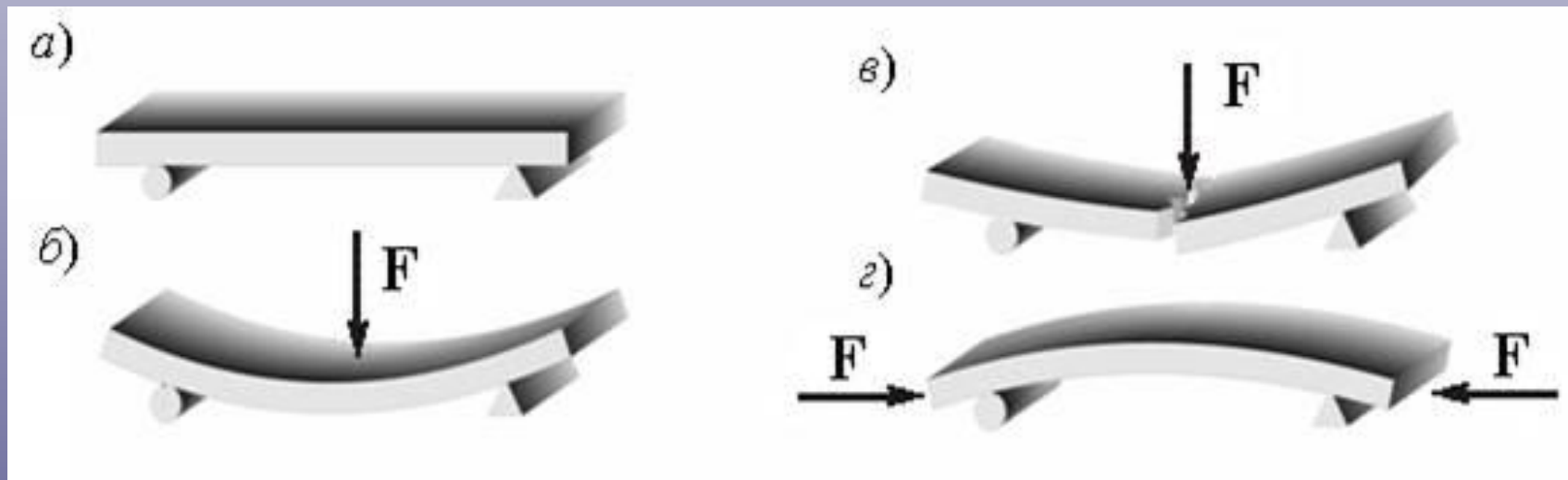


# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Марина Борисовна  
Бородина

**Сопротивление материалов** – наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов сооружений и деталей машин.

**Цель расчетов** в сопротивлении материалов – создание прочных, устойчивых, обладающих достаточной жесткостью, долговечностью и вместе с тем экономичных элементов сооружений.



Способность конструкции воспринимать заданную нагрузку, не разрушаясь и без остаточных деформаций, называют **прочностью**.

Способность сооружений и ее частей под нагрузкой сохранять свои размеры и форму в установленных нормах пределах называется **жесткостью**.

Способность конструкции, и ее частей, сохранять под нагрузкой первоначальную форму упругого равновесия называется **устойчивостью**.

**Надежность** – свойство конструкции выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных нормативных пределах в течение требуемого промежутка времени.

**Ресурс** – допустимый срок службы изделия. Указывается в виде общего времени наработки или числа циклов нагружения конструкции.

**Отказ** – нарушение работоспособности конструкции.

**Прочностной надежностью** называется отсутствие отказов, связанных с разрушением или недопустимыми деформациями элементов конструкции.

Надежность конструкции обеспечивается, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при гарантированной долговечности. Ее экономичность в значительной мере определяется расходом материала, применением менее дефицитных конструкционных материалов, возможностью изготовления деталей по наиболее прогрессивным технологиям. Надежность и экономичность - противоречивые требования.

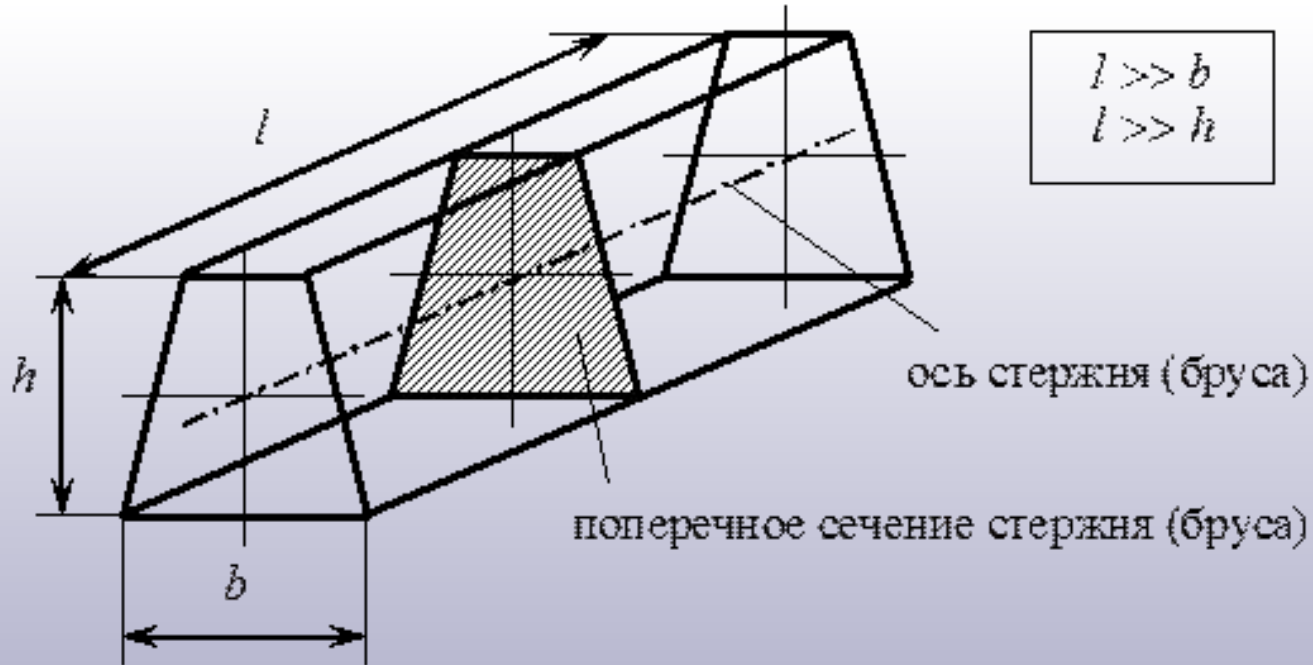
# Реальный объект и расчетная схема

**Расчетная схема** конструкции – её упрощенная схема, освобожденная от несущественных в данной задаче особенностей.

**Факторы, существенно влияющие на результаты расчётов:**

- геометрия объекта,
- форма и размеры объекта,
- физические характеристики материала,
- нагрузки, прикладываемые к объекту.

