

Скалярное произведение векторов

Определение

Скалярным произведением векторов

называется

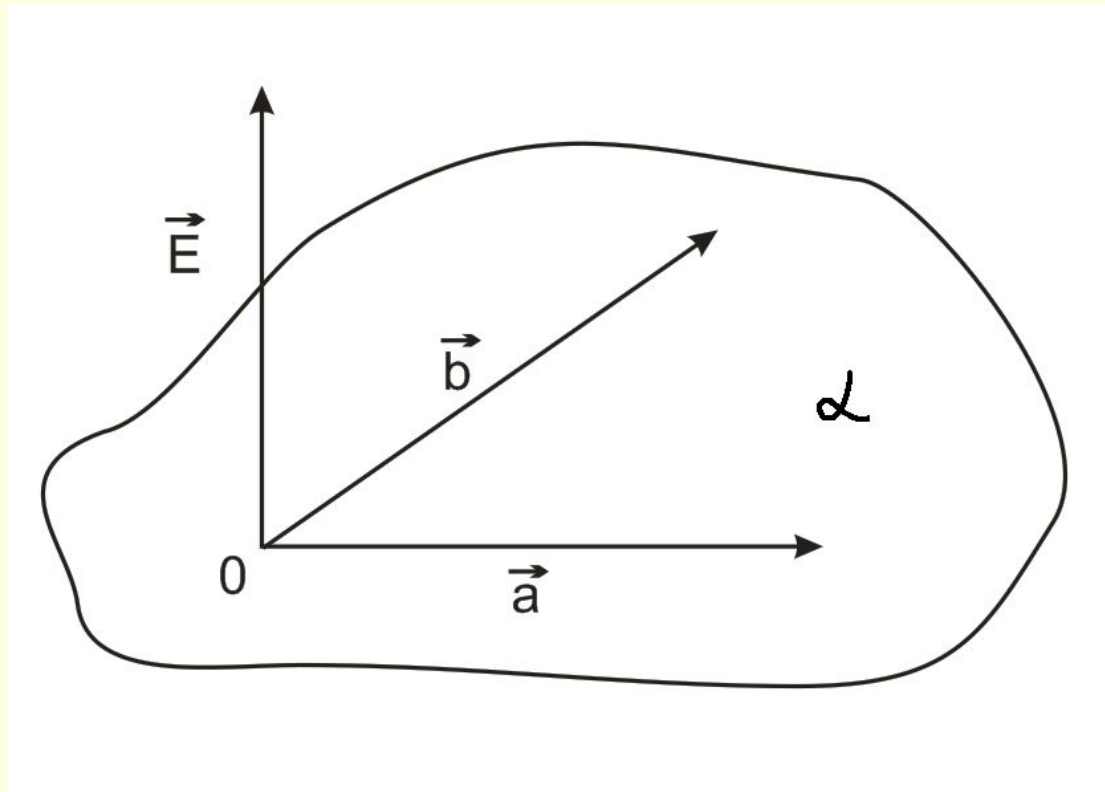
число, равное произведению длин этих векторов

на косинус угла между ними

$$\begin{aligned} (a, b) &= |a| \cdot |b| \cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} \end{aligned}$$

Векторное произведение векторов

Пусть вектора \vec{a} и \vec{b} заданы своими геометрическими моделями



Векторное произведение векторов

Определение

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется новый вектор $\vec{E} = \vec{a} \times \vec{b}$, который:

1. $\vec{E} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ и плоскости векторов \vec{a} и \vec{b}

2. имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} как на сторонах $|\vec{E}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ где φ — угол между \vec{a} и \vec{b}

3. \vec{E} направлен так, что если смотреть с его конца, то поворот от \vec{a} к \vec{b} по кратчайшему углу виден против часовой стрелки

Векторное произведение векторов

Обозначение векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } \left[\vec{a}, \vec{b} \right]$$

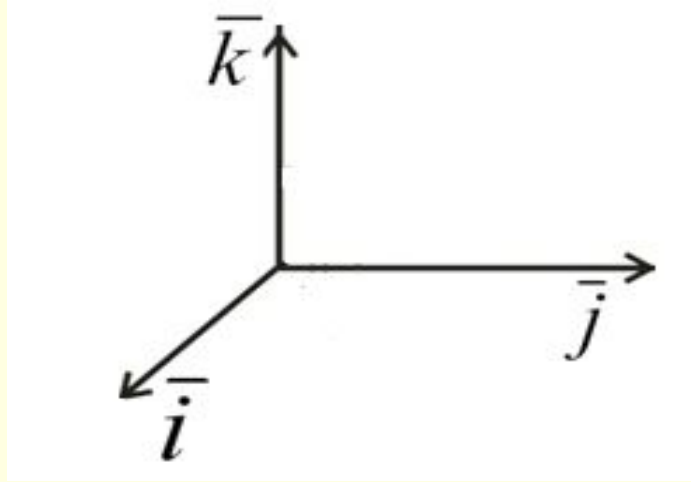
Свойства векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \lambda \quad \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

Векторное произведение векторов

Соотношения между ортами



$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

Векторное произведение векторов

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

Выражение векторного произведения
через координаты

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Векторное произведение векторов

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

$$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \quad - \text{площадь параллелограмма}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \quad - \text{площадь треугольника}$$

Смешанное произведение векторов

Рассмотрим произведение векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , составленное следующим образом:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

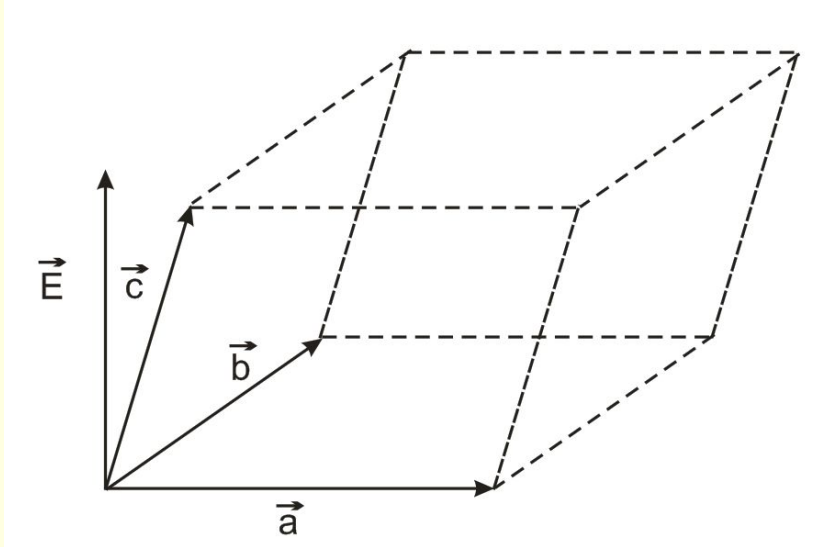
Первые два вектора \vec{a} , \vec{b} перемножаются векторно, а их результат скалярно умножается на вектор \vec{c} .

Такое произведение называется смешанным произведением векторов

ОБОЗНАЧЕНИЕ $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

В результате смешанного произведения получается
число

Геометрический смысл смешанного произведения векторов



$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{E} \cdot \vec{c} = |\vec{E}| \cdot \vec{E} \cdot \vec{c} = V_{\text{параллелепипеда}}$$

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

$$V_{\text{параллелепипеда}} = \left| \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \right|$$

Свойства смешанного произведения векторов

Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a}$$

Смешанное произведение не меняется при перемене местами скалярного умножения

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

Свойства смешанного произведения векторов

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны

Выражение смешанного произведения
через координаты

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$