МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 Линии на плоскости и их уравнения

3.2 Прямая линия на плоскости

3.3 Кривые второго порядка

3.4 Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

3.5 Плоскость

3.6 Прямая линия в пространстве

3.7 Взаимное расположение прямой и плоскости

3.1 ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $F(x;y)=0$ называется уравнением линии ***L*** в декартовой системе координат ***Oxy***, если:

1) координаты ***x*** и ***y*** любой точки ***M(x;y)*** ∈ ***L*** удовлетворяют этому уравнению,
2) координаты ***x*** и ***y*** любой точки ***N(x;y)*** ∉ ***L*** не удовлетворяют ему.

M(x;y) - текущая точка линии ***L***
x и ***y*** - текущие координаты

Пусть заданы две линии L_1 и $F_1(x;y)=0$; 0 L_2 $F_2(x\ y)=$

Их точки пересечения можно найти, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0 \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

3.1 ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

Примеры

Задана линия $L:\ 2x^2-3xy+1=0.$

Лежат ли точки ***A(2;2)*** и ***B(1;1)*** на этой линии?

$$A(2;2):\quad 2\cdot 2^2-3\cdot 2\cdot 2+1=8-12+1=-3\neq 0$$

$$B(1;1):\quad 2\cdot 1^2-3\cdot 1\cdot 1+1=2-3+1=0$$

Получили: $A(2;2)\notin L,\ \ B(1;1)\in L.$

3.1 ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

Примеры

Найти точки пересечений двух линий

L_1 и $x^2 + :y4 - 4 = 0 \ 8 \quad 0 L_2 \qquad x - y + \quad =$

$$\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0 \\ 4x - y + 8 = 0 \end{cases}$$

Сложим оба уравнения:

$$x^2 + y - 4 + 4x - y + 8 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\left(x + 2\right)^2 = 0$$

$$x = -2$$

Выразим ***y*** из второго:

$$y = 4x + 8$$

$$y = 4 \cdot \left(-2\right) + 8 = 0$$

Получили одну точку пересечения: $K\left(-2;0\right)$.

3.1 ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

Линия ***L*** на плоскости задана параметрическими уравнениями, если текущие координаты ***x*** и ***y*** точек линии выражены через вспомогательный параметр t, т. е. $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha;\beta)$

Пример

Уравнение окружности с заданным центром и заданным радиусом в декартовой системе координат имеет вид

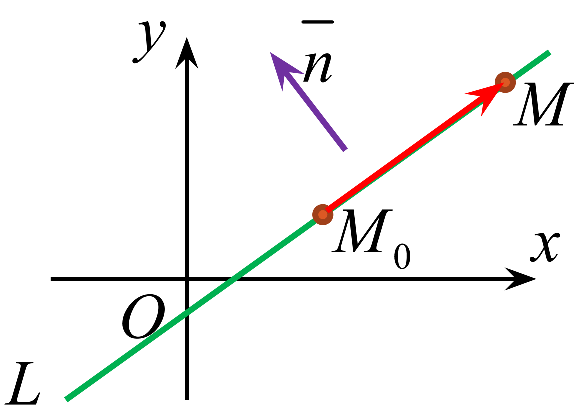
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,\ \text{где}\quad M_0(x_0,\ y_0)-\text{центр},\quad R-\text{радиус}.$$

Тогда параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cdot\cos t \\ y = y_0 + R\cdot\sin t \end{cases} \quad t \in [0;2\pi)$$

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Задача 1



Вывести уравнение прямой ***L***, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

Дано: $M_0\left(x_0; y_0\right) \in L, \quad \bar{n} = \left\{A; B\right\} \perp L$

Найти: ***L***

Решение:

Пусть $M\left(x; y\right) \in L$ – текущая точка, тогда $\overline{M_0M} = \left\{x - x_0; y - y_0\right\}$

$\bar{n} \perp \overline{M_0M} \Rightarrow$ критерий перпендикулярности векторов $\Rightarrow \bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0$$

