

Лекция на тему:

Комбинаторика
Основные формулы
комбинаторики

План лекции

1. Комбинаторика как наука
2. Правило сложения
3. Правило умножения
4. Понятие факториала числа
5. Размещения
6. Перестановки
7. Сочетания
8. Алгоритм решения комбинаторных задач

Комбинаторика как наука

Комбинаторика – раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Интерес к комбинаторике возродился в 50-х годах XX в, в связи с бурным развитием кибернетики, теории планирования и теории информации.

Правило суммы

Пусть имеется n попарно непересекающихся множеств A_1, A_2, \dots, A_n содержащих m_1, m_2, \dots, m_n элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

Пример. На курсе имеется 3 группы. В первой – 25 человек, во второй – 30, в третьей – 20. Сколькими способами из них можно выбрать одного студента?

Пример. На курсе имеется 3 группы. В первой – 25 человек, во второй – 30, в третьей – 20. Сколькими способами из них можно выбрать одного студента?

Решение:

У нас три множества A_1, A_2, A_3 содержащих

$$m_1 = 25, m_2 = 30, m_3 = 20$$

элементов соответственно.

Из первой группы одного человека можно выбрать 25 способами, из второй – 30, из третьей – 20. Чтобы найти ответ, нужно сложить все эти способы: $25+30+20=75$.

Таким образом, выбрать одного студента из трех групп можно 75 способами.

Правило произведения

В дальнейшем будет часто использоваться

Определение:

Кортеж - конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества.

Пусть имеется n множеств A_1, A_2, \dots, A_n содержащих m_1, m_2, \dots, m_n элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, то есть построить кортеж (a_1, a_2, \dots, a_n) , где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ равно

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

Пример. На курсе имеется 3 группы. В первой – 25 человек, во второй – 30, в третьей – 20. Сколькими способами можно выбрать троих делегатов конференции - по одному из каждой группы?

Решение: У нас три множества A_1, A_2, A_3 содержащих $m_1 = 25, m_2 = 30, m_3 = 20$ элементов соответственно. Из первой группы одного человека можно выбрать 25 способами, из второй – 30, из третьей – 20. Чтобы найти ответ, нужно перемножить эти числа $25 \cdot 30 \cdot 20 = 15000$. Получили, что выбрать по одному студенту из каждой группы можно 15000 способами.

Понятие факториала числа

Определение. Факториал – произведение натуральных чисел от единицы до какого-либо данного натурального числа n .

По договоренности $0! = 1$.

Термин «факториал» ввел Л. Арбогаст в 1800г.

Обозначение $n!$ было придумано в 1808 г. К. Крампом.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Размещения

Размещениями из n элементов по m элементов ($m < n$) называются комбинации, составленные из данных n элементов множества по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов. Для обозначения числа всех размещений из n элементов по m , элементов применяется специальный символ: A_n^m , который читается как «число размещений из n по m ».



Размещения без повторений: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Пример. В группе 30 студентов. Сколькими способами могут быть выбраны староста и представитель студенческого актива, если каждый учащийся может быть избран на одну из этих должностей?

$$n=30, m=2$$

$$A_{30}^2 = \frac{30!}{(30-2)!} = 29 \cdot 30 = 870$$

Размещения с повторениями. Различные кортежи длины m , составленные из элементов данного множества, содержащего n элементов, так, что эти элементы в кортеже могут повторяться, называются размещениями с повторениями из n элементов по m элементов. Их число равно:

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Пример. Группа из 25 студентов сдает экзамен. Возможные оценки – 2, 3, 4, 5. Сколькими способами может быть заполнена экзаменационная ведомость?

Решение: $n=4$, $m=25$. Получаем: $\overline{A_4^{25}} = 4^{25}$.

Перестановки

Перестановками из n элементов называются размещения из этих n элементов по n элементов. Перестановки – частный случай размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов обозначают через P_n .

Перестановки без повторений – это различные кортежи, которые можно построить из элементов данного множества, взятых ровно по одному разу: $P_n = n!$



Пример. Для дежурства в общежитии в течение учебной недели (5 дней) выделены 5 студентов. Сколькими способами можно установить очередность дежурств, если каждый студент дежурит один раз?

$$P_5 = 5! = 120$$

Пример. Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?

$$P_{10} = 10! = 3628800$$

Перестановки с повторениями:

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}$$

это кортежи, в которых элемент a_i повторяется m_i раз.

