к.г.н., доц. Сикан Александр Владимирович
Российский государственный гидрометеорологический университет

Гидрологические расчеты

Часть II

лекция № 2

Основные темы лекции:

Расчет максимальных расходов воды весеннего половодья и дождевых паводков при наличии данных гидрометрических наблюдений.

- Общая схема расчета максимальных расходов воды.
- Учет выдающихся максимумов при расчете максимальных расходов воды.
- Построение доверительного интервала для наибольшего члена ряда наблюдений.

Расчет максимальных расходов воды весеннего половодья и дождевых паводков при наличии данных гидрометрических наблюдений

Общая схема расчета максимальных расходов воды включает следующие этапы:

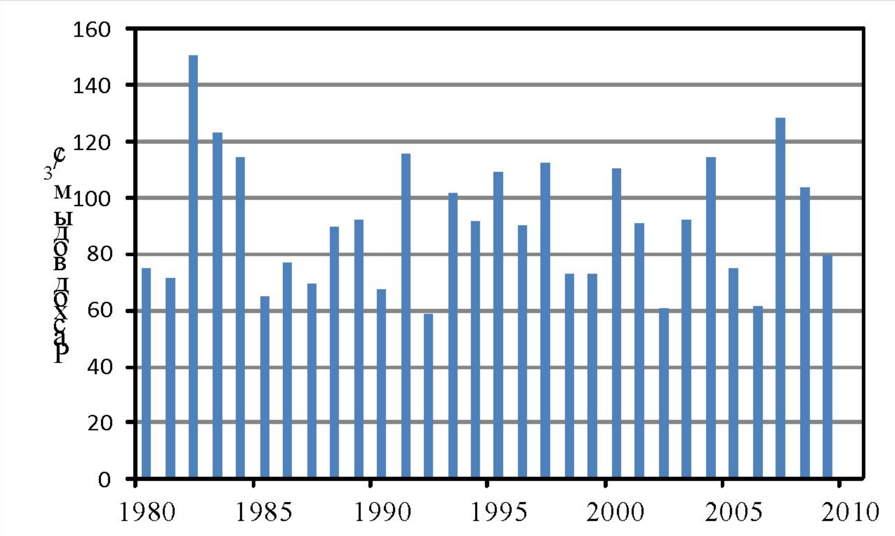
Этап 1. Предварительный анализ исходных данных

На этом этапе производится:

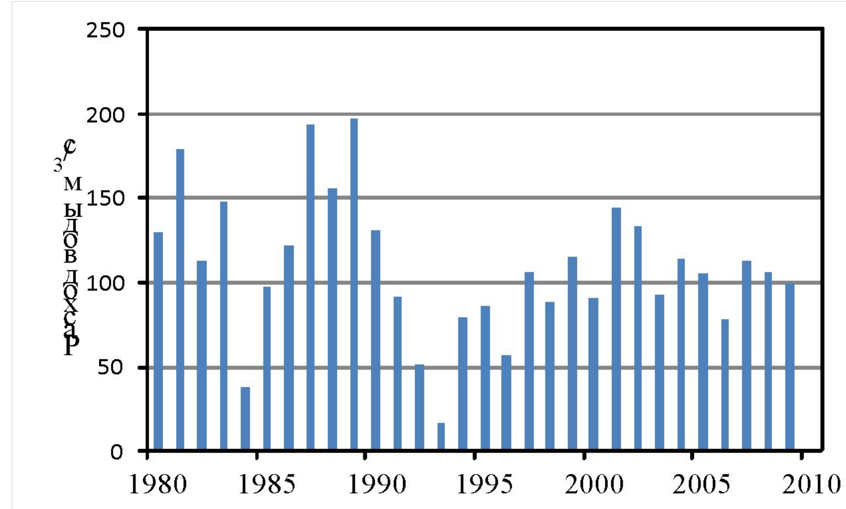
- **анализ надежности экстраполяции кривой Q = f(H);**
- **выполняется проверка полноты учета стока воды на поймах и в протоках;**
- **оценивается точность расчета стока за различные интервалы времени и т. д. ;**
- **строится хронологический график для визуального анализа и проверки на наличие тренда.**

Цель такой проверки – оценить надежность исходной информации, выявить грубые ошибки и опечатки.

