

Передаточные функции и частотные характеристики АС

Вопросы лекции

1 Передаточные функции автоматических систем в разомкнутом или замкнутом состояниях.

- 1.1 Передаточная функция разомкнутой автоматической системы.
- 1.2 Передаточная функция замкнутой автоматической системы.
- 1.3 Передаточная функция замкнутой АС по ошибке.
- 1.4 Передаточная функция замкнутой АС по возмущению.

2 Частотные характеристики автоматических систем.

- 2.1 Частотные характеристики разомкнутых АС.
- 2.2 Частотные характеристики замкнутых АС.

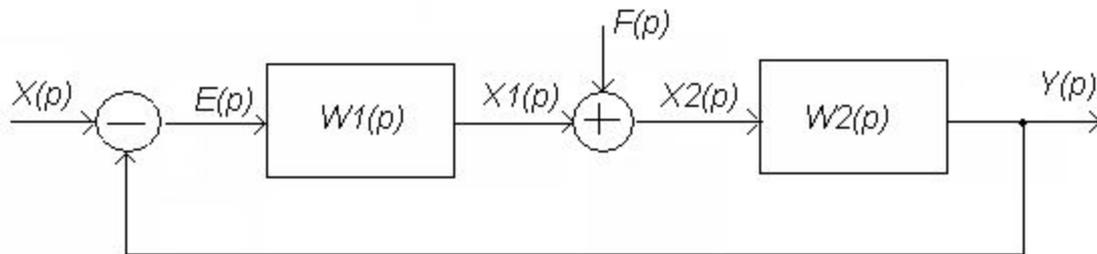
1 Передаточные функции автоматических систем в разомкнутом или замкнутом состояниях.

Для определения передаточной функции АС необходимо составить схему ее ММ (структурную схему системы).

В общем случае эта схема будет многоконтурной и включать в себя различные типовые соединения звеньев.

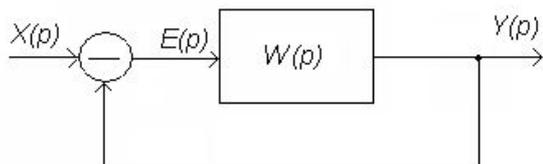
Для определения передаточной функции системы в начале производится преобразование (свертывание) исходной структурной схемы, в результате чего получают одноконтурную структурную схему.

В большинстве случаев структурная схема системы с одним задающим и одним возмущающим воздействиями и одной управляемой величиной после упрощения приводится к следующему виду.



1.1 Передаточная функция разомкнутой автоматической системы

Так как система линейная, то на основании принципа суперпозиций ПФ можно определить на каждое воздействие в отдельности. Предположим, что $F(p)=0$.



Здесь $W(p) = W1(p) * W2(p)$.

$W(p) = Y(p)/E(p)$ – ПФ системы в р. с.

Эта ПФ используется: - для определения ПФ системы в з. с.
- для исследования динамических свойств АС в з. с.

При практическом использовании ПФ записывается в виде отношения многочленов или в виде произведения ПФ звеньев.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}; \quad W(p) = \frac{KB^*(p)}{p^v A^*(p)} = \frac{K(\beta_m p^m + \dots + \beta_1 p + 1)}{p^v (\alpha_n p^n + \dots + \alpha_1 p + 1)} = \frac{K \prod (\text{форс.звеньев})}{p^v \prod (\text{апери., кол.звеньев})};$$

K – коэффициент передачи АС в р. с. $K = \prod_{i=1}^n k_i$

k_i – коэффициенты передачи звеньев в одноконтурной структурной схеме.

Если система статическая $v=0$, то K величина безразмерная.

Если система астатическая, то K величина размерная:

при $v = 1$ $K = [1/c]$ – добротность системы по скорости;

при $v = 2$ $K = [1/c^2]$ – добротность системы по ускорению.