Основным упрощающим приемом в сопротивлении материалов является приведение геометрической формы тела к схемам **бруса** (**стержня**), **оболочки** или **пластины**.



Если поперечное сечение при движении вдоль оси не изменяется, то тогда имеет место **стержень постоянного сечения**; в противном случае – **стержень переменного сечения**.

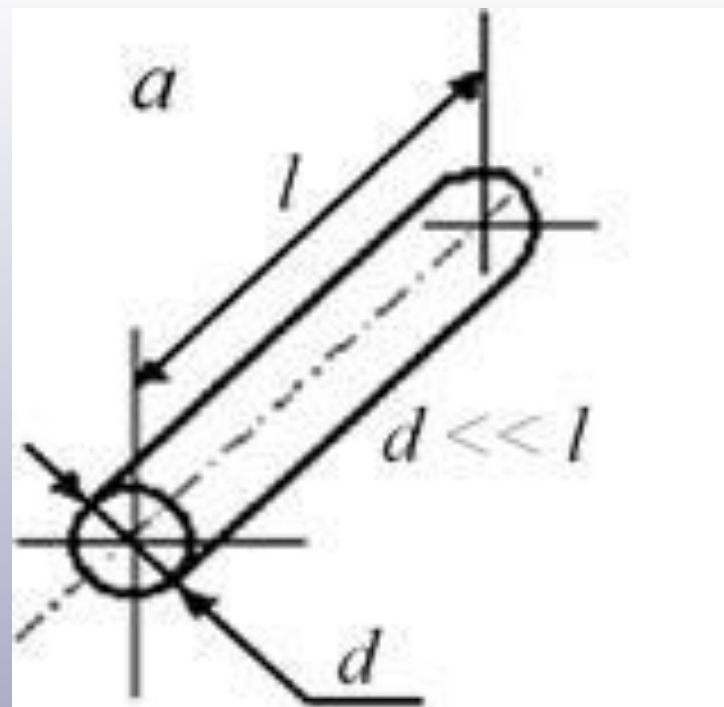
Если ось стержня – прямая линия, то это **прямой стержень**. Если ось стержня – кривая линия, то его называют **кривым стержнем**.

Если поперечное сечение при движении вдоль оси вращается вокруг касательной к оси, то стержень называют **естественно-закрученным**.

Примером прямого естественно-закрученного стержня постоянного сечения является рабочая часть сверла.

Брус, работающий на растяжение, называют **стержнем**, на изгиб, обычно называют **балкой**, а стержень, передающий вращательное движение – **валом**.

Стержневые элементы, воспринимающие вертикальные сжимающие силы, называют **стойками**, а наклонные элементы – **раскосами**.



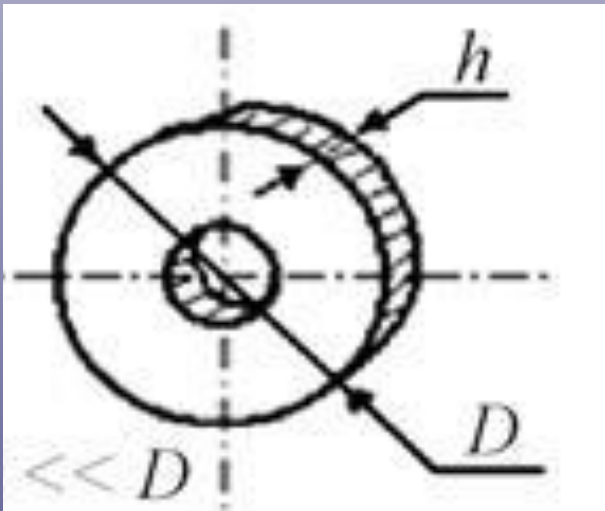
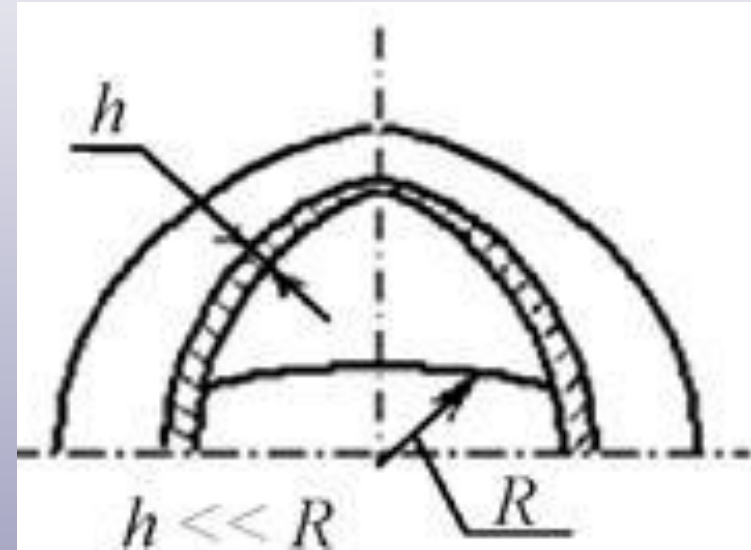
Конструкцию, состоящую из соединенных изгибаемых стержней, называют **рамой**.

Если же благодаря шарнирному соединению стержней все они работают только на растяжение или сжатие (от нагрузки, приложенной в узлах), то конструкцию называют **фермой**.

Второй основной геометрической формой, рассматриваемой в сопротивлении материалов, является **оболочка**, под которой подразумевается тело, у которого одно из измерений (толщина) намного меньше, чем два других.

*К оболочкам относятся различного рода резервуары, котлы, купола зданий, корпуса подводных лодок, обшивка фюзеляжа самолета и т.п.*

**Срединная поверхность** — это геометрическое место точек, равноудаленных от внешней и внутренней поверхностей оболочки.



Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется **пластиной**.

*Примером могут служить крыши и днища резервуаров, перекрытия зданий, различные диски и т.п.*