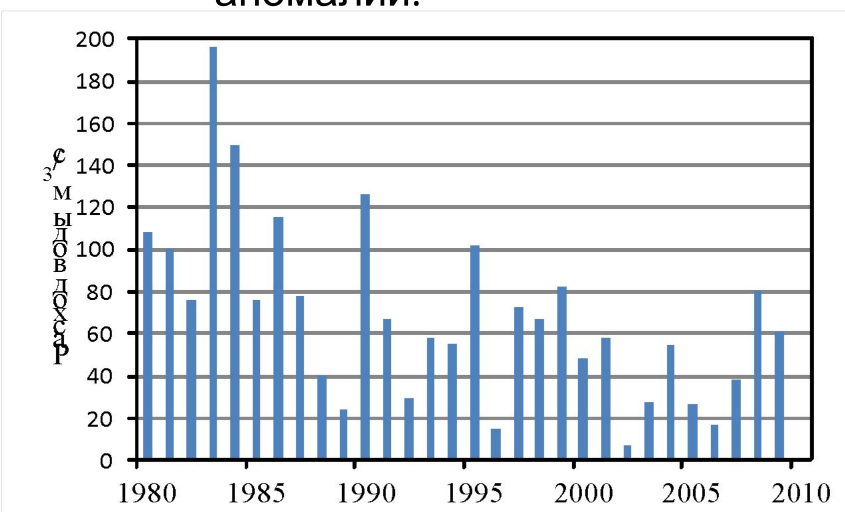
Анализ хронологических графиков



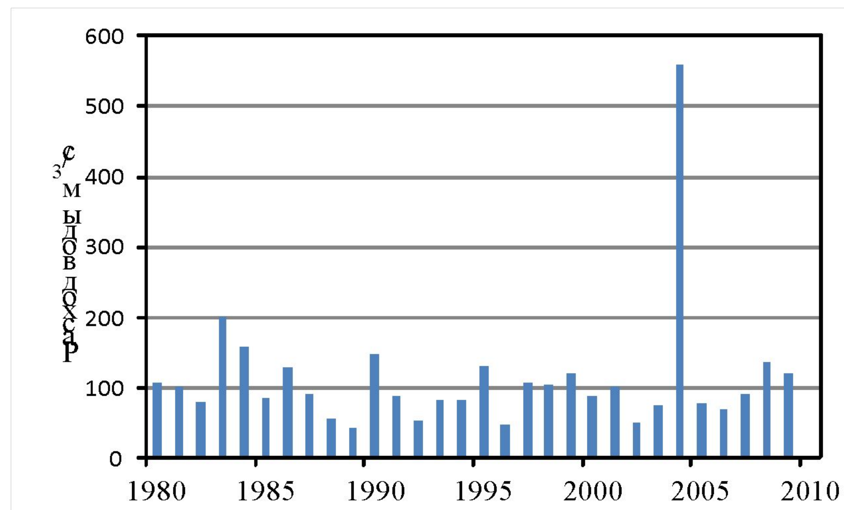
Ряд без видимых аномалий.



Ряд с подозрением на неоднородность по дисперсии.

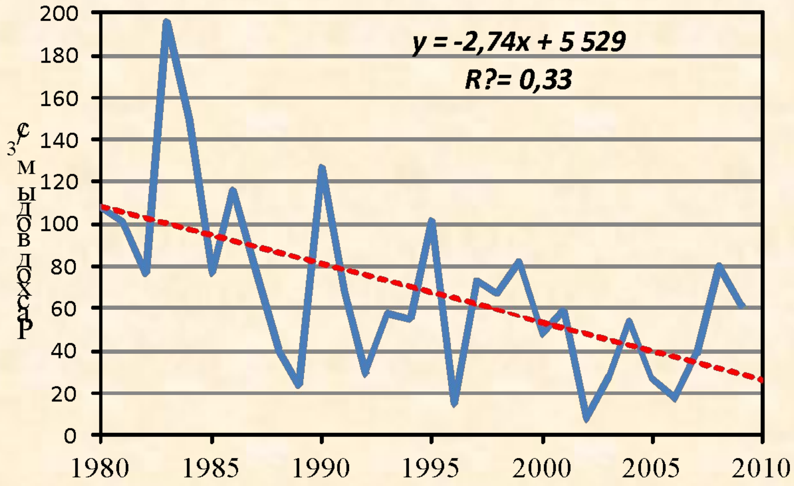


Ряд с трендом на понижение



Ряд с «выбросом».