1.2 Передаточная функция замкнутой автоматической системы

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W(p)}{1+W(p)}; \quad \Phi(p) = \frac{B(p)/A(p)}{1+B(p)/A(p)} = \frac{B(p)}{A(p)+B(p)} = \frac{B(p)}{M(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)};$$

$$\begin{cases} Y(p) = \Phi(p)X(p); \\ M(p)Y(p) = B(p)X(p); \end{cases} \quad M(p) = A(p) + B(p) = 0$$

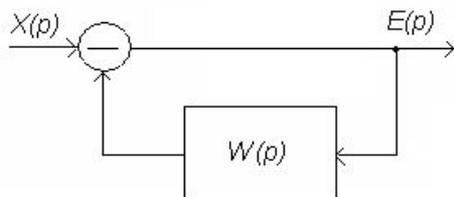
- характеристическое уравнение замкнутой АС, применяется для исследования устойчивости АС.

$$y(t) = L^{-1}\{\Phi(p)X(p)\}.$$

1.3 Передаточная функция замкнутой АС по ошибке

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{X(p)} = \frac{1}{1+W(p)}; \quad \Phi_\varepsilon(p) = \frac{1}{1+B(p)/A(p)} = \frac{A(p)}{A(p)+B(p)} = \frac{A(p)}{M(p)}.$$

$$\begin{cases} E(p) = \Phi_\varepsilon(p)X(p); \\ M(p)E(p) = A(p)X(p); \end{cases}$$



$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{1}{1+B(p)/A(p)} = \frac{A(p)}{A(p)+B(p)} = \frac{A(p)}{M(p)}.$$

Порядок этих многочленов одинаков и равен порядку уравнения системы.

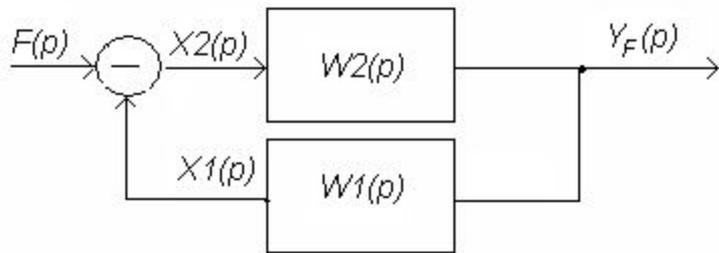
Связь между основной ПФ и ПФ ошибки:

$$E(p) = X(p) - Y(p) \Rightarrow \frac{E(p)}{X(p)} = 1 - \frac{Y(p)}{X(p)}; \quad \Rightarrow \Phi_\varepsilon(p) = 1 - \Phi(p).$$

ПФ ошибки применяется для определения установившихся ошибок в АС, т.е. для расчета точности системы.

1.4 Передаточная функция замкнутой АС по возмущению

Теперь предположим, что $X(p)=0$, тогда схема АС преобразуется к виду.



$$\Phi_F(p) = \frac{Y_F(p)}{F(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W(p)}$$

$$Y(p) = Y_x(p) + Y_F(p)$$

$$E(p) = X(p) - Y(p) = X(p) - Y_x(p) - Y_F(p) = E_x(p) + E_F(p)$$

$$Y_F(p) = -E_F(p)$$

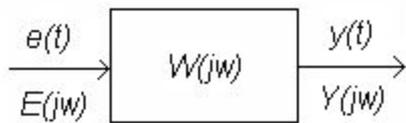
Передаточная функция замкнутой АС по возмущению применяется для определения величины составляющей установившейся ошибки, вызванной действием только возмущения.

$$Y_F(p) = \Phi_F(p)F(p)$$

2 Частотные характеристики автоматических систем

2.1 Частотные характеристики разомкнутых АС

Эти ЧХ устанавливают связь между выходными и входными сигналами основного разомкнутого контура системы, находящегося в режиме устойчивых гармонических колебаний.



Для АС с единичной ОС в качестве входного сигнала берется **сигнал ошибки**, а в качестве выходного - **управляемая величина**.

Аналитические выражения для всех ЧХ разомкнутой АС можно получить, как?

Из ПФ разомкнутой АС путем замены оператора p на $j\omega$ и соответствующих математических преобразований.

При практических исследованиях основной контур АС в ее структурной схеме представляют в виде последовательного соединения типовых звеньев.

Следовательно АФХ разомкнутой АС будет иметь вид:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p = j\omega} = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1)$$

где $W(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)} = |W(j\omega)|$; $\varphi(j\omega) = \arg \text{tg} \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}$.

