Численное интегрирование

Цель – приближенно вычислить определенный интеграл: $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

на $[a,b]$.

По теореме Ньютона – Лейбница он равен разности верхнего и нижнего пределов первообразной функции $f(x)$ - $F(x)$ $(F'(x) = f(x))$. Но для табличных функций их первообразная не существует и даже для известных $f(x)$ не всегда представима в виде комбинаций элементарных функций.

Интеграл геометрически равен площади криволинейной трапеции.

В численных методах интеграл ищется в виде квадратуры: $\tilde{I} = \sum\limits_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$. Необходимо найти оптимальным образом A_i и x_i. Обычно коэффициенты подбираются так, чтобы квадратура давала точное значение для полинома максимально возможной степени.

Метод Ньютона – Котеса

Предполагается, что значения аргументов известны и расположены равномерно с шагом h . Требуется найти коэффициенты A.

Рассмотрим интервал: $[\xi_0, \xi_\mathrm{n}]$, $\xi_i = \xi_0 + hi$.

На интервале $[\xi_0, \xi_\mathrm{n}]$ заменим $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа (2.1.1), подставляя в него переменную q, равную:

.

$$q = \frac{\xi - \xi_0}{h} \left(h = \frac{b-a}{n} \right), \text{получим } P_n(q) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \prod_{j=0}^{n} [q-j]',$$

где штрих означает отсутствие в произведении сомножителя с $j=i$

$$\int_{\xi_0}^{\xi_n} f(\xi) d\xi \approx \int_{\xi_0}^{\xi_n} P_n(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i$$

коэффициенты A_i равны:

$$A_i = \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-i)} dq = (b-a) H_i ,$$

где H_i не зависящие от интервала $[a,b]$ – коэффициенты Котеса.

В дальнейшем рассматривается равномерная сетка узлов с шагом h.

- **Метод прямоугольников.**
-
- Степень полинома *n* = 0 . Коэффициент Котеса (4.1.1) при *n* = 0 (вычисляется как предельный переход при) равен 1.Интервал неопределен, т.к. есть только одна точка - . Геометрически это обозначает, что *f(x)* заменяется на интервале каким-то значением ординаты. Если интервал [*a,b*] велик, то его разбивают точками на *n* интервалов и на каждом применяют метод прямоугольников. Для первого интервала приближенное значение интеграла равно , где .
- В качестве обычно применяют:
- - метод левых прямоугольников;
- - метод правых прямоугольников,
- x_1-*h/2* – метод прямоугольников со средней точкой.
- На [ ] повторяют ту же процедуру и результат суммируют
-
- $I_{\text{л.п.}} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ $I_{\text{п.п.}} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ $I_{\text{ср..т.}} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i - h/2)$
-

Погрешность методов

Погрешность метода на интервале длиной h равна: $R(h) = \int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt - f(x)h$

разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора, получим:

$$R(h) = \int\limits_{x}^{x+h} (f(x) + f'(x)(t-x))dt - f(x)h = f'(x)\frac{h^2}{2}, \qquad \theta \in [x, x+h].$$

Абсолютная погрешность на n интервалах суммируется. В результате, учитывая, что $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ получим: $\left| I - I_{np} \right| \le \dfrac{(b-a)^2}{2n} M_1$, где $M_1 = \max | f'(x) |$.

- **Погрешность методов**

- Погрешность метода на интервале длиной *h* равна: разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора, получим: , . Абсолютная погрешность на *n* интервалах суммируется. В результате, учитывая, что получим: , где .
- Прямоугольник со средней точкой:

- $R(h) = h = \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}}(f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f"(x)\cdot(t-x)^2)dt -$

$h \cdot f(x) = \frac{1}{24}h^{3f"(x)}$

- Абсолютная погрешность на n интервалах суммируется. В результате,

  - учитывая, что получим: $\left|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{I}_{\text{ср.т.}}\right| \leq \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^3}{\boldsymbol{24n^2}}\boldsymbol{M_2}$

- M_2=max|f’’(x)|. Тол есть это метод с повышенной точностью.

