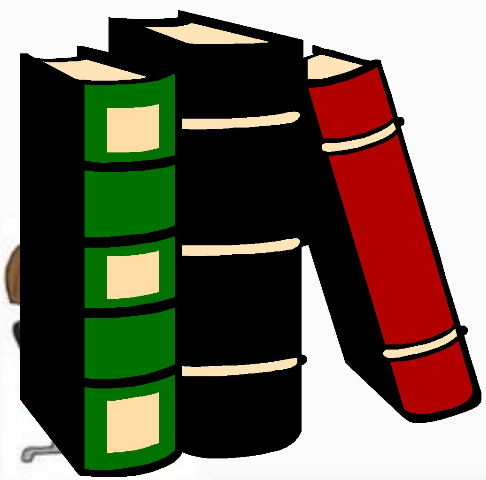
Преподаватель математики
Багрова Г.Г.

Основные вопросы:

- *Определение предела функции в точке, бесконечно малой и бесконечно большой функции в точке. Связь между б/малыми и б/большими функциями в точке.*
- *Основные теоремы о пределах функций (суммы, произведения и частного).*

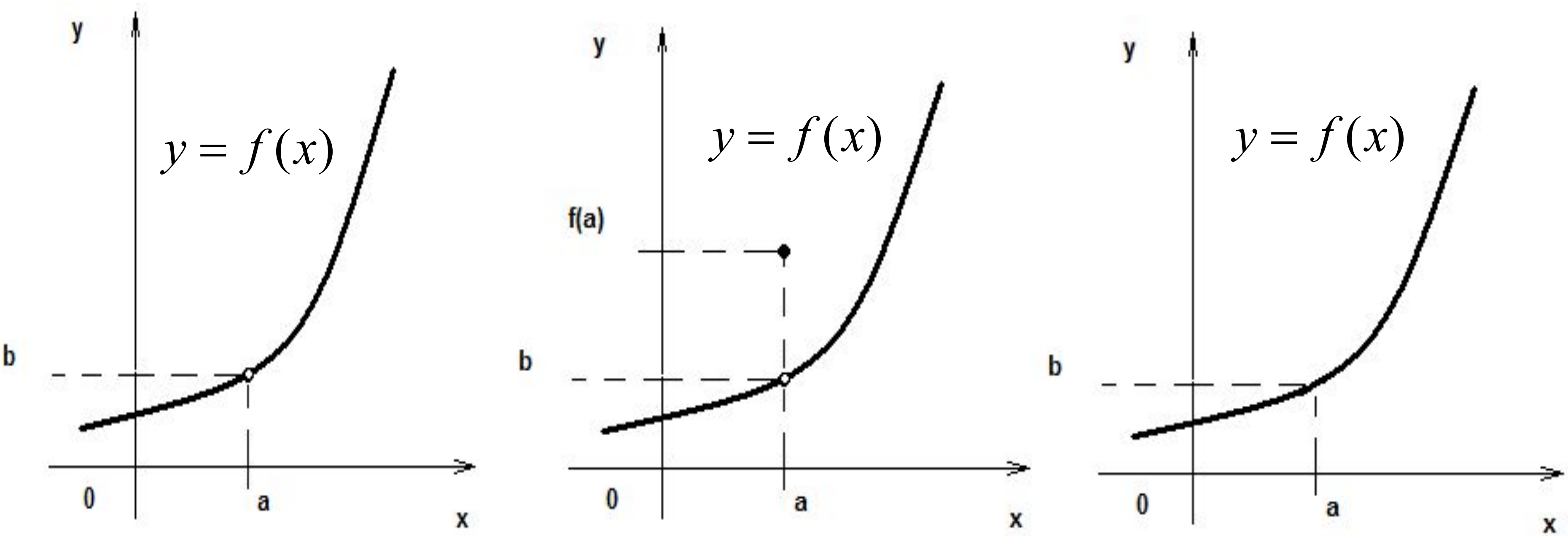
Предел функции

Предел *– одно из основных понятий математического анализа.* Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.