АЧХ и ФЧХ разомкнутой АС будут иметь вид:

$$W(\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(\omega) = \text{mod } W(j\omega), \quad (2) \quad \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) = \arg W(j\omega). \quad (3)$$

Тогда вещественную и мнимую ЧХ можно определить по формулам:

$$\text{Re}(\omega) = W(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad (4) \quad \text{Im}(\omega) = W(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (5)$$

АФХ разомкнутой АС строится на комплексной плоскости в виде годографа.

Вид годографа зависит от ПФ разомкнутой АС (от порядка астатизма системы).

Статическая АС ($\nu=0$)

$$W(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)}$$

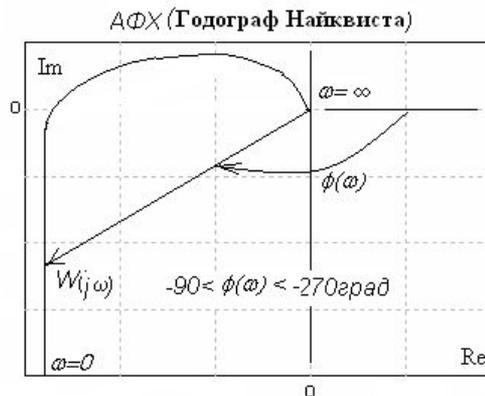
$$W(j\omega) = \frac{K}{(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)(1+jT_3\omega)}$$



Астатическая АС 1-го порядка ($\nu=1$)

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

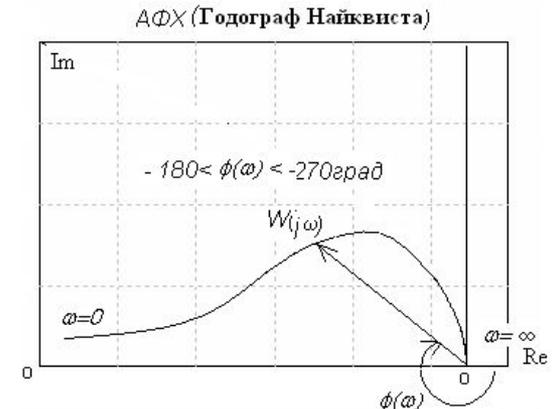
$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}$$



Астатическая АС 2-го порядка ($\nu=2$)

$$W(p) = \frac{K}{p^2(1+T_1p)}$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2(1+jT_1\omega)}$$



Годографы разомкнутой АС используются для исследования устойчивости замкнутых АС по частотному критерию устойчивости Найквиста.

2.1.1 Логарифмические частотные характеристики разомкнутых АС

При исследовании динамических свойств системы АЧХ и ФЧХ разомкнутых АС строятся в логарифмическом масштабе.

Для получения ЛАЧХ разомкнутой АС выражение АЧХ логарифмируют.

$$L(\omega) = 20 \lg W(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^n W_i(\omega) = 20 \lg \sum_{i=1}^n W_i(\omega).$$

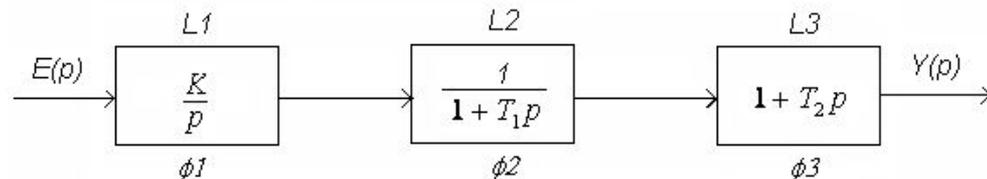
На практике ЛАЧХ разомкнутой АС строят двумя способами:

1) Путем суммирования ЛАЧХ отдельных звеньев на одном и том же бланке;