Пример. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «мама»?

Решение:

В слове «мама» 4 буквы: $n=4$

Буква «м» встречается в слове 2 раза: $m_1 = 2$

Буква «а» - 2 раза: $m_2 = 2$. По формуле получаем:

$$P_4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые **отличаются хотя бы одним элементом**.

Отличие сочетаний от размещений в том, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом: C_n^m . **Сочетания без повторений** (n различных элементов, взятых по m):

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



Пример. Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить, если есть пять преподавателей?

$$n=5, m=2$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Различные неупорядоченные наборы, составленные из m элементов этого множества так, что элементы в наборе могут повторяться, и порядок их не важен, называются **сочетаниями с повторениями** из n по m . Их число равно:

$$\bar{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Пример. Возьмем плоды банан, ананас, киви, яблоко и репа . Какие сочетания из ЭТИХ плодов, взятых по два, можно получить? Сколько таких наборов получится, если

1) плоды в наборе не повторяются;

2) можно брать по два одинаковых плода?

Решение:

$$n=5, m=2$$

$$1) C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

$$2) \overline{C}_5^2 = \frac{(5+2-1)!}{2!(5-1)!} = 15$$

Название	Формула	Характеристика
<p>Размещения без повторений</p> <p>с повторениями</p>	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ $\overline{A}_n^m = n^m$	<p><u>отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов</u> (порядок важен)</p>
<p>Перестановки без повторений</p> <p>с повторениями</p>	$P_n = n!$ $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}$	<p><u>отличаются друг от друга только порядком следования элементов</u> ($m=n$)</p>
<p>Сочетания без повторений</p> <p>с повторениями</p>	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ $\overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$	<p><u>отличаются хотя бы одним элементом</u> (порядок не важен)</p>

Алгоритм решения комбинаторных задач

При решении комбинаторных задач следует ответить на следующие вопросы:

1. Из какого множества осуществляется выбор (найти n – количество элементов из которых состоятся комбинации)?
2. Определить сколько элементов в одной комбинации (найти m ; если $n=m$ – это перестановки, переходим к вопросу 4)?
3. Важен ли порядок (изменится ли комбинация, если в ней поменять элементы местами)?
если важен – это размещения A_n^m ,
если нет – это сочетания C_n^m .
4. Возможны ли повторения элементов в одной комбинации?

Пример. В фортепианном кружке дома детского творчества занимается 10 человек, в кружке художественного слова – 15, в вокальном – 12 и в фотокружке – 20. Сколькими способами можно составить команду из 4 чтецов, 3 пианистов, 5 певцов и одного фотографа для выезда на экскурсию?

Решение: Разобьем решение задачи на подзадачи.

1. Сначала найдем сколькими способами можно выбрать чтецов:

- производим выбор из 15 человек, $n=15$;
- выбираем 4 человека, $m=4$;
- порядок не важен, т.е. используем правило сочетаний C_{15}^4 ;
- сочетания без повторений, так как люди выбираются разные.

2. Проводя подобные рассуждения, выбираем

пианистов: 3 из 10 – C_{10}^3 способов.

3. Певцов: 5 из 12 – C_{12}^5 способов.

4. Фотографа: 1 из 20 – C_{20}^1 способов.

Поскольку выбор производится по всем четырем позициям, а не по одной, применяем правило

произведения: $C_{15}^4 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{12}^5 \cdot C_{20}^1$.

$$C_{15}^4 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{12}^5 \cdot C_{20}^1 = \frac{15!}{4!(15-4)!} \cdot \frac{10!}{3!(10-3)!} \cdot \frac{12!}{5!(12-5)!} \cdot \frac{20!}{1!(20-1)!}$$

Ответ: команду можно составить $2,595 \cdot 10^9$ способами.

Основоположники комбинаторики как раздела математики



Блез Паскаль
1623 – 1662 гг.



Пьер де Ферма́
1601 – 1665 гг.



Спасибо за внимание!