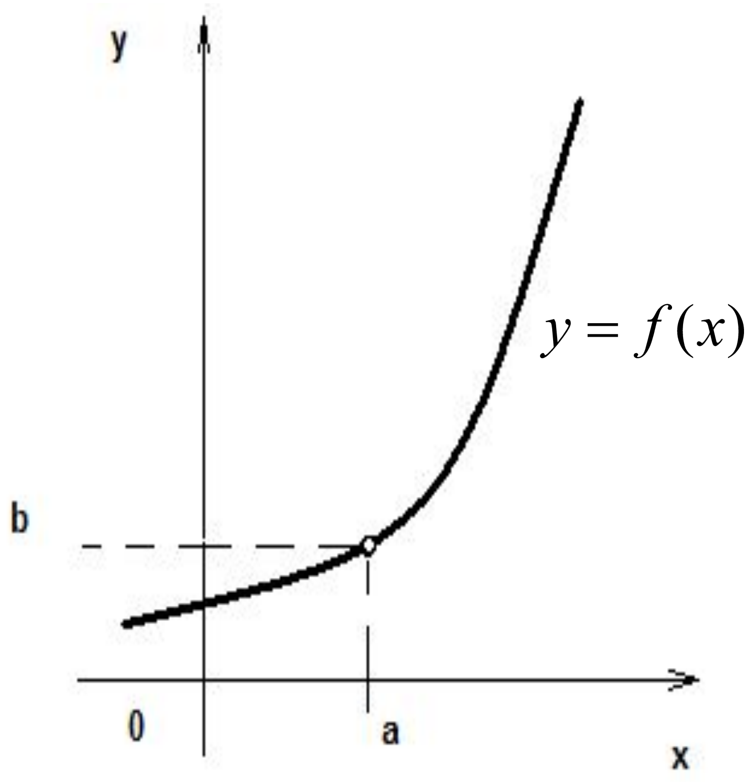
РАЗЛИЧАЮТ – предел функции в точке И предел функции на бесконечности.

Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:

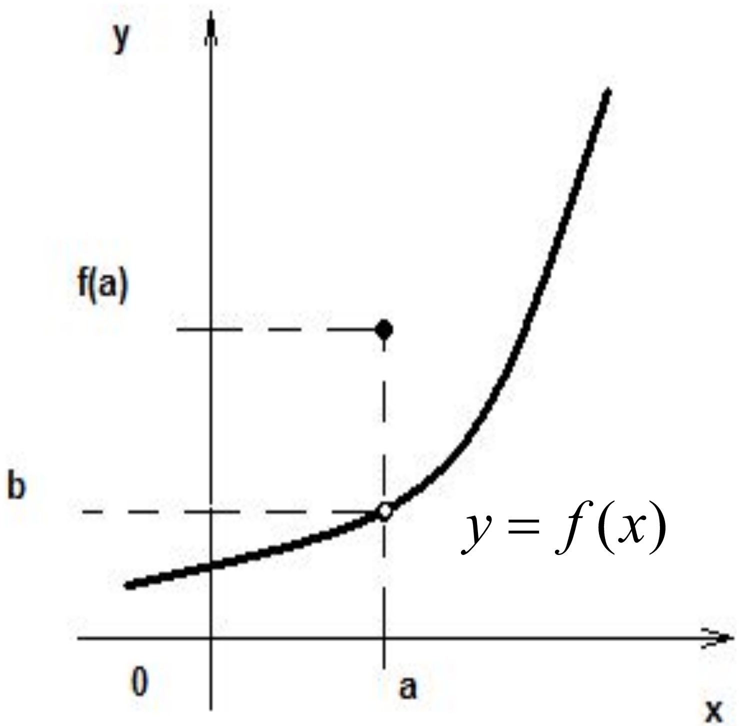


Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:

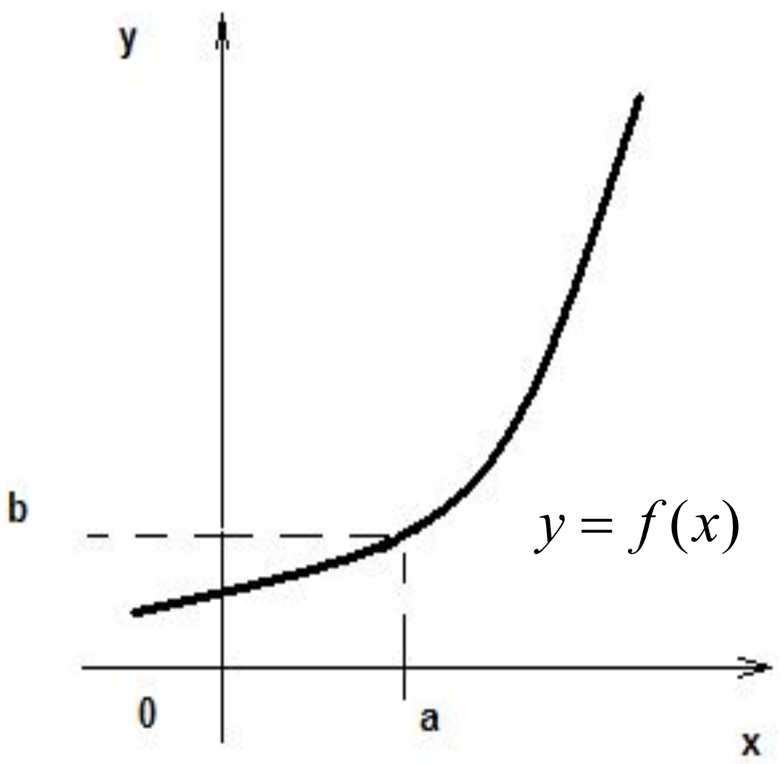


Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена.



Для функции $y = f(x)$ **график которой изображен на этом рисунке, значение** $f(a)$ **существует, но оно отличное от, казалось бы, естественного значения** $b,$

точка $(a,\ b)$ как бы **выколота.**



Для функции $y = f(x)$,

график которой изображен на

этом рисунке, значение $f(a)$

существует и оно вполне

естественное.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b ».

Содержательный смысл этой фразы следующий: *если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b.*

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx a$$

При этом сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.

Предел функции в точке

Число **В** называется пределом функции в точке **а**, если для всех значений **х**, достаточно близких к **а** и отличных от **а**, значение функции $f(x)$ сколько угодно мало отличается от **В**.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Предел функции в точке

Пусть функция ***y = f(x)*** определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0.

Число ***A*** называют пределом функции в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного **ε** найдется такое положительное число ***δ***, что для всех ***x*** из ***δ*** – окрестности точки x_0 справедливо неравенство:

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

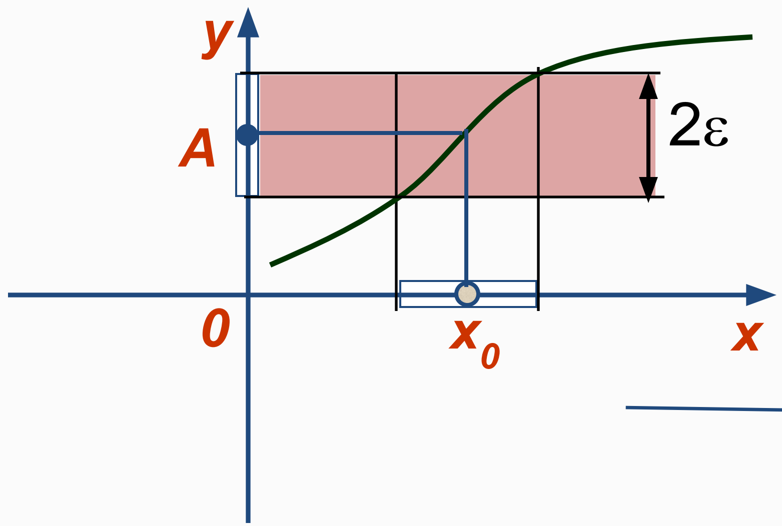
$$\forall\varepsilon > 0; \exists\delta > 0; \forall x : \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Предел функции в точке

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0;\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

ε *окрестность точки* ***A***



δ *окрестность точки* ***x_0***

Геометрический смысл предела: для всех ***x*** из ***δ*** – окрестности точки ***x_0*** точки графика функции лежат внутри полосы, шириной **2ε**, ограниченной прямыми: ***y = A + ε*** , ***y = A - ε*** .

Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

предполагается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньше, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела, поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называют ***пределом функции слева*** в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta;\, x_0)$ справедливо неравенство:

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon$$

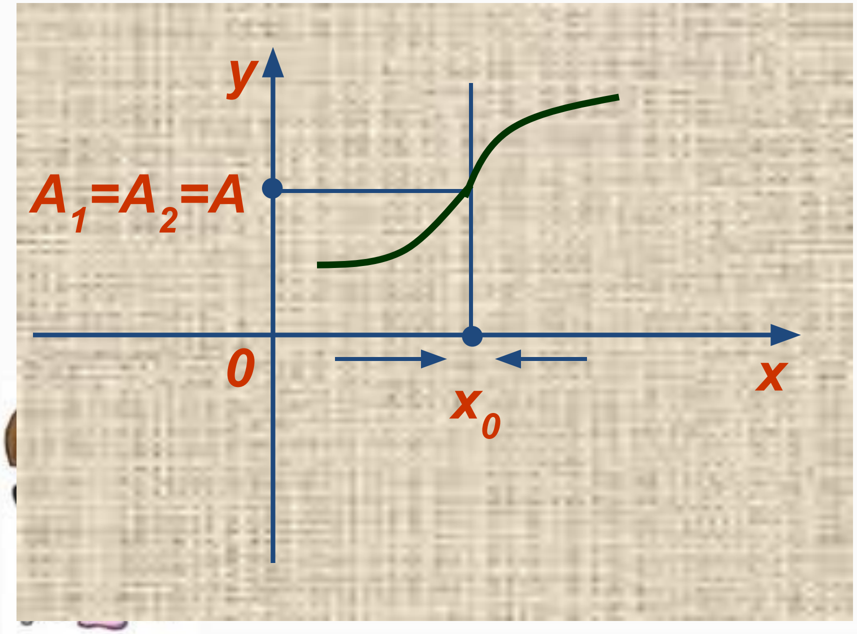
Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$

Односторонние пределы

Число A_2 называют ***пределом функции справа*** в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon$$

Предел справа записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$



Пределы функции слева и справа называют ***односторонними пределами***.

Очевидно, если существует

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$

Предел функции при x стремящемся к бесконечности

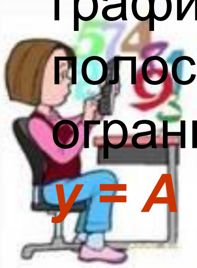
Пусть функция ***y = f(x)*** определена в промежутке $(-\infty;\infty)$.

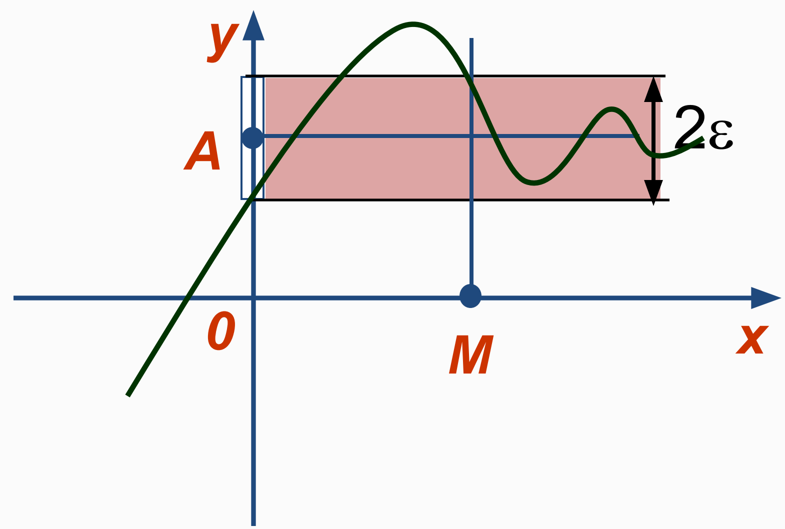
Число ***A*** называют пределом функции при $x \to \infty$, если