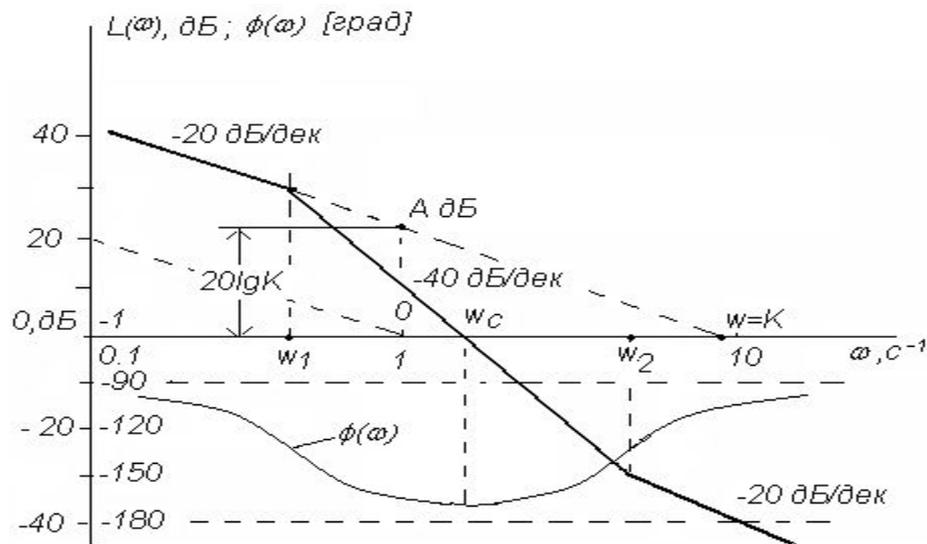
2) Непосредственно по ПФ АС в р. с.

Методика построения ЛАЧХ по передаточной функции разомкнутой АС

Пример: $W(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K(1+T_2p)}{p(1+T_1p)}$ - ПФ разомкнутой АС.



Будем строить асимптотическую ЛАЧХ.



ω_c - частота среза разомкнутой АС.

1 Определить частоты излома отдельных звеньев и отложить их на оси частот: $w_1=1/T_1$, $w_2=1/T_2$.

2 Определить величину $20 \lg K = A \text{ дБ}$.

3 Отложить величину $A \text{ дБ}$ на $w=1 \text{ 1/с}$.

4 Если АС астатическая, т.е. в ПФ имеется интегрирующее звено, то построение ЛАЧХ необходимо начинать с этого звена.

Для этого через точку A необходимо провести прямую с наклоном -20 дБ/дек до ближайшей частоты излома w_1 . Продолжение этой прямой до оси частот дает точку с частотой $w=K \text{ 1/с}$.

5 На частотах излома типовых звеньев необходимо изменять наклон ЛАЧХ в зависимости от типа звена, считая от предыдущего наклона.

При этом нужно помнить, что:

- аperiodическое звено изменяет наклон на -20 дБ/дек ;
- форсирующее 1-го порядка – на $+ 20 \text{ дБ/дек}$;
- колебательное – на $- 40 \text{ дБ/дек}$;
- форсирующее 2-го порядка – на $+ 40 \text{ дБ/дек}$.

Замечания:

1 Для статической АС начальный участок ЛАЧХ до первой частоты излома располагается параллельно оси частот.

2 Для астатических АС второго порядка начальный участок ЛАЧХ до первой частоты излома имеет наклон -40 дБ/дек , продолжение этого участка до оси частот дает точку с частотой $\omega = \sqrt{K}$.

3 Для колебательных и форсирующих звеньев 2-го порядка при коэффициенте затухания $\xi < 0,5$ и $\xi > 1,3$ необходимо уточнять суммарную ЛАЧХ в районе частоты излома этих звеньев по точным формулам ЛАЧХ и по специальным поправочным графикам.

4 Точная ЛАЧХ разомкнутой АС может быть построена по точкам с использованием формулы:

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} + 20 \lg \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}.$$

На частоте среза амплитуда колебаний входного и выходного сигналов?

ФЧХ АС в р. с. строится на том же бланке в полулогарифмическом масштабе.

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) = \arg W(j\omega). \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg T_1 \omega + \arctg T_2 \omega.$$

2.2 Частотные характеристики замкнутых АС

Частотные характеристики замкнутой АС устанавливают связь между входными и выходными сигналами этой системы.

Они могут быть получены из основной ПФ теми же самыми методами, что и характеристики разомкнутой системы.