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$$

$$Ax + By + \underbrace{\left(-Ax_0 - By_0\right)}_{C} = 0$$

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

общее уравнение прямой

$\bar{n} = \left\{A; B\right\}$ – нормальный вектор

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Замечание

$$Ax + By + C = 0$$

1) $A = 0 \quad \Rightarrow \quad By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{C}{B}$ — уравнение горизонтальной прямой

2) $B = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + C = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{C}{A}$ — уравнение вертикальной прямой

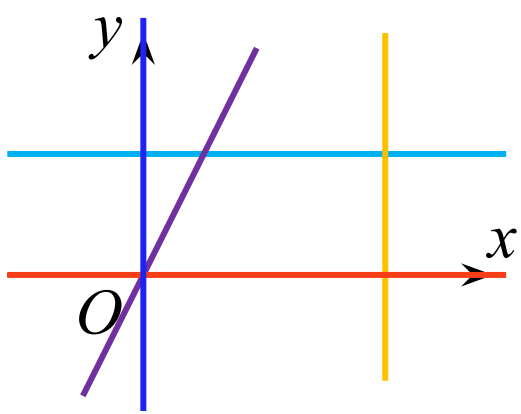
3) $C = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{A}{B}x$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат

4) $A = C = 0 \quad \Rightarrow \quad By = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

уравнение оси ***Ox***

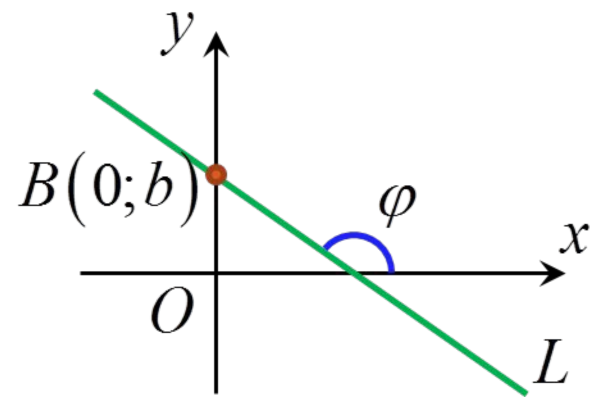
5) $B = C = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

уравнение оси ***Oy***



3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Замечание



$$Ax + By + C = 0$$

Из этого уравнения выразим ***y***:

$$By = -Ax - C \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Пусть $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, тогда $\boxed{y = kx + b}$

уравнение прямой с угловым коэффициентом

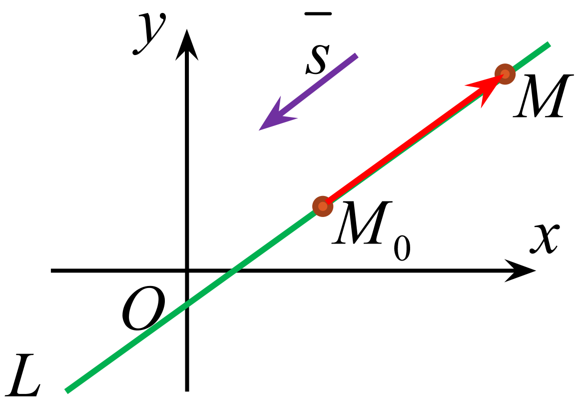
Здесь ***k*** – тангенс угла ***φ*** наклона прямой к положительному направлению оси ***Ox***, ***b*** – ордината точки пересечения прямой и оси ***Oy***.

Для составления уравнения прямой по заданному углу ***φ*** и любой точке $M_0(x_0; y_0)$, лежащей на прямой, используют формулу:

$$(y - y_0) = \operatorname{tg}\varphi (x - x_0)$$

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Задача 2



Вывести уравнение прямой ***L***, проходящей через заданную точку, параллельно заданному вектору.