Оценка значимости линейного тренда для зависимости $Q = at + b$



1-й вариант

$$\begin{cases} \text{Тренд незначим если} \quad |R| < t_{2\alpha}\sigma_R & (1) \\ \text{где:} \quad \sigma_R = \left(1 - R^2\right)/\sqrt{n-1} & (2) \end{cases}$$

2-й вариант

$$\begin{cases} \text{Тренд незначим если} \quad |a| < t_{2\alpha}\sigma_a & (3) \\ \text{где:} \quad \sigma_a = \dfrac{\sigma_Q^*}{\sigma_t^*}\sqrt{\dfrac{1-R^2}{n-2}} & (4) \end{cases}$$

a – коэффициент регрессии;

R – коэффициент корреляции;

σ_Q^* – СКО ряда расходов;

σ_t^* – СКО ряда лет;

$t_{2\alpha}$ – ордината стандартного распределения Стьюдента при уровне значимости 2α и числе степеней свободы $(n-2)$.

При $2\alpha = 5\%$ $t_{2\alpha} \cong 2$.

Этап 2. Проверка ряда на случайность

Коэффициент автокорреляции незначим если $\left| r(1) \right| \leq \sigma_r t_\alpha$ (1)

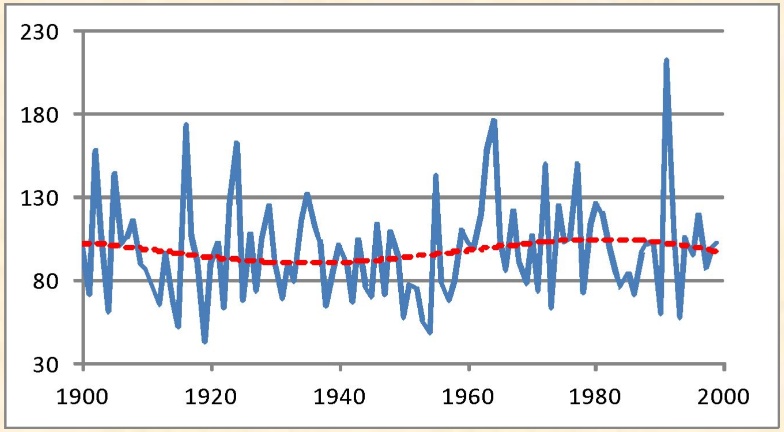
		x_1	x_2
1	1934	19,2	
2	1935	20,7	19,2
3	1936	12,9	20,7
4	1937	16,0	12,9
5	1938	11,8	16,0
6	1939	10,5	11,8
7	1940	12,6	10,5
8	1941	25,7	12,6
9	1942	28,0	25,7
10	1943	22,5	28,0
11	1944	19,4	22,5
12	1945	21,1	19,4
13	1946	14,8	21,1
14	1947	31,1	14,8
15	1948	22,5	31,1
			22,5

$$r(1) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+1} - \bar{x})}{(n-2)\sigma_x^2} \quad (2)$$

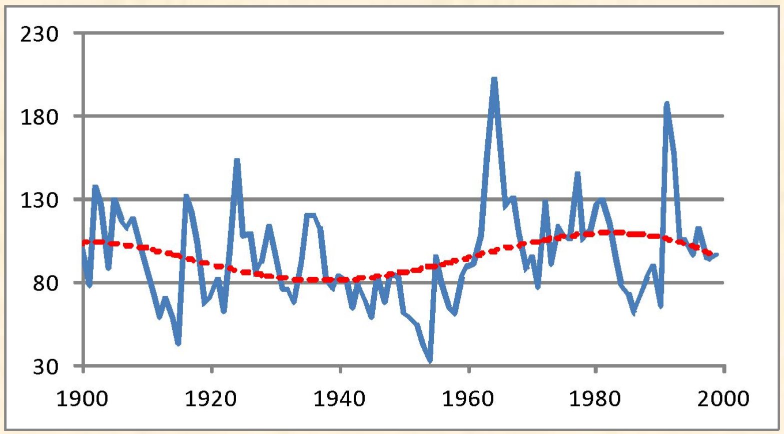
$$\sigma_r = \frac{1 - r(1)^2}{\sqrt{n-2}} \quad (3)$$

В подавляющем большинстве случаев ряды максимальных расходов воды соответствуют модели случайной величины, т. е. $r(1)$ – статистически незначим.