Метод трапеций

На частичном интервале функция заменяется линейной, т.е. n=1. $H_0 = \int_0^1 (q-1)dq = \frac{1}{2}, H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}$. На интервале $|x_i, x_{i+1}|$, заменяя *f(x)* на $P_1(x)$, получим для равноотстоящих узлов: $I = h(f_i + f_{i+1})/2$. То есть, площадь криволинейной трапеции заменена площадью прямоугольной трапеции.

Суммируя по всем интервалам, приходим к выражению:

$I_{mp} = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f_i + f_{i+1})$, в котором внутренние ординаты встречается дважды. Окончательно получим:

$$I_{mp} = ((f(a) + f(b)/2 + \sum_{i=1}^{n-1} f_i)h.$$

Между методом трапеций и методом прямоугольников существует простая связь:

$$I_{mp} = \frac{I_{л.п.} + I_{п.п.}}{2}$$

Погрешность метода:

$$R = \int_{x}^{x+h} f dx - \frac{h}{2}\left(f(x) + f(x+h)\right),$$

разлагая функцию в ряд Тейлора, получим:

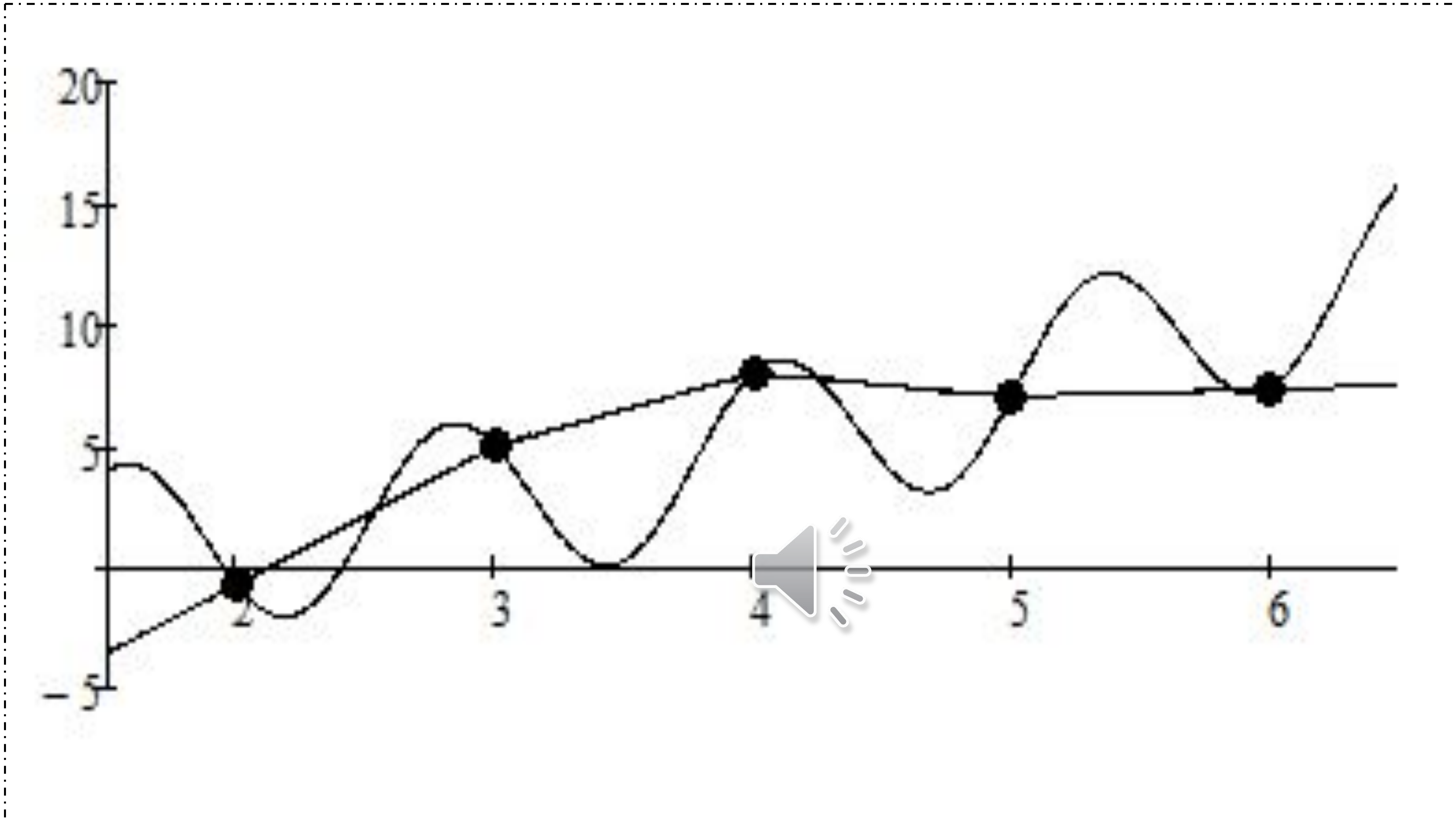
$$R(h) = \int_{x}^{x+h} \left(f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2\right)dt -$$