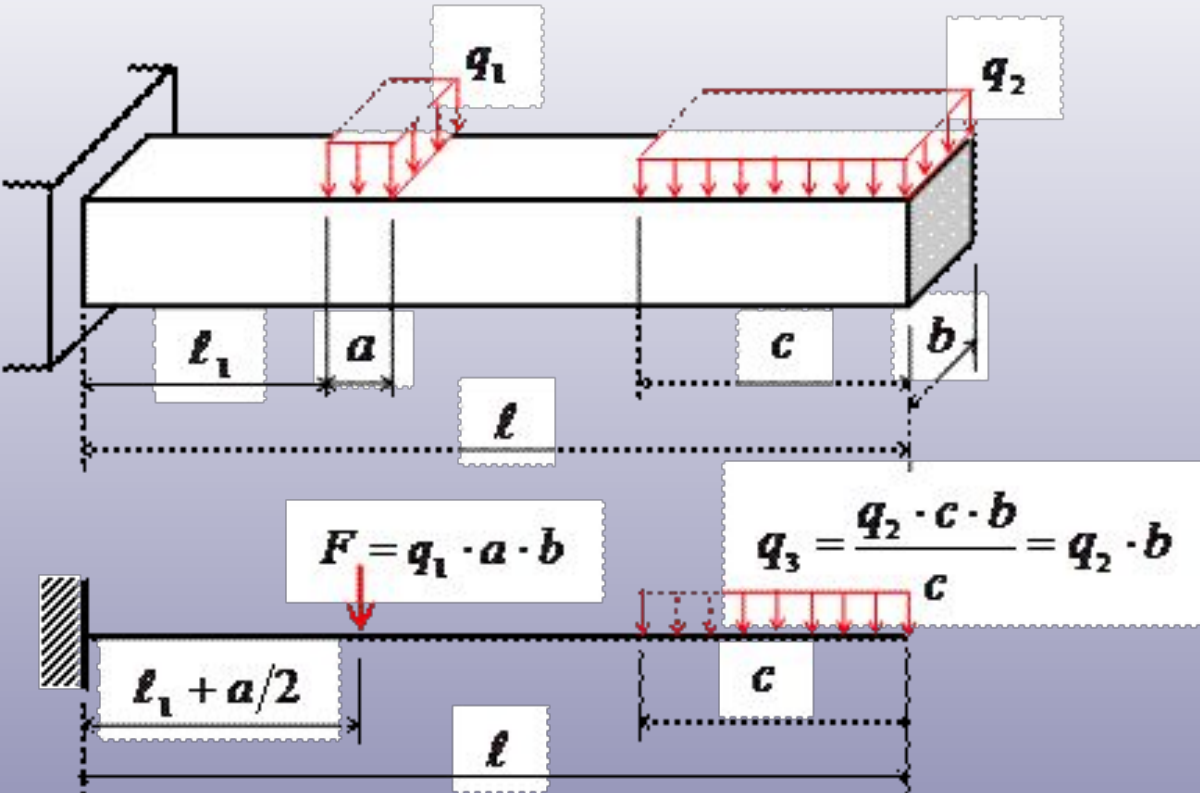


# Связи

Для соединения отдельных частей конструкции между собой и передачи внешней нагрузки на основание на нее накладываются **связи**, ограничивающие перемещения тех точек сооружения, к которым они приложены.

**!** Повторить материал курса «Теоретическая механика»: ***Связи и их реакции***

# Внешние и внутренние силы. Метод сечений



Если давление  $q_1$  ( $\text{Н/м}^2$ ) передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента ( $a \ll l$ ), то его на основании принципа Сен-Венана можно привести к **сосредоточенной силе  $F$**

Если давление  $q_2$  ( $\text{Н/м}^2$ ) передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой сравнимы с размерами всего элемента ( $c < l$ ), то его представляют в виде **распределенной или погонной нагрузки  $q_3$**  с размерностью  $\text{кН/м}$  или  $\text{кН/м}^2$

По времени действия внешние нагрузки (силы) разделяются на **постоянные и временные**.

**Статические** нагрузки (постоянные) - такие, которые изменяют свою величину или точку приложения (направление) с очень небольшой скоростью, так что возникающими при этом ускорениями (силами инерции) можно пренебречь.

**Динамические** нагрузки - изменяются во времени с большой скоростью, при этом силы инерции должны быть учтены, так как оказывают существенное влияние на конструкцию. Динамические нагрузки подразделяются на внезапно приложенные, повторно-переменные и ударные.

Временная нагрузка может сохранять более или менее постоянную величину в течение всего периода ее действия, а может непрерывно изменяться по некоторому закону; в последнем случае она называется **переменной нагрузкой**.

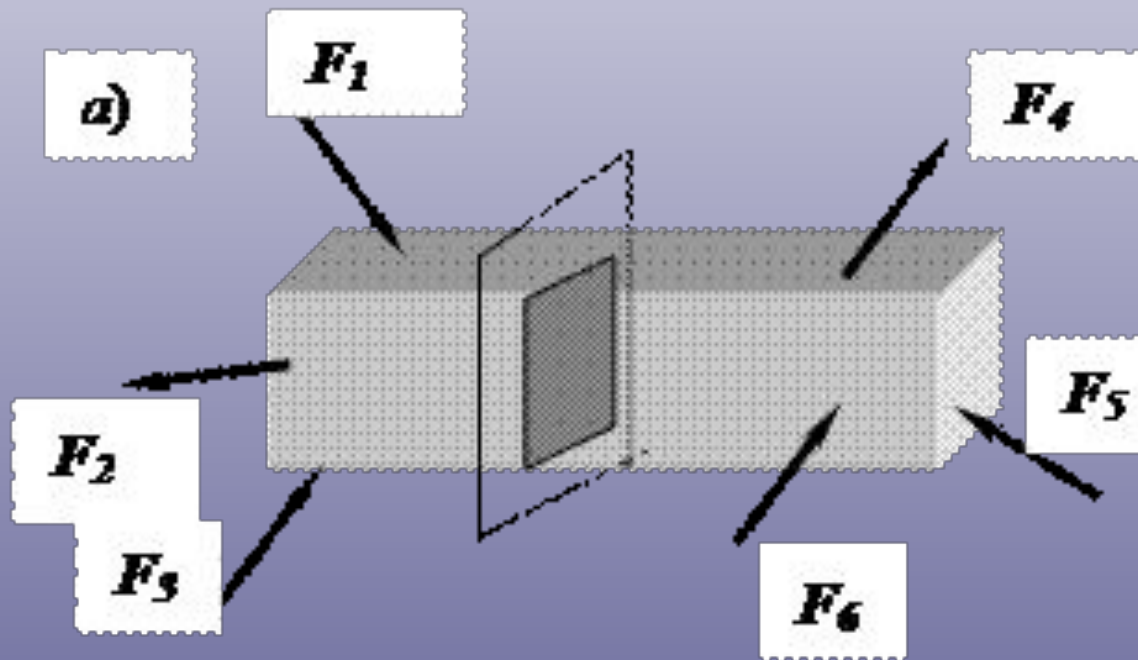
Если переменная нагрузка изменяется по циклическому (повторяющемуся) закону, то она называется **циклической**.