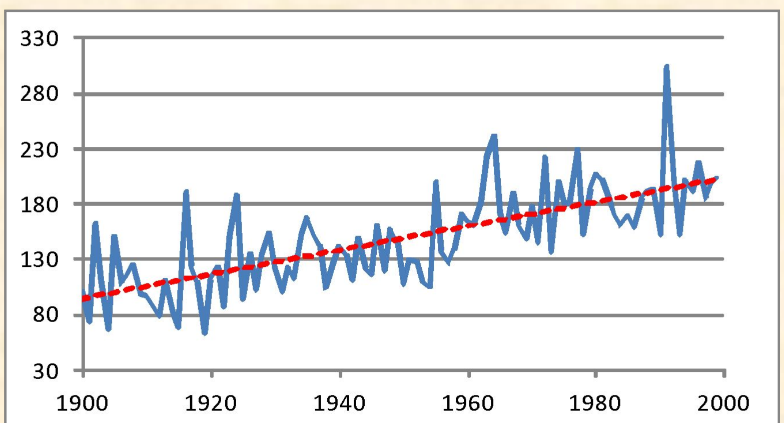
Влияние статистической структуры выборки на коэффициент автокорреляции



Коэффициент автокорреляции статистически незначим r(1) = - 0,03.
Ряд соответствует модели случайной величины.



Коэффициент автокорреляции статистически значим r(1) = 0,57.
Ряд соответствует модели авторегрессии 1-го порядка.



Коэффициент автокорреляции статистически значим r(1) = 0,50.
Причина: имеется тренд на повышение (ряд нестационарный).

Этап 3. Проверка ряда на однородность

Рональд Эйлмер Фишер
Английский статистик и генетик.
(1890-1962)

Проверка однородности гидрологического ряда по дисперсии (критерий Фишера)

$$F^* = \frac{D_1}{D_2} \qquad (1)$$

$$F^* < F_{2\alpha} \qquad (2)$$

Уильям Сили Госсет
Псевдоним – Стьюдент.
Английский ученый-статистик.
(1878-1937)

Проверка однородности гидрологического ряда по среднему значению (критерий Стьюдента)

$$t^* = \left[(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) \Big/ \sqrt{\frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}} \right] \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \qquad (3)$$

$$\left| t^* \right| < t_{2\alpha} \qquad (4)$$

Гипотеза об однородности ряда не опровергается, если выполняются неравенства (2) и (4).

Влияние длины выборки на оценку однородности

$(|t^*| = 3{,}16) > (t_{2\alpha=5\%} = 2{,}01)$.
Гипотеза об однородности ряда по критерию Стьдента *опровергается*.

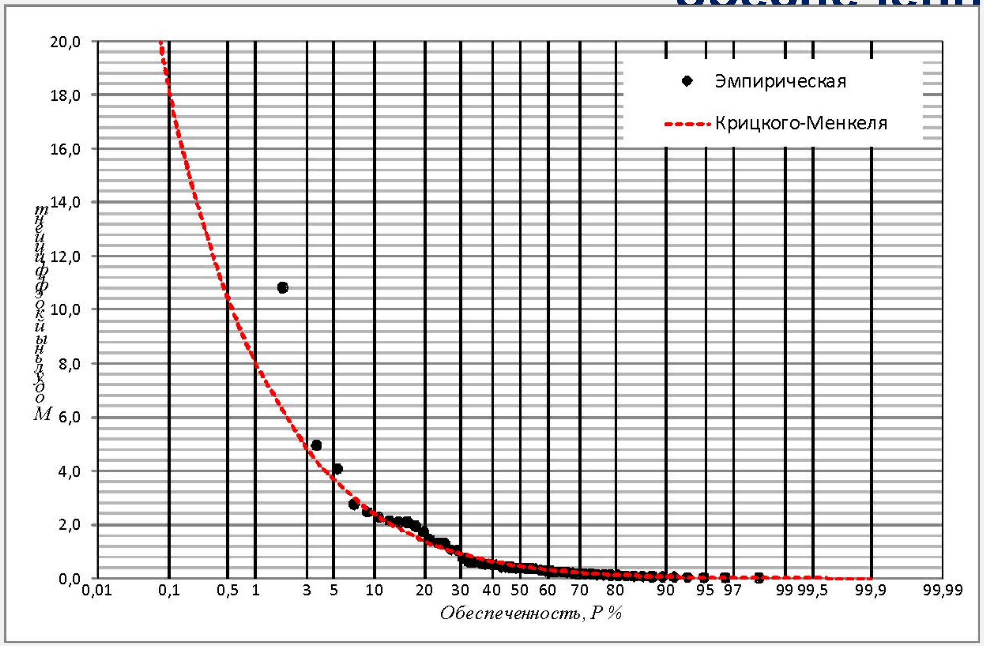
$(F^* = 5{,}10) > (F_{2\alpha=5\%} = 2{,}27)$.
Гипотеза об однородности ряда по критерию Фишера *опровергается*.