$$\forall\varepsilon > 0;\ \exists M > 0;\ \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Геометрический смысл этого определения таков:
существует такое число ***M***, что при ***x > M*** или при ***x < - M*** точки графика функции лежат внутри полосы шириной **2ε**, ограниченной прямыми:
y = A + ε , ***y = A - ε*** .





Теорема.

Если функция *f* (*x*) имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.

Бесконечно малая функция и бесконечно большая функция.

- Функция α (*x*) называется [***бесконечно малой***] при *x* → *a* (здесь *a* – конечное число или ∞), если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0.$

- Функция f(x) называется [***бесконечно большой***] функцией (или бесконечно большой величиной) при x→a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Графическая иллюстрация

- $x \to 0$ ⇒ $\dfrac{1}{x} \to \infty$

$x \to \infty$ ⇒ $y = \dfrac{1}{x} \to 0$

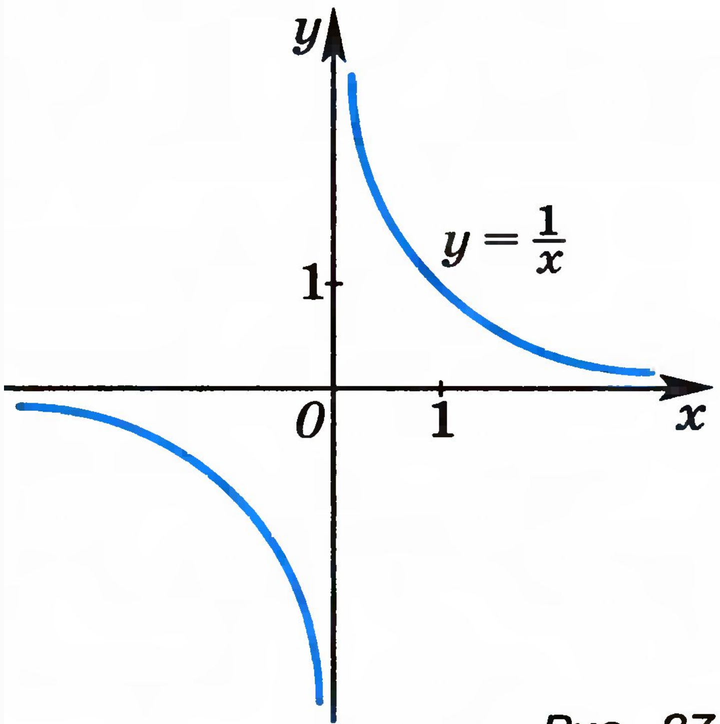


Рис. 37

Таким образом, величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая, и наоборот.

<u>ТЕОРЕМА 1.</u>

Предел **СУММЫ** (разности) 2-х функций равен **СУММЕ** (разности) их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 2.

Предел константы равен самой этой константе.

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

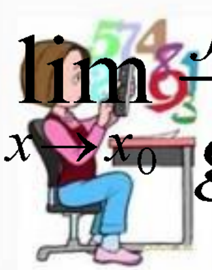
ТЕОРЕМА 3.

Предел ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2-х функций равен ПРОИЗВЕДЕНИЮ их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 4.

Предел **ОТНОШЕНИЯ** 2-х функций равен **ОТНОШЕНИЮ** их пределов, если последние существуют и **ПРЕДЕЛ ЗНАМЕНАТЕЛЯ ОТЛИЧЕН ОТ 0**:



$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\text{если}\_\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

ТЕОРЕМА 5.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$

ТЕОРЕМА 6.

