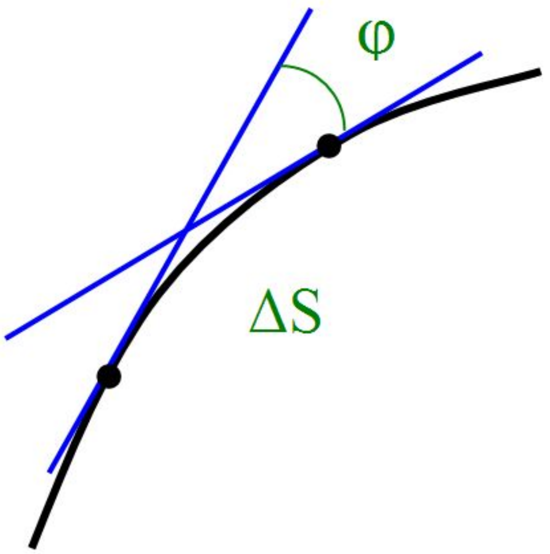
ТЕОРИЯ КРИВЫХ

Кривизна и кручение кривой

Кривизна

Определение: предел отношения угла поворота касательной на дуге кривой, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги называется ***кривизной кривой в данной точке***.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta S} \qquad (*)$$



(*) – кривизна кривой.

Кривизна

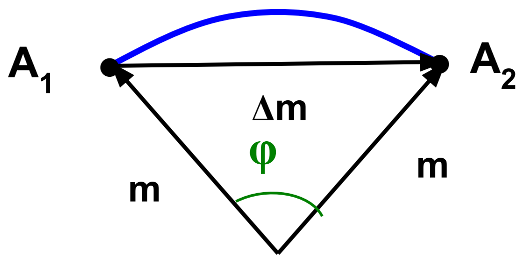
Утверждение (о кривизне):
Величина k в формулах Серре-Френе равна кривизне кривой.
Лемма:
Отношение модуля приращения единичного переменного вектора к углу его поворота при стремлении этого угла к нулю равен единице.

Доказательство леммы:

$$|\overline{m}| = 1$$

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{|\Delta \overline{m}|}{\varphi} = 1$$

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{|\Delta \overline{m}|}{\overset{\cup}{A_1 A_2}} = 1 \qquad \textbf{(*)}$$



(хорда в пределе равна длине дуги окружности).

Кривизна

$$\varphi = \frac{\overset{\cup}{A_1 A_2}}{R} \Rightarrow \varphi = \frac{\overset{\cup}{A_1 A_2}}{|\,\overline{m}\,|} = \overset{\cup}{A_1 A_2}$$

Следовательно, в (*) заменяем: $\lim\limits_{\varphi \to 0} \dfrac{|\,\Delta\overline{m}\,|}{\varphi} = 1$

Ч.т.д.

Доказательство утверждения:

$$k = |\,\overline{r}''\,| = \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{|\,\Delta\overline{\tau}\,|}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{|\,\Delta\overline{\tau}\,|}{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{\Delta S} =$$

$$= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{|\,\Delta\overline{\tau}\,|}{\varphi} \cdot \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\varphi}{\Delta S} = (\Delta S \to 0 \Leftrightarrow \varphi \to 0) =$$

$$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{|\,\Delta\overline{\tau}\,|}{\varphi} \cdot \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\varphi}{\Delta S}$$

Кривизна

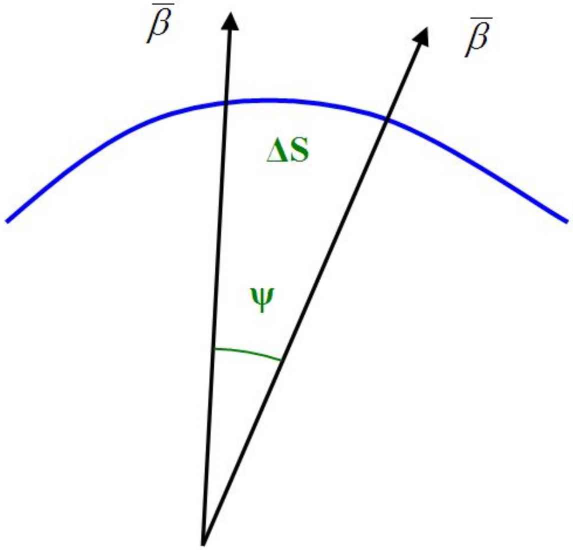
По лемме: $\lim\limits_{\varphi \to 0} \dfrac{|\Delta \bar{\tau}|}{\varphi} = 1 \Rightarrow k = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\varphi}{\Delta S}$

Ч.т.д.

Кручение

Определение: величина χ в формулах Серре-Френе называется ***кручением кривой.***

Утверждение (о кручении)***:***
Модуль кручения равен пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги.