Дано: $M_0\left(x_0; y_0\right) \in L, \quad \bar{s} = \left\{s_x; s_y\right\} \parallel L$

Найти: ***L***

Решение:

Пусть $M\left(x; y\right) \in L$ – текущая точка, тогда $\overline{M_0M} = \left\{x - x_0; y - y_0\right\}$

$\bar{s} \parallel \overline{M_0M}$ $\Rightarrow$ их координаты пропорциональны $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{x - x_0}{s_x} = \dfrac{y - y_0}{s_y}}$

каноническое уравнение прямой

$\bar{s} = \left\{s_x; s_y\right\}$ – направляющий вектор

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Замечание

$$\frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{s_y}=t$$

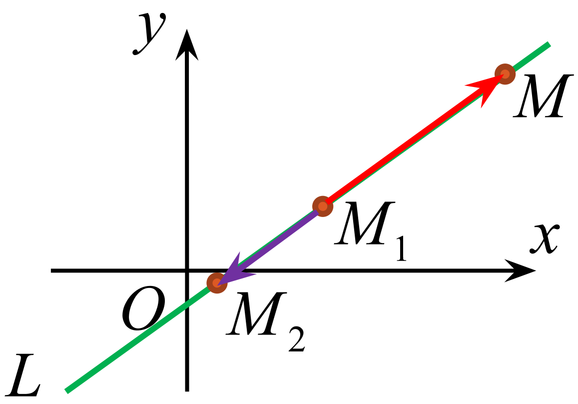
Пусть коэффициент пропорциональности равен ***t***, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{s_x}=t\\[2ex]\dfrac{y-y_0}{s_y}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-x_0=t\cdot s_x\\y-y_0=t\cdot s_y\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=x_0+t\cdot s_x\\y=y_0+t\cdot s_y\end{cases}}\quad t\in(-\infty;+\infty)$$

параметрические уравнения прямой

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Задача 3



Вывести уравнение прямой ***L***, проходящей через две заданные точки.

Дано: $M_1(x_1;y_1)\in L,\ \ M_2(x_2;y_2)\in L$

Найти: ***L***

Решение:

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$$

Пусть $M(x;y)\in L$ – текущая точка, тогда $\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1\}$

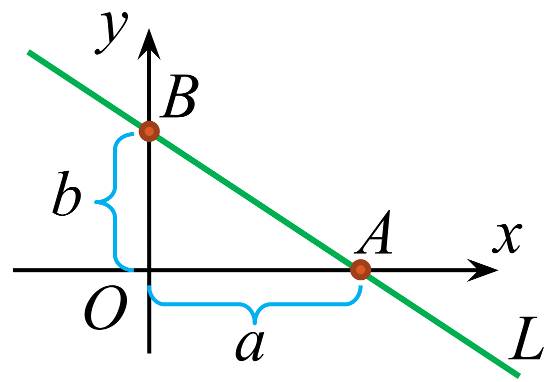
$\overline{M_1M}\,||\,\overline{M_1M_2}$ $\Rightarrow$ их координаты пропорциональны $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}}$

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Замечание

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$



Пусть заданные точки расположены на осях координат, т. е. отсекают на осях заданные отрезки,

Тогда координаты этих точек: $A(a;0),\ \ B(0;b).$

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b} \Rightarrow (x-a)\cdot b=-ay \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xb-ab=-ay \Rightarrow xb+ay=ab \Rightarrow \frac{xb}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \longrightarrow$$

уравнение прямой в отрезках

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Обобщение

Мы получили несколько типов (форм записи) уравнений прямой на плоскости, которые отличаются по внешнему виду:

1) общее уравнение,
2) уравнение с угловым коэффициентом,
3) каноническое уравнение,
4) параметрические уравнения,
5) уравнение прямой, проходящей через две точки,
6) уравнение прямой в отрезках.

Очевидно, что с помощью алгебраических преобразований можно легко перейти от одной формы записи к другой.

Таким образом можно утверждать, что любой способ определения прямой линии на плоскости приводит к уравнению первой степени относительно ***x*** и (или) ***y***.