Выборка	$r(1)$
50 лет	0,16
100 лет	0,17

$(|t^*| = 0{,}44) < (t_{2\alpha=5\%} = 1{,}98)$.
Гипотеза об однородности ряда по критерию Стьдента *не опровергается*.

$(F^* = 1{,}47) < (F_{2\alpha=5\%} = 1{,}76)$.
Гипотеза об однородности ряда по критерию Фишера *не опровергается*.

Критерии однородности, используемые при наличии экстремальных значений, резко отклоняющихся от кривой обеспеченностей



Если имеются точки резко отклоняющиеся от аналитической кривой в области больших или малых значений, необходимо выяснить относятся ли эти точки к той же генеральной совокупности, что и остальные члены выборки.

Для анализа таких ситуаций в СП 33-101-2003 включены два дополнительных критерия однородности – *критерий Диксона* и *критерий Смирнова-Граббса*.

При использовании указанных критериев исходный ряд ранжируется в возрастающем порядке. Затем рассчитываются параметры:

Q_1	Q_2	Q_{n-1}	Q_n	$\overline{Q}$	σ^*
6,89	6,94	17,40	18,10	11,5	2,91

Проверка однородности гидрологического ряда по критерию Диксона	**Проверка однородности гидрологического ряда по критерию Смирнова-Граббса**
$D^*_{\max} = \dfrac{Q_n - Q_{n-1}}{Q_n - Q_1}$ (1)	$G^*_{\max} = \dfrac{Q_n - \overline{Q}}{\sigma^*}$ (4)
$D^*_{\min} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1 - Q_n}$ (2)	$G^*_{\min} = \dfrac{\overline{Q} - Q_1}{\sigma^*}$ (5)
$D^* < D_\alpha$ (3)	$G^* < G_\alpha$ (6)

Если выполняются неравенства (3) и (6) нулевая гипотеза об однородности ряда не опровергается.

Теоретические значения статистик D_α и G_α определяются по таблицам в зависимости от уровня значимости **α**, коэффициента автокорреляции ***r*(1)**, коэффициента асимметрии $\boldsymbol{C_s}$ и длины ряда ***n***.