Доказательство:

$$\frac{d\bar\beta}{ds} = -\chi\bar\nu \Rightarrow |\chi| = \left|\frac{d\bar\beta}{ds}\right|$$

$$|\chi| = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{|\Delta\bar\beta|}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{|\Delta\bar\beta|}{\psi}\cdot\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\psi}{\Delta S} =$$

Кручение

$$= \lim_{\psi \to 0} \frac{|\Delta \overline{\beta}|}{\psi} \cdot \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\psi}{\Delta S} = \text{(по Лемме)} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\psi}{\Delta S}$$

Ч.т.д.

Формулы вычисления кривизны и кручения кривой в случае натуральной параметризации

Кривая задана: $\bar{r} = \bar{r}(s)$

$\bar{r}' = \bar{\tau}$

$|\bar{r}''| = k.$

$|[\bar{r}'; \bar{r}'']| = |\bar{\tau}| \cdot |\bar{r}''| \cdot \sin 90^{\circ} = |\bar{r}''| = k$

$$k = |[\bar{r}'; \bar{r}'']| \qquad (24)$$

(24) – формулы кривизны в натуральной параметризации.

$\bar{r}'' = k\bar{\nu},$

$\bar{r}''' = (k\bar{\nu})' = k'\bar{\nu} + k\bar{\nu}' \overset{(23)}{=} k'\bar{\nu} + k(-k\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}) = k'\bar{\nu} - k^2\bar{\tau} + k\chi\bar{\beta}$

Рассмотрим смешанное произведение векторов $\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''$.

$\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = \bar{\tau} \cdot k\bar{\nu} \cdot (k'\bar{\nu} - k^2\bar{\tau} + k\chi\bar{\beta}) = \bar{\tau} \cdot k\bar{\nu} \cdot k\chi\bar{\beta}$ =(*свойства Репера Френе*)=

$= k^2\chi \underbrace{\bar{\tau} \cdot \bar{\nu} \cdot \bar{\beta}}_{=1} = k^2\chi$

Формулы вычисления кривизны и кручения кривой в случае натуральной параметризации

$$\chi = \frac{\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''}{k^2}$$

Воспользуемся формулой (24) и получим:

$$\chi = \frac{\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''}{[\bar{r}'; \bar{r}'']^2} \qquad (25)$$

(25) – формулы вычисления кручения кривой в натуральной параметризации

Формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в случае произвольной параметризации

Кривая задана: $\bar{r} = \bar{r}(t)$

Введём обозначения: $"\,'\," = \dfrac{d}{ds}$ $\qquad t'\dfrac{d}{dt} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d}{dt}$

$$"\bullet" = \frac{d}{dt} \qquad \frac{d}{dt} = \dot{s}\frac{d}{ds}$$

$$\bar{r}' = \dot{\bar{r}}t'$$
$$\dot{\bar{r}} = \bar{r}' \cdot \dot{s}$$

$\dot{s} > 0$ $\quad \dot{s} = |\dot{\bar{r}}|$, так как $|\bar{r}'| = 1.$

$$\bar{r}' = \frac{\dot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|} = \dot{\bar{r}}t' \qquad t' = \frac{1}{\dot{s}} = \frac{1}{|\dot{\bar{r}}|}$$

$$\bar{r}'' = \dot{\bar{r}}'t' + \dot{\bar{r}}t'' = \ddot{\bar{r}}t'^2 + \dot{\bar{r}}t''$$

Подставим найденные вектора в формулу (24):

Формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в случае произвольной параметризации

$$k = |[\bar r';\bar r'']| = |[\dot{\bar r}t';\ddot{\bar r}t'^2 + \dot{\bar r}t'']| = t'^3\,|[\dot{\bar r};\ddot{\bar r}]|$$

и окончательно получим:

$$k = \frac{|[\dot{\bar r};\ddot{\bar r}]|}{|\dot{\bar r}^3|} \qquad (26)$$

(26) - формула вычисления кривизны кривой в случае произвольной параметризации.

$$\bar r''' = (\ddot{\bar r}t'^2 + \dot{\bar r}t'')' = (\ddot{\bar r}t'^2)' + (\dot{\bar r}t'')' = \ddot{\bar r}'t'^2 + 2t't''\ddot{\bar r} + \dot{\bar r}'t'' + \dot{\bar r}t''' = \dddot{\bar r}t'^3 + 3t't''\ddot{\bar r} + \dot{\bar r}t'''$$

Рассмотри смешанное произведение векторов $\bar r', \bar r'', \bar r'''$

$$(\bar r'\cdot\bar r''\cdot\bar r''') = \dot{\bar r}t'\cdot(\ddot{\bar r}t'^2 + \dot{\bar r}t'')\cdot(\dddot{\bar r}t'^3 + 3t't''\ddot{\bar r} + \dot{\bar r}t''') = t'^6(\dot{\bar r}\cdot\ddot{\bar r}\cdot\dddot{\bar r})$$