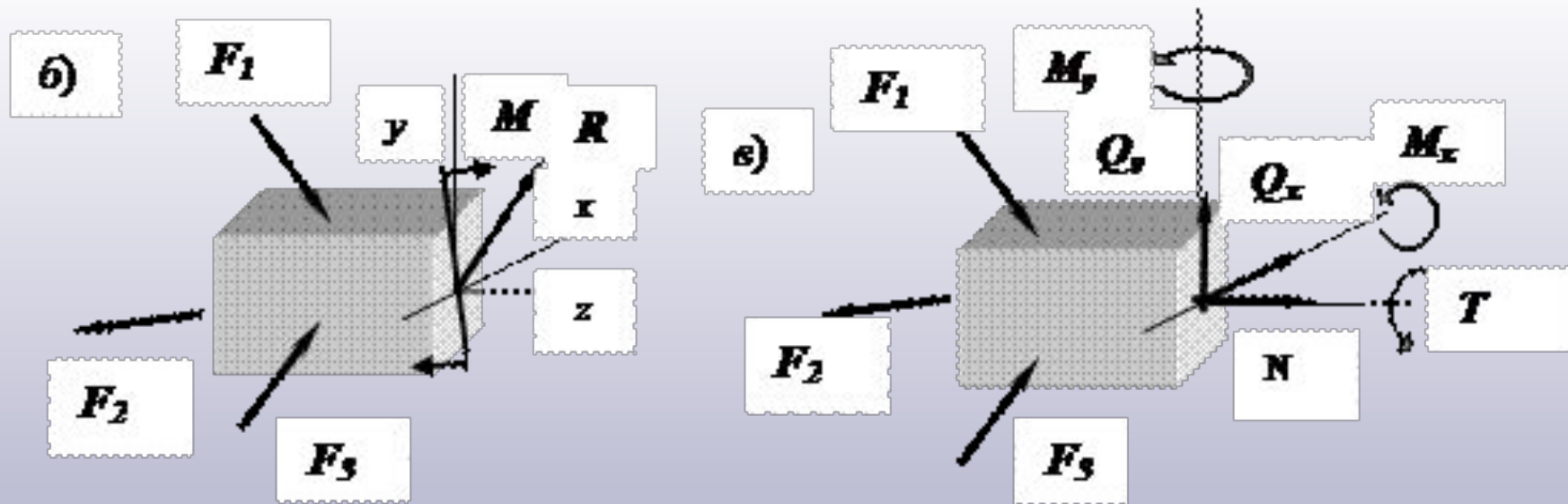
Под **внешними силами (нагрузками)** понимаются силы взаимодействия данного материального тела со всеми другими окружающими его телами.

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется **внутренними силами**, которые возникают внутри тела под действием внешних нагрузок и определяются силами межмолекулярного воздействия.

Для выявления внутренних сил и последующего их определения применяют **метод сечений**.

Пусть к элементу сооружения, имеющего форму бруса, приложена система внешних сил, удовлетворяющая условиям равновесия. Под действием этой нагрузки в элементе возникают внутренние силы. В произвольном месте мысленно **рассечем брус поперечным сечением** на две части

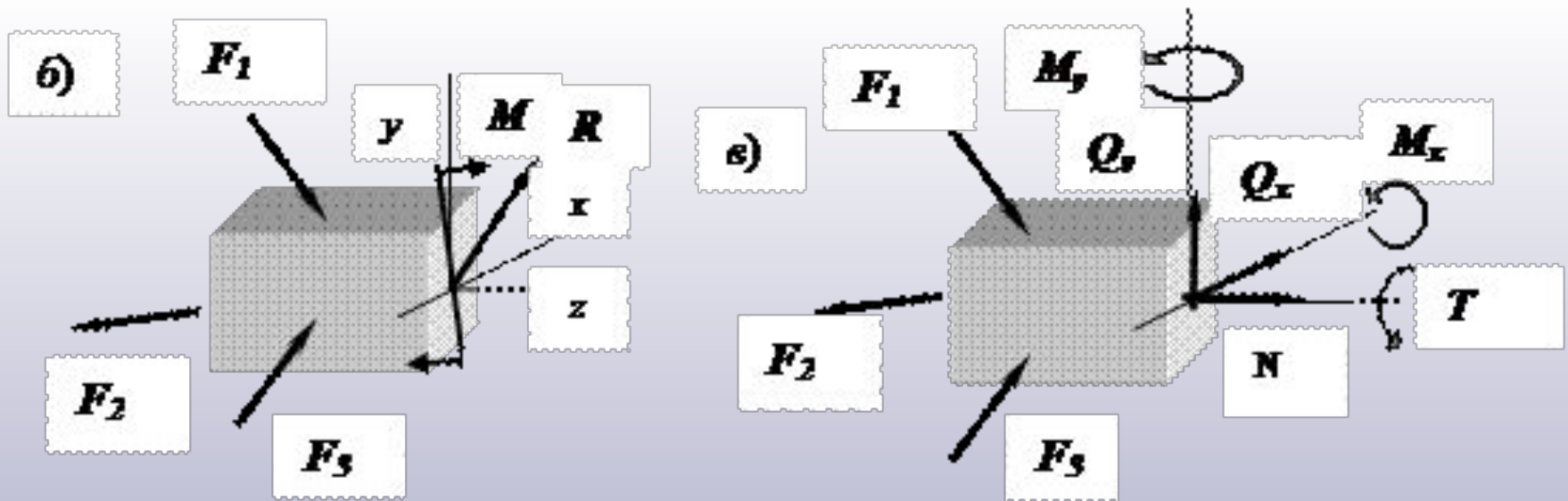




Так как связи между частями устранены, то необходимо действие правой части на левую, и левой на правую заменить системой сил в этом сечении.

Согласно допущению о сплошности материала следует считать, что внутренние силы распределены по сечению непрерывно по некоторому не известному нам закону.

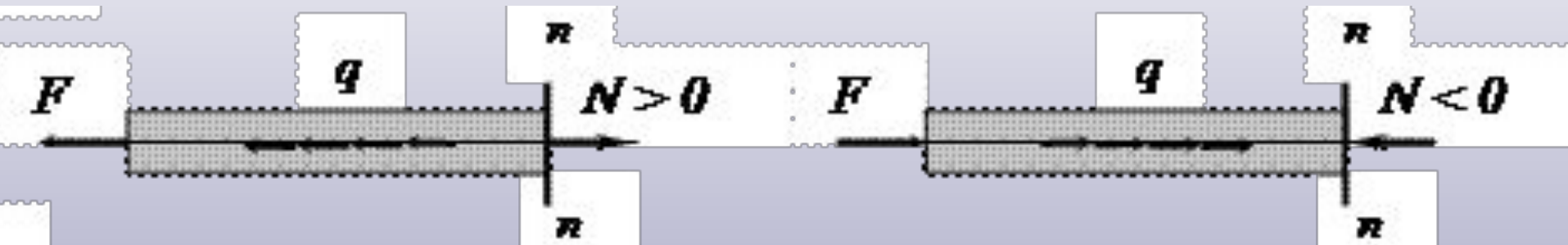
Внутренние усилия должны быть так распределены по сечению, чтобы деформированные поверхности сечения при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали. Это требование в механике твердого деформируемого тела носит название **условия неразрывности деформаций**.