$$\frac{h}{2}\left(f(x) + f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2} f''(x)\right) = -f''(x)\frac{h^3}{12}$$

,

Погрешность на интервале интегрирования есть сумма погрешности на каждом частичном интервале, в результате получим:

$|I - I_{тр}| \le \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,\quad M_2 = \max|f''|$. Очевидно, что метод трапеций точен для линейной функции.



Геометрическая интерпретация метода трапеций.

Метод парабол. (Метод Симпсона)

Степень полинома n равна двум. Рассмотрим интервал длиной $2h$: $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Коэффициенты Котеса (4.1.1)равны:

$$H_0 = \tfrac{1}{4}\int_0^2 (q-1)(q-2)dq = \frac{1}{6},\ H_1 = -\tfrac{1}{2}\int_0^2 q(q-2)dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \tfrac{1}{4}\int_0^2 (q-1)q\,dq = \frac{1}{6}.$$

В результате квадратурная формула имеет вид:

$$\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = \frac{h}{3}(f(x+h) + 4f(x) + f(x-h)).$$

Для применения метода парабол на $[a\ ,\ b]$,его необходимо разбить на $2n$ интервала, т.е. число интервалов должно быть четно. При суммировании по частичным интервалам внутренние четные точки удваиваются, В результате окончательная формула имеет вид:

$$I_{пар} = \tfrac{2}{3}h((f_0 + f_{2n})/2 + 2\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i}),$$

где $f_0 = f(a),\ f_{2n} = f(b)$.

Оценка точности метода парабол:

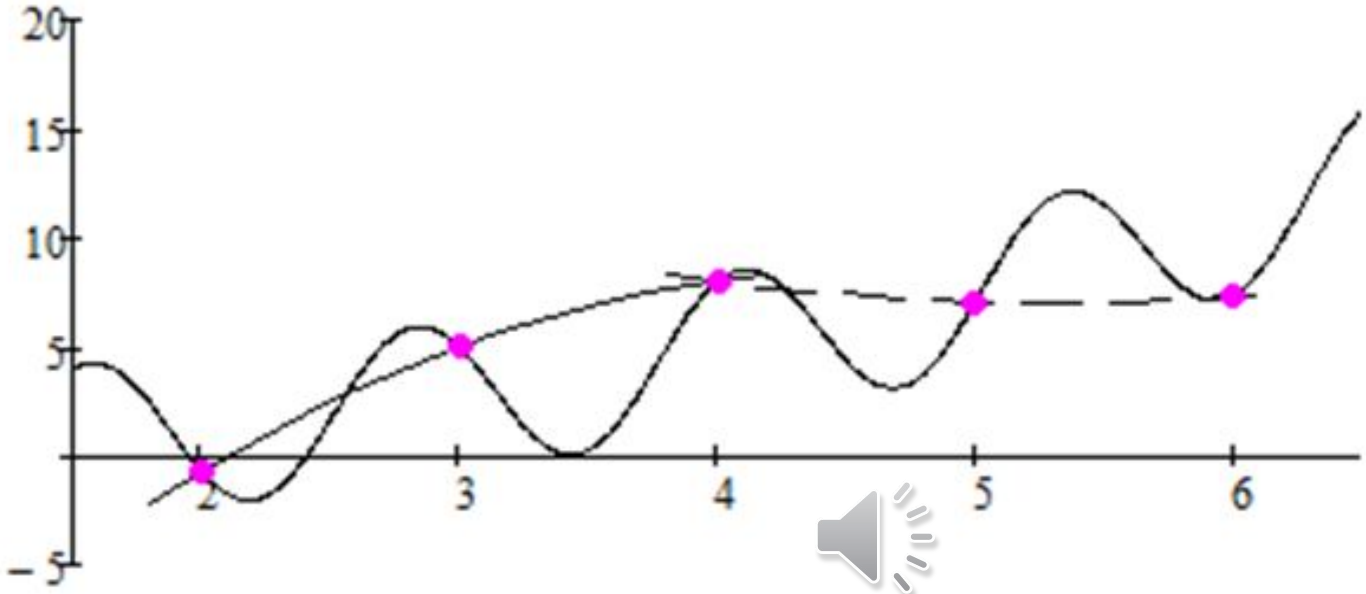
$$R = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} yf(t)dt - \frac{h}{3}(f(x-h) + 4f(x) + f(x+h))$$ и разлагая функции в ряд Тейлора до четвертой производной, получим:

$$R = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(x) \_$$

погрешность R зависит не от третьей, а от четвертой производной, т.е. приближение имеет повышенную точность и формула парабол верна для полиномов третьей степени. Окончательно, погрешность имеет вид:

$$|R| = \frac{h^5 n}{90}\left|y^{IV}(\theta)\right| \le \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} M_4,\ M_4 = \max_{[a,b]} y^{IV}\ .$$

На практике, достижение заданной точности определяется путем сравнения значений интеграла, рассчитанных для текущего и удвоенного числа разбиений интервала.



Геометрическая интерпретация метода парабол.

Квадратурные формулы Гаусса

Предварительно необходимо рассмотреть свойства полиномов

Лежандра: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d^n x}(x^2 - 1)^n$ - полином степени n, $x \in [-1,1]$.

Полиномы ортогональны, то есть: $\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \delta_{n \cdot m}$, где $\delta_{n,m}$ - символ Кронекера.

Имеют n корней на $[-1,1]$.

Для любого полинома $Q_k(x)$: $\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot Q_k(x) \cdot dx = 0$, если $k < n$,

так как полином степени k представим в виде линейной комбинаци полиномов Лежандра до степени k включительно.

Исходим из формулы общего вида:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\cdot dt = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot f(t_i)$$

Для произвольного отрезка $[a,b]$ замена переменных $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot t$ переводит его в отрезок $[-1,1]$, и квадратурная формула Гаусса имеет вид:

$$I_g = \left[\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i\right)\right]$$

Потребуем, чтобы квадратурная формула была точна для полиномов максимальной степени $2\cdot n-1$, а, следовательно, должна быть точна для 1, t, …, $t^{2\cdot n-1}$. Система уравнений: $\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot t_i^k = \frac{1+(-1)^k}{k+1}$ нелинейная.

Используем свойство полинома Лежандра:

$$\int_{-1}^{1} t^k \cdot P_n(t)\cdot dt = \sum_{-1}^{n} A_i \cdot t_i^k \cdot P_n(t_i) = 0$$ при k=0,1, …, n-1.

Равенство интеграла нулю возможно, если t_i - корни полинома Лежандра, которые известны.

Полученные t_i, подставляются в первые n уравнений системы для определения коэффициентов A_i:

$$A_1 \cdot t_1^i + A_2 \cdot t_2^i + \ldots + A_n \cdot t_n^i = \frac{[1 + (-1)^i]}{i+1},\ 0 \le i \le n-1.$$

Определитель системы – определитель Вандермонда $\neq 0$ и система имеет единственное решение.

Оценка точности квадратурной формулы Гаусса проводится по формуле:

$$\left| I - \overline{I_g} \right| \le \frac{(b-a)^{2n+1} \cdot (n!)^4 \cdot M_{2n}}{(2n!)^3 (2n+1)},\ \text{где}\ M_{2n} = \max_{[a,b]} f^{(2n)}.$$