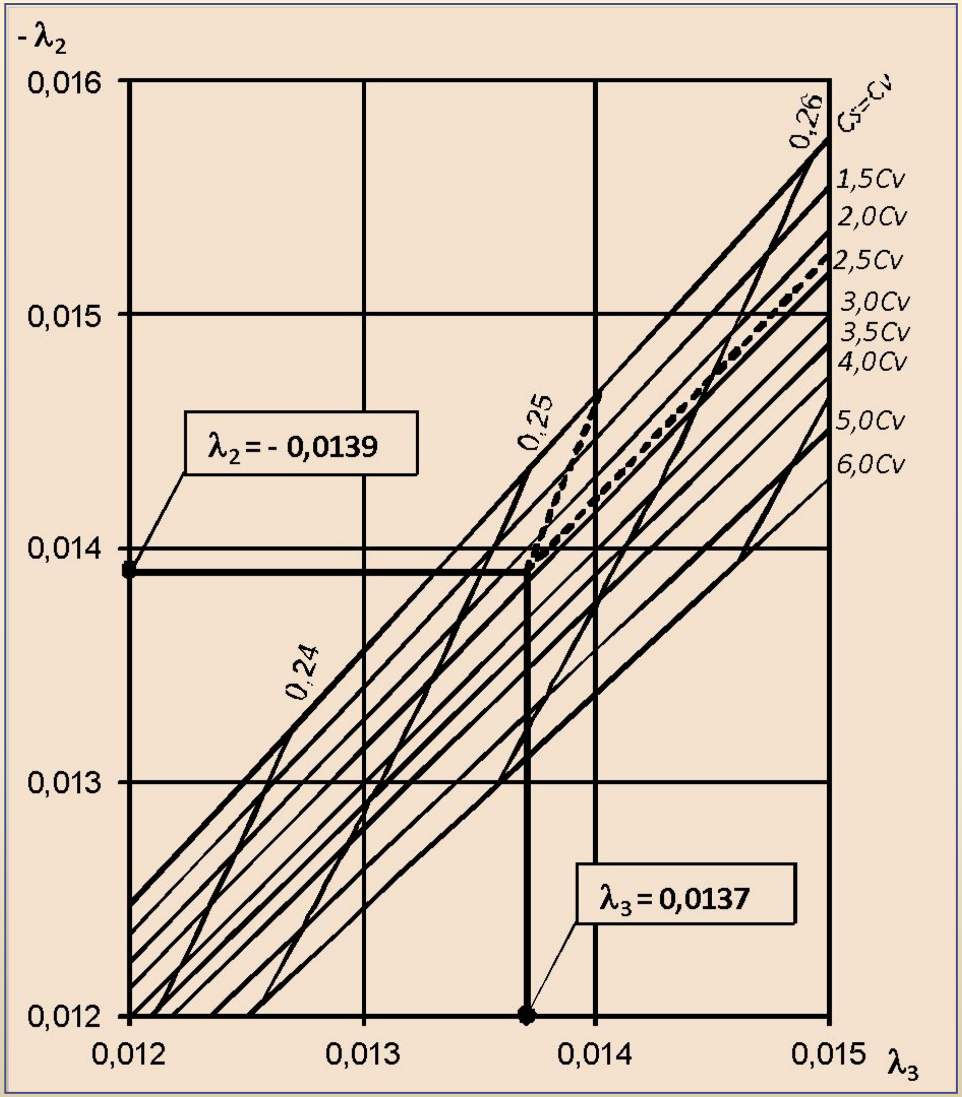
Этап 4. Расчет параметров распределения

Обычно рассчитываются среднее значение ряда, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии. При небольших коэффициентах вариации (менее 0,6) расчет допустимо проводить **методом моментов**:

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad C_v^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^2}{n-1}} \qquad C_s^* = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^3}{(n-1)(n-2)\left(C_v^*\right)^3}$$

Если коэффициент вариации больше 0,6, следует произвести уточнение указанных характеристик, используя метод наибольшего правдоподобия.

Метод наибольшего правдоподобия



Для распределения Крицкого-Менкеля расчет оценок параметров распределения производится в два этапа:

1. Рассчитываются вспомогательные статистики λ_2 и λ_3:

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lg k_i}{n-1} \qquad \lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \lg k_i}{n-1}$$

2. В зависимости от λ_2 и λ_3 по номограммам определяются значения C_v и C_s/C_v.

Графический и графоаналитический методы в практике инженерных расчетов рассматриваются как вспомогательные.

В соответствии с СП 33-101-2003 графоаналитический метод допустимо использовать на начальных стадиях проектирования.

Графический метод обычно применяют для подбора отношения коэффициента асимметрии к коэффициенту вариации, используя набор спрямляющих клетчаток

Расчет параметров распределения с учетом исторического максимума

При определении расчетных максимальных расходов воды кроме материалов систематических гидрометрических наблюдений должны использоваться данные о наивысших исторических уровнях и расходах изучаемой реки.

Сведения об исторических уровнях могут быть получены путем:

- изучения меток высоких вод,
- опроса населения,
- сбора архивных материалов.

Определение исторического максимального расхода по установленному уровню осуществляется путем экстраполяции кривой $Q = f(H)$, выполняемой обычными гидравлическими приемами.

На основании проведенных исследований получают сам исторический максимум – Q_N и продолжительность периода, в течение которого он не превышался – N.

Возможна и другая ситуация, когда в состав ограниченного ряда наблюдений за $\boldsymbol{n}$ лет входит выдающийся максимум. На кривой обеспеченности такой максимум отклоняется вправо относительно кривой, соответствующей основной массе расходов.

В этом случае исторический максимум известен, а период его непревышения ($\boldsymbol{N}$) устанавливается путем опроса населения и сбора архивных материалов.

В Своде правил СП 33-101-2003 даны формулы (см. п.5.16), позволяющие уточнить значения параметров распределения с учетом исторического максимума.