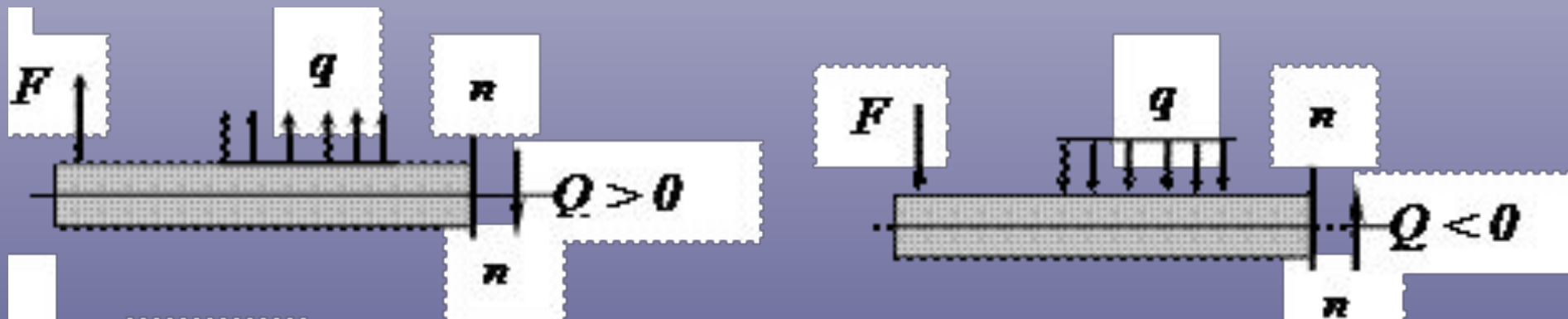
Внутренние силы, возникающие в сечении целого бруса по отношению к рассматриваемой отсеченной части бруса, являются внешними и дополняют систему заданных внешних сил до равновесной.

$$\begin{aligned} \Sigma Z &= \Sigma F_z + N = 0; & \Sigma m_z &= \Sigma M_z + T = 0; \\ \Sigma Y &= \Sigma F_y + Q_y = 0; & \Sigma m_y &= \Sigma M_y + M_y = 0; \\ \Sigma X &= \Sigma F_x + Q_x = 0; & \Sigma m_x &= \Sigma M_x + M_x = 0. \end{aligned}$$

Условимся продольную силу считать положительной, если она вызывает растяжение, т.е. направлена от сечения и отрицательной, если она вызывает сжатие, т. е. направлена к сечению.



Поперечную силу  $Q$  будем считать положительной, если она направлена так, что стремится повернуть отсеченную часть бруса по ходу часовой стрелки, и отрицательной, если - против хода часовой стрелки.



**Крутящий момент**  $T$  будем считать положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали на рассматриваемое сечение он направлен по ходу часовой стрелки или внешний скручивающий момент направлен против хода часовой стрелки



**Изгибающий момент**  $M_x$  считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон рассматриваемой части бруса. В противном случае изгибающий момент считается отрицательным





## ***Порядок определения внутренних сил методом сечений:***

1. Мысленно рассекаем брус на две части в пределах исследуемого  $i$ -го участка.
2. Оставляем ту часть бруса, на которую действует меньше сил.
3. Заменяем действие условно отброшенной части бруса положительными внутренними силовыми факторами, приведенными к центру тяжести исследуемого сечения бруса.
4. Выберем для оставленной части бруса скользящую систему координат (начало координат совмещаем с границей участка, положение исследуемого сечения определяется координатой  $z_i$ , где  $0 \leq z_i \leq c$  и  $c$  – длина  $i$ -го участка).
5. Определяем искомые внутренние силовые факторы из уравнений равновесия  $\Sigma Z = 0$ ;  $\Sigma Y = 0$ ;  $\Sigma X = 0$ ;  $\Sigma mz = 0$ ;  $\Sigma my = 0$ ;  $\Sigma mx = 0$ , которые составляем для оставленной части бруса.

В зависимости от вида внутренних силовых факторов, возникающих в сечении, различают различные следующие виды нагружения бруса:

- **Растяжение или сжатие**. Действует только продольная сила  $N$ .
- **Кручение**. Действует только крутящий момент  $T$ .
- **Сдвиг**. Действует только поперечная сила  $Q_x$  или  $Q_y$
- **Изгиб**. Действует только изгибающий момент  $M_x$  или  $M_y$  (чистый изгиб), при действии изгибающего момента и поперечной силы (поперечный изгиб).
- **Сложное сопротивление**. Одновременное действие нескольких силовых факторов. Например,  $M_x$  и  $T$ ,  $M$  и  $N$ .

Внутренние усилия в сечении есть функции параметров, определяющих положение сечения в теле, и нагрузок по одну сторону от сечения. Эти функции могут быть представлены аналитически или графически.

*График, показывающий изменение внутреннего усилия в зависимости от положения сечения, называется **эпюрой**.*

# Допущения, применяемые в сопротивлении материалов

1. В сопротивлении материалов принято рассматривать все материалы как **однородную сплошную среду**, независимо от их микроструктуры. Под **однородностью** материала понимают независимость его свойств от величины выделенного из тела объема. И хотя в действительности реальный материал, как правило, неоднороден (уже в силу его молекулярного строения), тем не менее, указанная особенность не является существенной, поскольку в сопротивлении материалов рассматриваются конструкции, размеры которых существенно превышают не только межатомные расстояния, но и размеры кристаллических зерен.

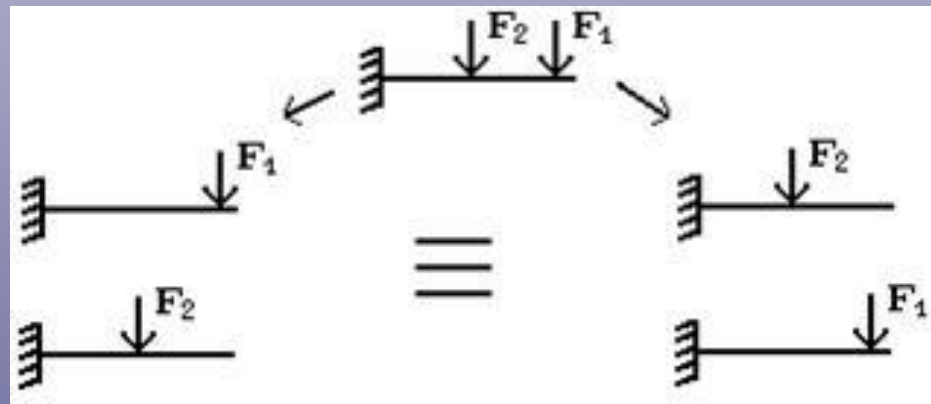
С понятием однородности тесно связано понятие **сплошности среды**, под которым подразумевают тот факт, что материал конструкции полностью заполняет весь отведенный ему объем, а значит в теле конструкции нет пустот и не учитывается реальная структура материала (зернистая, кристаллическая и др.). Это допущение позволяет использовать в сопротивлении материалов методы математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисления). Для большинства машиностроительных конструкций расчеты, основанные на допущении о сплошности строения дают практически удовлетворительные результаты.

2. Обычно сплошная среда принимается **изотропной**, т.е. предполагается, что свойства тела, выделенного из нее, не зависят от его ориентации в пределах этой среды. Материалы, имеющие различные свойства в разных направлениях, называют **анизотропными** (например, дерево, ткани (косой и кривой крой), армированная пластмасса, бетон).

Металлы и сплавы, как правило, изотропны, так как большинство металлов имеет мелкозернистую структуру.