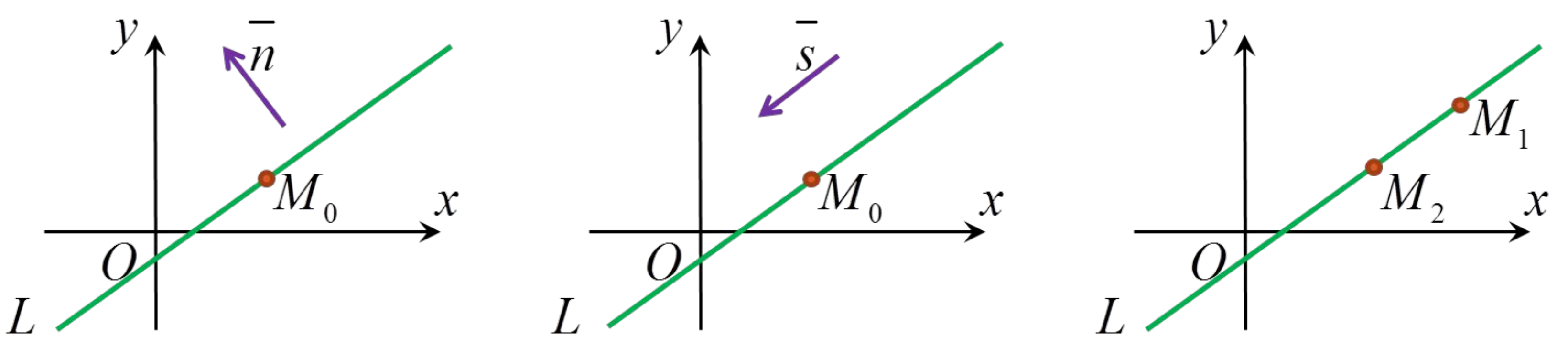
$$Ax + By + C = 0$$

(числа А и В одновременно не могут быть равны нулю)

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Указания к составлению уравнений прямой на плоскости

Дано	Выбор формулы
Точка и перпендикулярный вектор	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$
Точка и параллельный вектор	$\dfrac{x-x_0}{s_x}=\dfrac{y-y_0}{s_y}$
Две точки	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$



3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Взаимное расположение прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые, заданные общими уравнениями,
и соответствующие им нормальные векторы:

$$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \overline{n_1} = \{A_1; B_1\} \perp L_1$$

$$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad \overline{n_2} = \{A_2; B_2\} \perp L_2$$

1 Параллельность прямых

$$L_1 \parallel L_2 \;\Leftrightarrow\; \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

2 Совпадение прямых

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

3 Перпендикулярность прямых

$$L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \;\Leftrightarrow\; \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

3.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Взаимное расположение прямых на плоскости

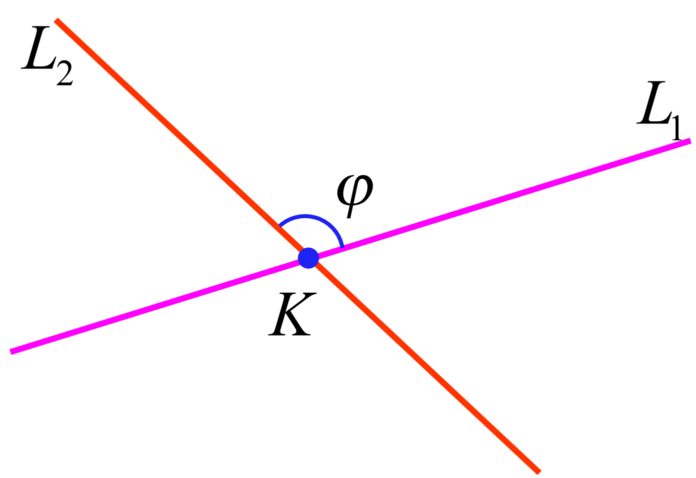
4 Угол между прямыми

$$\cos\angle(L_1;L_2)=\cos\angle(\overline{n_1};\overline{n_2})=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\angle(L_1;L_2)=\arccos\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\varphi$$

5 Пересечение прямых

$$K(x_k;y_k):\ \begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$



Лекция выложена впервые.

Если Вы заметили ошибку, то сообщите мне на эл. почту.