И векторное произведение векторов $\bar r', \bar r''$

$$[\bar r';\bar r''] = t'^3[\dot{\bar r};\ddot{\bar r}]$$

Формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в случае произвольной параметризации

Найденные нами произведения подставим в формулу (25)

$$\chi = \frac{\bar r' \cdot \bar r'' \cdot \bar r'''}{[\bar r'; \bar r'']^2} = \frac{t'^6 (\dot{\bar r} \cdot \ddot{\bar r} \cdot \dddot{\bar r})}{t'^6 [\dot{\bar r}; \ddot{\bar r}]^2}$$

$$\chi = \frac{\dot{\bar r} \cdot \ddot{\bar r} \cdot \dddot{\bar r}}{[\dot{\bar r}; \ddot{\bar r}]^2} \qquad (27)$$

(27) – формулы вычисления кручения кривой в случае произвольной параметризации

Утверждение 4.

Кривая лежит в одной плоскости $\Leftrightarrow$ $\chi = 0$ в каждой точке этой кривой.

Точки спрямления и уплощения

Доказательство:

⇨ Пусть кривая лежит в одной плоскости, следовательно,
$\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''$ лежат в этой плоскости $\Rightarrow \bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = 0$
$\overset{(25)}{\Rightarrow} \chi = 0$

⇦ Пусть $\chi = 0 \Rightarrow \bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = 0 \overset{\text{утв 3}}{\Rightarrow} \bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''$ лежат в одной плоскости $\Rightarrow \bar{r}'$ лежит в одной плоскости в любой точке Кривой, следовательно, кривая плоская.

Ч.т.д.

Определение: точка пространственной кривой называется ***точкой спрямления***, если в этой точке *k=0*.

Определение: точка пространственной кривой называется ***точкой уплощения***, если в ней $\chi = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{\tau}}{ds} = k\overline{\nu} \\ \dfrac{d\overline{\nu}}{ds} = -k\overline{\tau} + \chi\overline{\beta} \\ \dfrac{d\overline{\beta}}{ds} = -\chi\overline{\nu} \end{cases} \qquad (23)$$

(23) – формулы Серре-Френе

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{\tau}}{ds} = k\overline{\nu} \\ \dfrac{d\overline{\nu}}{ds} = -k\overline{\tau} + \chi\overline{\beta} \\ \dfrac{d\overline{\beta}}{ds} = -\chi\overline{\nu} \end{cases} \qquad (23)$$

(23) – формулы Серре-Френе

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{\tau}}{ds} = k\overline{\nu} \\ \dfrac{d\overline{\nu}}{ds} = -k\overline{\tau} + \chi\overline{\beta} \\ \dfrac{d\overline{\beta}}{ds} = -\chi\overline{\nu} \end{cases} \qquad (23)$$

(23) – формулы Серре-Френе

Лемма:

Отношение модуля приращения единичного переменного вектора к углу его поворота при стремлении этого угла к нулю равен единице.

Свойства Репера Френе:

1. $\bar{\tau}\cdot\bar{\nu}=\bar{\tau}\cdot\bar{\beta}=\bar{\nu}\cdot\bar{\beta}=0$

2. $\bar{\tau}^2=\bar{\nu}^2=\bar{\beta}^2=1$

3. $$\begin{cases} [\bar{\tau};\bar{\tau}]=\bar{0} & [\bar{\nu};\bar{\tau}]=-\bar{\beta} & [\bar{\beta};\bar{\nu}]=-\bar{\tau} \\ [\bar{\tau};\bar{\nu}]=\bar{\beta} & [\bar{\nu};\bar{\nu}]=\bar{0} & [\bar{\beta};\bar{\tau}]=\bar{\nu} \\ [\bar{\tau};\bar{\beta}]=-\bar{\nu} & [\bar{\nu};\bar{\beta}]=\bar{\tau} & [\bar{\beta};\bar{\beta}]=\bar{0} \end{cases}$$

$$k = \left| [\bar{r}'; \bar{r}''] \right| \qquad (24)$$

(24) – формула вычисления кривизны в случае натуральной параметризации

$$k = \left| \left[\bar{r}'; \bar{r}'' \right] \right| \qquad (24)$$

(24) – формула вычисления кривизны в случае натуральной параметризации

$$\chi = \frac{\overline{r}' \cdot \overline{r}'' \cdot \overline{r}'''}{[\overline{r}'; \overline{r}'']^2} \tag{25}$$

(25) – формула вычисления кручения кривой в случае натуральной параметризации.

$$\chi = \frac{\overline{r}' \cdot \overline{r}'' \cdot \overline{r}'''}{[\overline{r}'; \overline{r}'']^2} \qquad (25)$$

(25) – формула вычисления кручения кривой в случае натуральной параметризации.

Утверждение 3.

Вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.