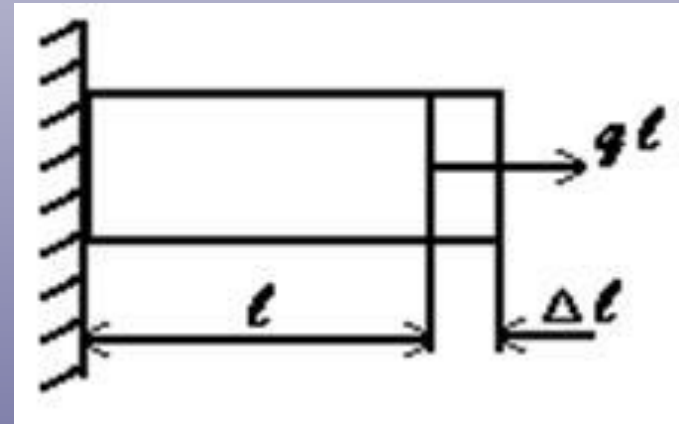
3. Принимается, что до определенной величины деформации материалов подчиняются закону Гука и весьма малы относительно размеров тела, поэтому все расчеты выполняются по исходной, т.е. недеформированной, схеме, к которой применим **принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции)**.

Результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке (рис. 11). Под словами «результат воздействия» следует понимать – деформации, внутренние силы и перемещения отдельных точек.

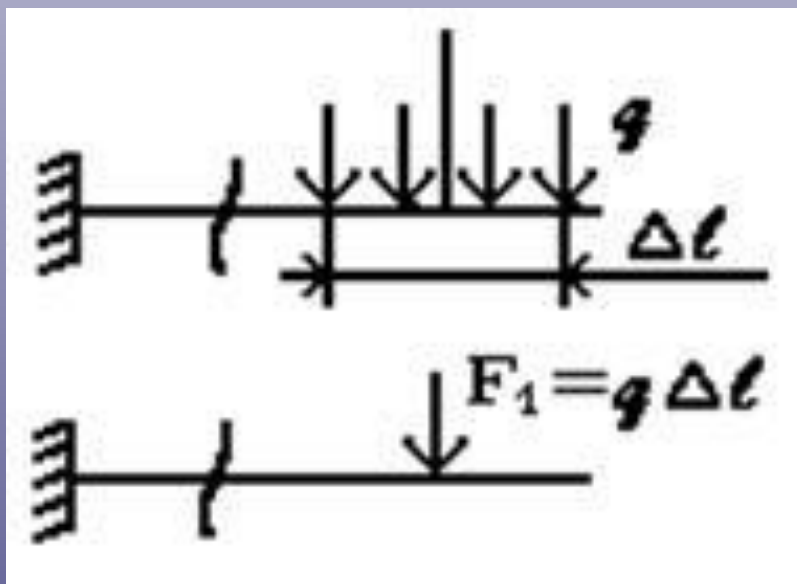


4. После снятия нагрузки геометрические размеры тела полностью или частично восстанавливаются. Свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после разгрузки называется **упругостью**. При решении большинства задач в сопротивлении материалов принимается, что материал конструкций **абсолютно упругий**. Это допущение справедливо, пока нагрузки не превышают определенного значения. При больших нагрузках в элементах конструкций появляются пластические деформации. **Пластичностью** называется свойство тела сохранять после прекращения действия нагрузки, или частично полученную при нагружении, деформацию. **Ползучестью** называется свойство тела увеличивать деформацию при постоянных внешних нагрузках.

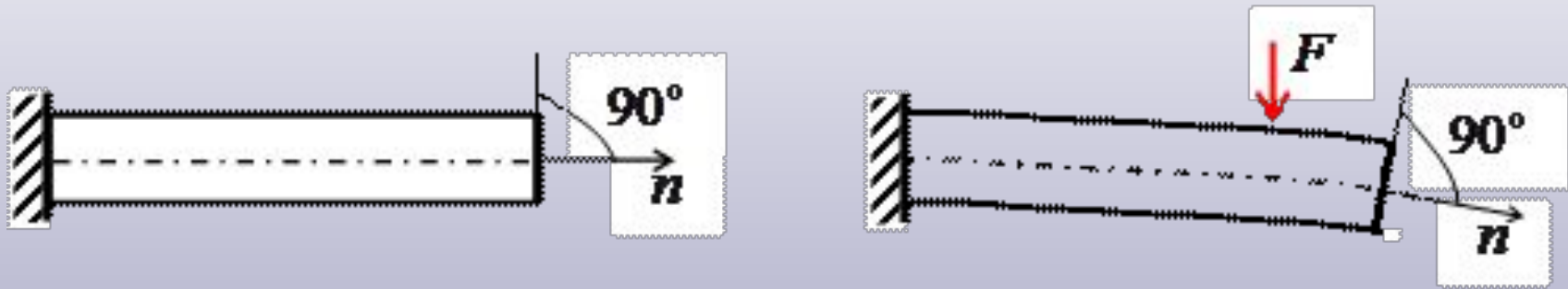
5. Перемещения, возникающие под действием внешних сил в упругом теле, малы по сравнению с его размерами. Это допущение называется **принципом начальных размеров**. В большинстве случаев механические конструкции работают в упругой зоне (в зоне действия закона Гука), а упругие деформации малы по сравнению с геометрическими размерами. Допущение позволяет при составлении уравнений равновесия пренебречь изменениями формы и размеров конструкции.



6. Предполагается, что в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, характер распределения напряжений не зависит от конкретного способа нагружения. Основанием для такого утверждения служит **принцип Сен-Венана**, справедливый для любого типа напряженного состояния и формулируемый следующим образом: *особенности приложения внешних нагрузок проявляются, как правило, на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня* или другое определение: *в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина внутренних сил весьма мало зависит от конкретного способа приложения этих нагрузок, а зависит только от ее статического эквивалента*. Этот принцип во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что позволяет часто значительно упростить расчет.



7. Принимается **гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли)**, введенной швейцарским ученым Д. Бернулли, гласящей, что *плоские поперечные сечения стержня до деформации остаются плоскими и после деформации*



8. Считается, что ненагруженное тело свободно от каких бы то ни было внутренних сил любой природы. Изменению формы и размеров тела под нагрузкой сопротивляются силы взаимодействия между частицами материала, называемые силами упругости. В дальнейшем, говоря о внутренних силах, будем иметь в виду именно эти силы упругости, не принимая во внимание молекулярные силы, имеющиеся и в ненагруженном теле. Это допущение полностью не выполняется ни для одного материала. Причины возникновения неравномерных внутренних или начальных усилий:

- В стальных деталях из-за неравномерного остывания;
- В дереве из-за неравномерного высыхания;
- В бетоне в процессе твердения.

# Напряжения

В действительности внутренние силы, являясь результатом взаимодействия частиц тела, непрерывно распределены по сечению. Интенсивность этих сил в разных точках сечения может быть различной. При увеличении нагрузки на элемент конструкции увеличиваются внутренние силы и соответственно увеличивается их интенсивность во всех точках сечения.

Если в некоторой точке интенсивность внутренних сил достигнет определенного для данного материала значения, в этой точке возникает трещина, развитие которой приведет к разрушению элемента, или возникнут недопустимые пластические деформации. Следовательно, о прочности элементов конструкций следует судить не по значению внутренних силовых факторов, а по их интенсивности.