При учете одного выдающегося значения, не входящего в ряд наблюдений	При учете одного выдающегося значения, входящего в ряд наблюдений

для метода моментов

$$\overline{Q} = \frac{1}{N}\left(Q_N + \frac{N-1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)$$	$$\overline{Q} = \frac{1}{N}\left(Q_N + \frac{N-1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} Q_i\right)$$
$$C_v = \sqrt{\frac{1}{N}\left[\left(\frac{Q_N}{\overline{Q}} - 1\right)^2 + \frac{N-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Q_i}{\overline{Q}} - 1\right)^2\right]}$$	$$C_v = \sqrt{\frac{1}{N}\left[\left(\frac{Q_N}{\overline{Q}} - 1\right)^2 + \frac{N-1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{Q_i}{\overline{Q}} - 1\right)^2\right]}$$

для метода наибольшего правдоподобия

$$\lambda_2 = \frac{1}{N}\left(\lg\frac{Q_N}{\overline{Q}} + \frac{N-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lg\frac{Q_1}{\overline{Q}}\right)$$	$$\lambda_2 = \frac{1}{N}\left(\lg\frac{Q_N}{\overline{Q}} + \frac{N-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lg\frac{Q_i}{\overline{Q}}\right)$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{N}\left(\frac{Q_N}{\overline{Q}}\lg\frac{Q_N}{\overline{Q}} + \frac{N-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\overline{Q}}\lg\frac{Q_i}{\overline{Q}}\right)$$	$$\lambda_3 = \frac{1}{N}\left(\frac{Q_N}{\overline{Q}}\lg\frac{Q_N}{\overline{Q}} + \frac{N-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{Q_i}{\overline{Q}}\lg\frac{Q_i}{\overline{Q}}\right)$$

Этап 5. Расчет погрешностей параметров распределения

Статистическая характеристика	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность, %
Среднее значение	$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$	$\varepsilon_{\bar{x}} = \dfrac{C_v}{\sqrt{n}} \cdot 100\ \%$
Коэффициент вариации	$\sigma_{c_v} = \dfrac{C_v}{n + 4C_v^2} \sqrt{\dfrac{n(1 + C_v^2)}{2}}.$	$\varepsilon_{Cv} = \dfrac{1}{n + 4C_v^2} \sqrt{\dfrac{n(1 + C_v^2)}{2}} 100\%$
Коэффициент асимметрии	$\sigma_{c_s} = \sqrt{(6/n)(1 + 6C_v^2 + 5C_v^4)}$	$\varepsilon_{Cs} = \dfrac{1}{C_s} \sqrt{\dfrac{6}{n}(1 + 6C_v^2 + 5C_v^4)}\, 100\%$

Формула Крицкого-Менкеля: $\varepsilon_{c_v} = \dfrac{\sqrt{1 + C_v^2}}{\sqrt{2n}} \cdot 100\ \%$

Формула Резниковского: $\varepsilon_{c_s} = \dfrac{1}{C_s} \sqrt{(6/n)(1 + C_v^2)} \cdot 100\ \%$

Этап 6. Построение эмпирической и аналитической кривых обеспеченностей

Эмпирическую ежегодную вероятность превышения гидрологических характеристик определяют по формуле:

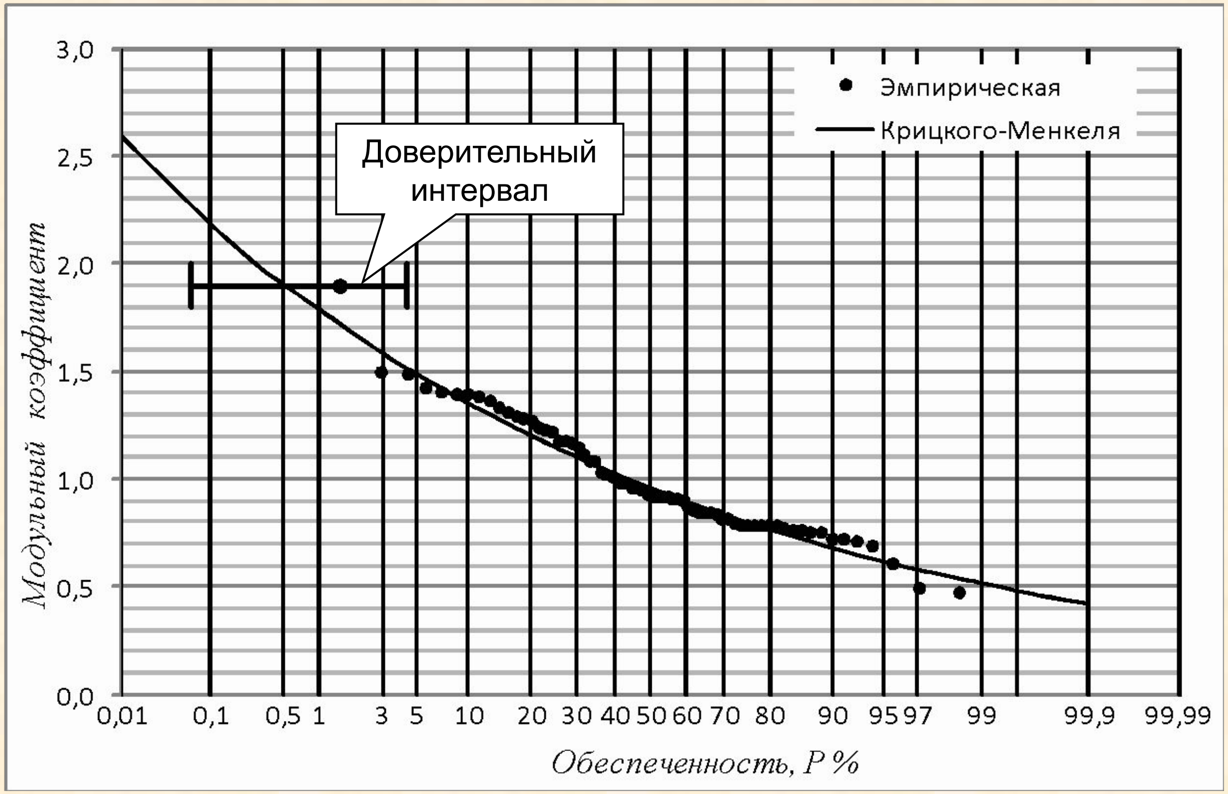
$$P_m = \frac{m}{n+1} 100\%$$

Для сглаживания и экстраполяции эмпирических кривых обеспеченностей, как правило, применяют трехпараметрические распределения:

- *Крицкого-Менкеля* при любом отношении C_s/C_v
- *Пирсона III типа* при $C_s/C_v \geq 2$
- *Трехпараметрическое логнормальное распределение* при $C_s \geq (3C_v + C_v^3)$

При неоднородности ряда гидрометрических наблюдений допускается применение усеченных и составных кривых распределения вероятностей.

Для наибольшего (или наименьшего) члена ряда наблюдений следует указывать доверительные интервалы эмпирической ежегодной вероятности превышения (приложение Б, таблица Б.3 – СП 33-101-2003).



Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей слоев весеннего половодья в модульных коэффициентах, р. Сясь – д. Яхново; длина ряда n = 68; 90%-ный доверительный интервал – (0,082-4,44).

Длина ряда	Границы доверительного интервала для наибольшего члена ряда	
	5%	95%
10	0,50	25,90
20	0,27	13,40
30	0,20	9,80
40	0,15	7,70
50	0,10	6,00
60	0,09	5,00
70	0,08	4,30
80	0,07	3,70
90	0,06	3,30
100	0,05	3,00
110	0,04	2,00
120	0,03	1,60

Вопросы для самопроверки

1. Общая схема расчета максимальных расходов воды. Перечислите основные этапы.
2. Какие статистические критерии рекомендуются Сводом правил для проверки рядов максимального стока на однородность?
3. Какие методы используются при расчете статистических характеристик максимального стока?
4. Какова допустимая погрешность определения среднего значения и коэффициента вариации при расчетах максимального стока?
5. Какие типы кривых обеспеченностей наиболее часто используются в Российской гидрологической практике?
6. Как учитываются выдающиеся максимумы при расчетах максимальных расходов воды?
7. Как и с какой целью строится доверительный интервал для крайних членов выборки при расчете максимального стока?

Конец лекции №2

Рекомендуемые материалы для изучения:

1. Владимиров А.М. Гидрологические расчёты: п.9.1-9.2.
2. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации: раздел 7.
3. СП 33-101-2003. «Определение основных расчетных гидрологических характеристик»: п.5.1-5.7; п.5.16; 5.26-5.28.
4. Методические рекомендации по определению расчетных гидрологических характеристик при наличии данных гидрометрических наблюдений: п.1-6; п.9.