Предел **СТЕПЕНИ** переменного равен той же степени предела основания:

$$\lim_{x\to a}(z^n)=(\lim_{x\to a} z)^n$$

Вычисление пределов

Вычисление предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию ***f(x)***.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию ***f(x)*** получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычислить пределы:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8;$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=2;$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}\overset{(0/0)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x+\frac{3}{2})}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2}=\infty;$$

Примеры

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1{,}5.$$

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0\cdot\infty; \quad 1^{\infty}; \quad 0^{0}; \quad 0^{\infty}; \quad \infty^{0}; \quad \infty-\infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

Методы вычисления пределов на неопределенность

$$\frac{0}{0}, \frac{c}{0}, \frac{c}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\frac{0-0}{0-0}=\left(\frac{0}{0}\right)-$$

Раскрыть соответствующую неопределенность – это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения, что, однако не всегда просто.

Правило № 1

- В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, достаточно числитель и знаменатель дроби разделить на множители, и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Пример №1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{2}{5}$$

Пример № 2:

$$\lim_{x\to0}\frac{4x}{3x^2+2x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}4x}{\lim\limits_{x\to0}\left(3x^2+2x\right)}=\frac{4*0}{3*0+2*0}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{4x}{x(3x+2)}=\lim_{x\to0}\frac{4}{3x+2}=\frac{4}{3*0+2}=2.$$

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\ldots}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\ldots$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – дробно - рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на х в старшей степени

Правило № 2

- Чтобы раскрыть неопределенность данного вида, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Раскрытие неопределенностей

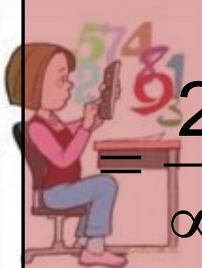
- Раскрытие неопределенности $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение

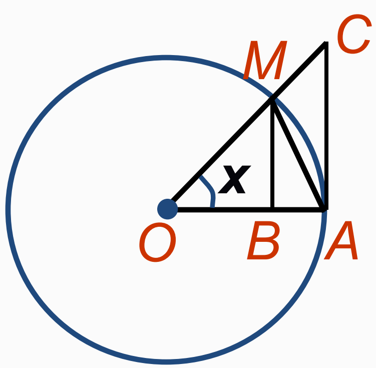


$$=\frac{2}{\infty}=0$$

Первый замечательный предел

Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена при ***x = 0***.

Найдем предел этой функции при $x \to 0$



$$|OA| = 1 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Обозначим:

S —

S_1 - площадь треугольника OMA,

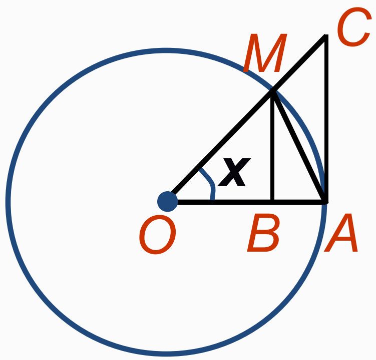
S_2 - площадь сектора OMA,

S_3 - площадь треугольника OCA,

Из рисунка видно, что $S_1 < S_2 < S_3$

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} OA \cdot 0M \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

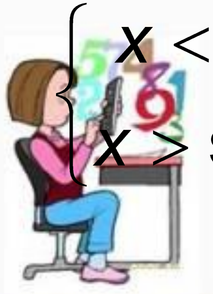
Первый замечательный предел



$$S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot AM = \frac{1}{2} x$$

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} 1 \cdot tgx$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tgx \quad \Rightarrow \quad \sin x < x < tgx \quad \Rightarrow$$



$$\begin{cases} x < tgx \\ x > \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < \dfrac{\sin x}{x} \\ 1 > \dfrac{\sin x}{x} \end{cases} \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Первый замечательный предел

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1\end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Формула справедлива также при ***x* < 0**

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx} = 1$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=$$

$$=2\left(2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=2(2\cdot 1)^2=8$$