Меру интенсивности внутренних сил называют **напряжением**.



В окрестности произвольной точки, принадлежащей сечению некоторого нагруженного тела, выделим элементарную площадку  $\Delta A$ , в пределах которой действует внутреннее усилие  $\Delta F$ .

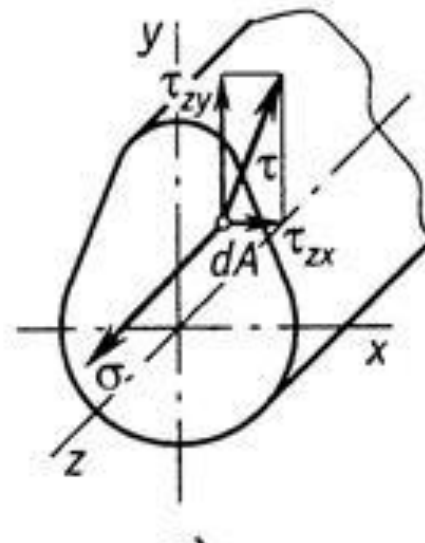
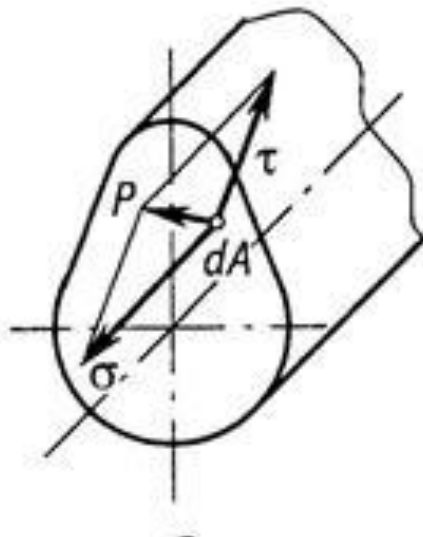
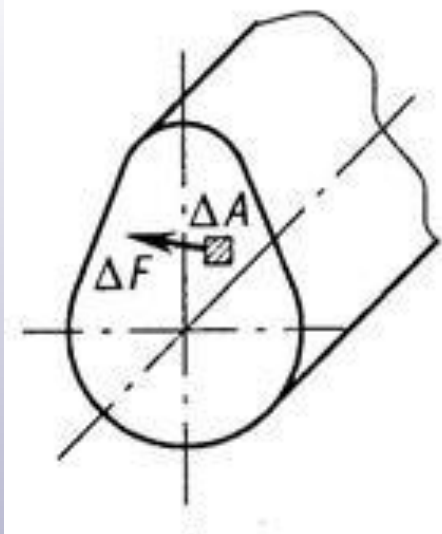
Среднее значение интенсивности внутренних усилий на площадке, называемое **средним напряжением**, определяют по формуле

$$P_{\text{ср}} = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Уменьшая площадь  $\Delta A$ , в пределе получаем **истинное напряжение** в данной точке сечения

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta F}{\Delta A} \right)$$

Векторная величина  $p$  называется **полным напряжением в точке**. В международной системе единиц (СИ) за единицу напряжения принят **паскаль** (Па=Н/м<sup>2</sup>) – это напряжение, при котором на площадке 1 м<sup>2</sup> действует внутренняя сила 1 Н.

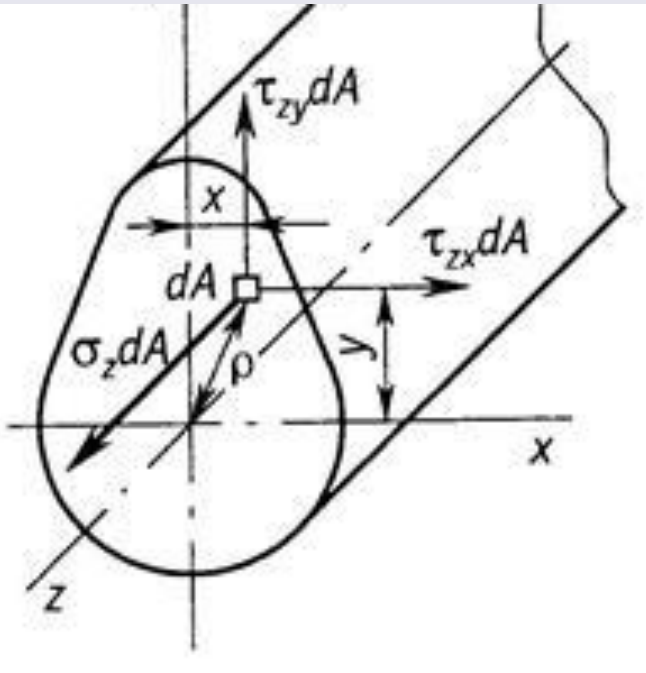


Проекция вектора полного напряжения  $\rho$  на нормаль к данной площадке обозначается  $\sigma$  и называется **нормальным напряжением**.

Составляющую, лежащую в сечении в данной площадке обозначается через  $\tau$  и называется **касательным напряжением**.

*Нормальные напряжения возникают, когда под действием внешних сил частицы, расположенные по обе стороны от сечения, стремятся удалиться одна от другой или сблизиться. Касательные напряжения возникают, когда частицы стремятся сдвинуться одна относительно другой в плоскости сечения.*

Возьмем в сечении бесконечно малую площадку площадью  $dA$ . По этой площадке в общем случае действуют бесконечно малые (элементарные) внутренние силы



$$dN_z = \sigma_z dA; \quad dQ_x = \tau_{zx} dA; \quad dQ_y = \tau_{zy} dA.$$

Соответствующие элементарные моменты относительно координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  имеют вид:

$$dM_z = (\tau_{zx} dA)y - (\tau_{zy} dA)x;$$

$$dM_x = (\sigma_z dA)y; \quad dM_y = (\sigma_z dA)x.$$

$$N_z = \int_A \sigma_z dA; \quad Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_z = \int_A (\tau_{zx} y - \tau_{zy} x) dA; \quad M_x = \int_A \sigma_z y dA; \quad M_y = \int_A \sigma_z x dA.$$

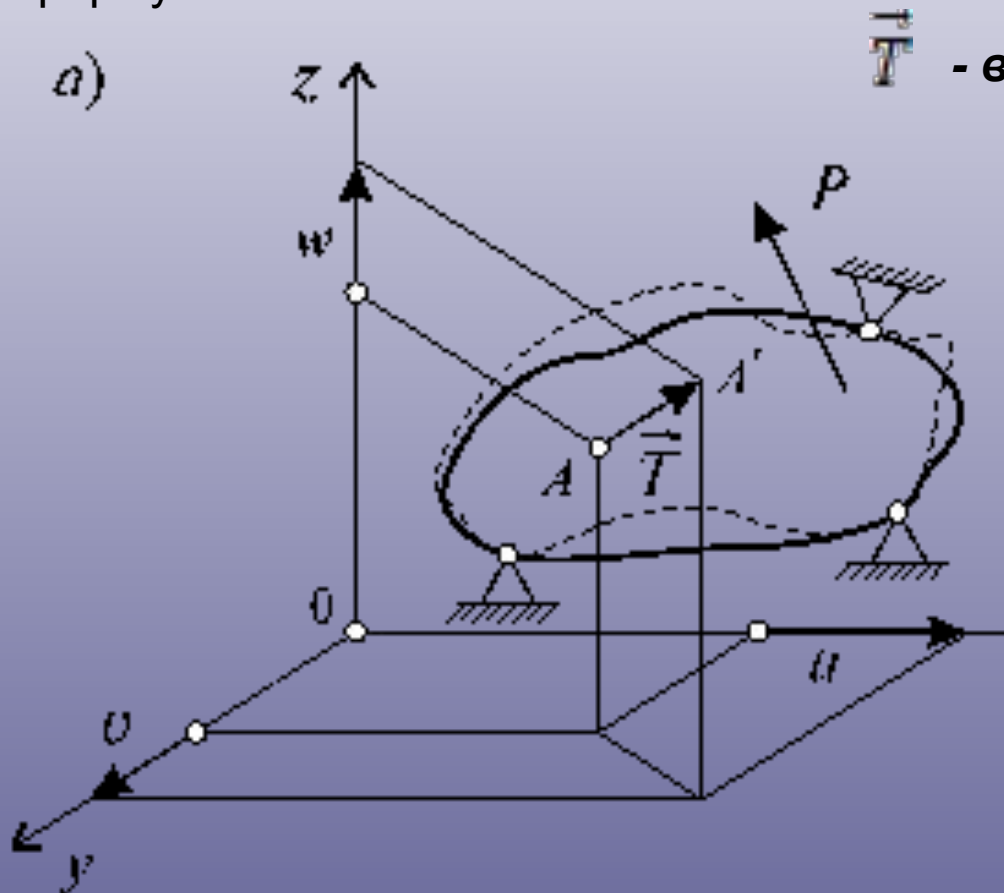
В соответствии с теоремой Вариньона, известной из теоретической механики можно записать

$$M_z = \int_A \tau \rho dA, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Интегральные зависимости можно использовать для определения напряжений по найденным методом сечений внутренним силовым факторам при условии, что известны законы распределения напряжений по сечению. Поскольку эти законы зависят от вида деформации, то обратная задача (определение напряжений через внутренние усилия) решается путем совместного использования условий равновесия и условий деформирования тела. Задача становится ***статически неопределимой***.

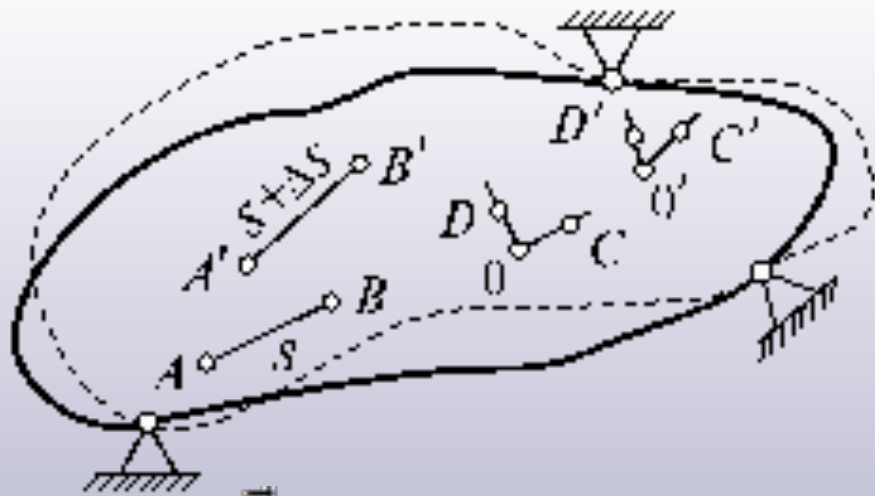
# Перемещения и деформации

Если в теоретической механике тела считаются абсолютно жесткими, то в сопротивлении материалов тела обладают способностью **деформироваться**, т.е. под действием внешней нагрузки изменять свои начальные размеры и форму.



$\vec{T}$  - вектор полного перемещения т. А

Его проекции на оси хуу называются **осевыми перемещениями** и обозначаются  $u$ ,  $v$  и  $w$ , соответственно.



Пусть в результате изменения формы тела точки А и В переместились в положение А' и В' соответственно, а расстояние между ними увеличилось на величину  $\Delta S$  и составило  $S + \Delta S$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta S}{S} \right) = \epsilon^{\rightarrow} - \text{линейная деформация в точке А по направлению АВ.}$$

При действии внешних сил угол  $DOC$  изменится и примет новое значение  $D'O'C'$

$$\lim_{\substack{\Delta C \rightarrow 0 \\ \Delta D \rightarrow 0}} (\angle DOC - \angle D'O'C') = \gamma - \text{угловая деформация, или сдвиг в точке О в плоскости COD.}$$

Положительными принимают линейную деформацию, соответствующую растяжению, и деформацию сдвига, отвечающую уменьшению первоначального угла пересечения отрезков.

Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям в данной точке образует **деформированное состояние в точке.**

В случае малых деформаций деформированное состояние полностью определяется линейными деформациями трех взаимно перпендикулярных линейных элементов тела, проходящих через данную точку, и тремя деформациями сдвига этих линейных элементов. Соответствующие шесть независимых скалярных величин определяют **тензор деформаций**:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

**Главные оси деформации** – три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через данную точку тела и совпадающие по направлениям с такими тремя линейными элементами тела, которые остаются взаимно перпендикулярными и после деформации. Линейные деформации по направлениям этих осей называются **главными деформациями**

# Закон Гука и принцип независимости действия сил



*В определенных диапазонах перемещения точек тела пропорциональны действующим на это тело нагрузкам.*

Впервые указанная закономерность была высказана в 1776 году английским ученым **Робертом Гуком** в формулировке *«ut tensio sic vis»* - «каково растяжение - такова и сила» и носит название **закона Гука**.

В соответствии с этим законом перемещение произвольно взятой точки  $A$  нагруженного тела по некоторому направлению, например, по оси  $x$ , может быть выражено следующим образом:

$$u = \delta_x P.$$

$P$  - сила, под действием которой происходит перемещение  $u$ ,

$\delta_x$  - коэффициент пропорциональности между силой и перемещением.



В современной трактовке закон Гука определяет линейную зависимость между напряжениями и деформациями, а не между силой и перемещением.

$$\sigma = E\varepsilon,$$

$$\tau = G\gamma,$$

Касательные напряжения  $\tau$  вызывают угловые деформации  $\gamma$ , причем при малых деформациях они не влияют на изменение линейных размеров и, следовательно, на линейные деформации. Нормальное напряжение  $\sigma$  не влияет на угловые деформации, так как при этом изменяются только линейные размеры отрезков, а не углы между ними.

Параметры  $E$  и  $G$ , входящие в эти формулы, называют модулями упругости материала соответственно первого и второго рода.