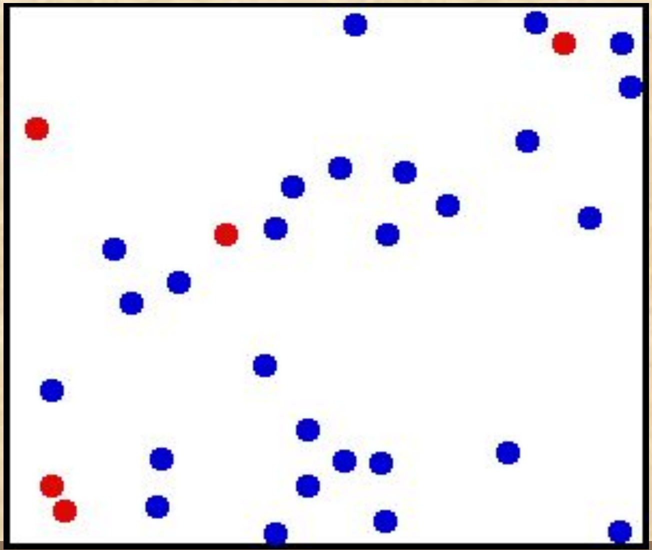
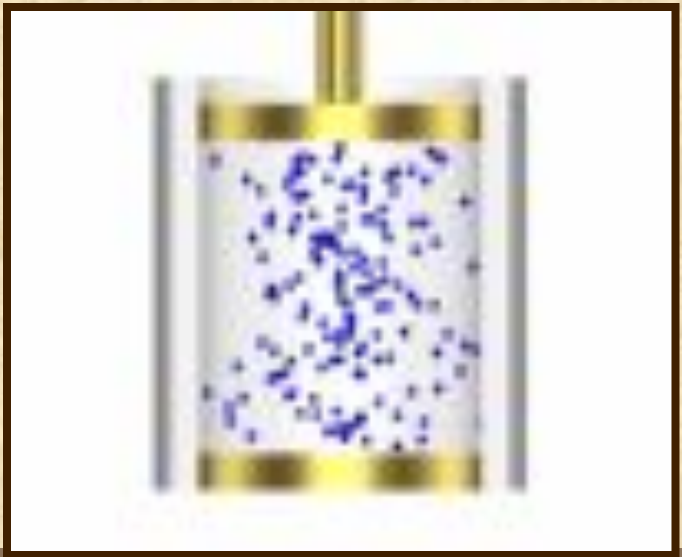
Термодинамика и статистическая физика





Лекция № 7

Процессы переноса: диффузия, теплопроводность и вязкость.

1. Диффузия. Закон Фика. Коэффициент диффузии. Броуновское движение.
2. Теплопроводность. Закон Фурье. Коэффициент теплопроводности для газов.
3. Вязкость. Коэффициент вязкости (внутреннего трения).

В процессе ***диффузии*** происходит ***перенос вещества***, а при ***тепло-проводности*** и при ***внутреннем трении*** – ***перенос энергии***.

В основе этих явлений лежит один и тот же механизм – ***хаотическое движение молекул***. Общность механизма, обуславливающего все эти явления переноса, приводит к тому, что их **закономерности** должны быть **похожи** друг на друга.

Диффузия газов

Диффузия от латинского ***diffusio*** – **распространение, растекание** – взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга, вследствие теплового движения частиц вещества.

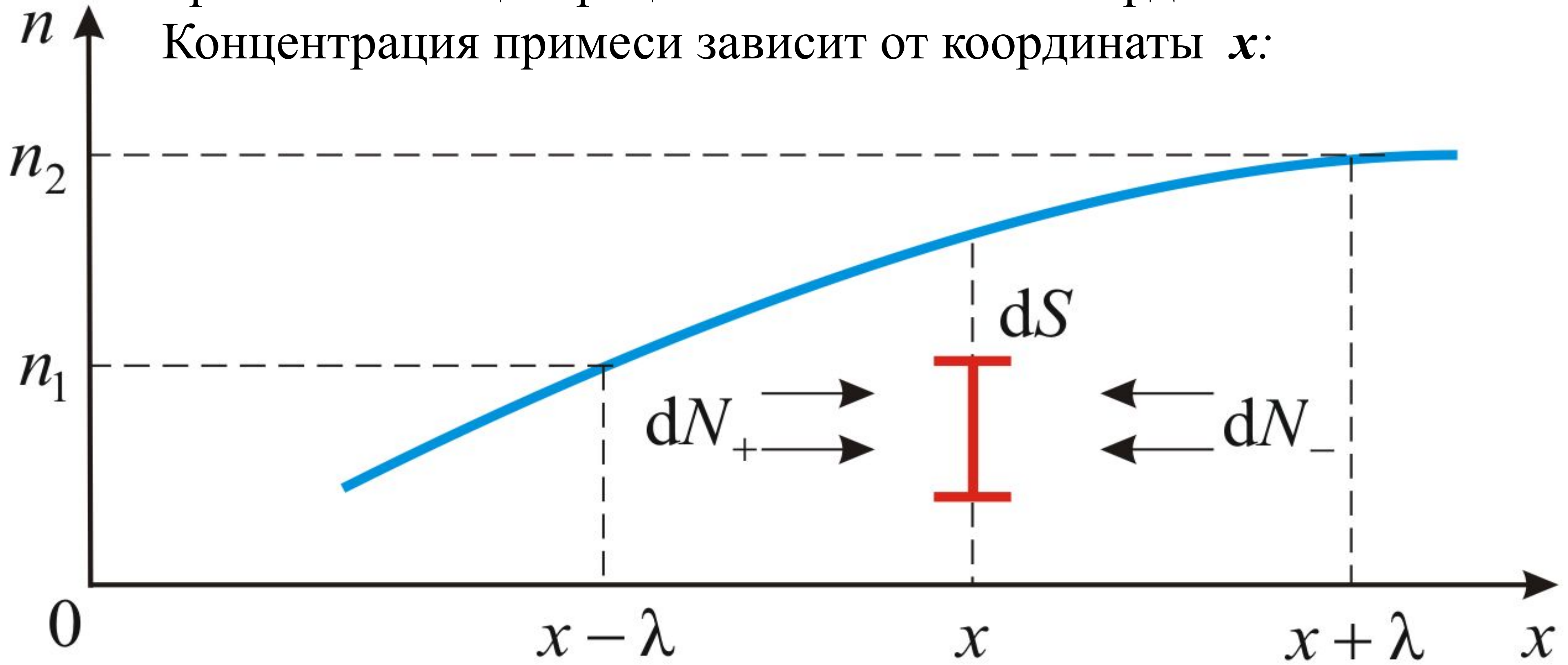
Диффузия происходит **в направлении уменьшения концентрации вещества** и ведет к его равномерному распределению по занимаемому объему.

Диффузия имеет место в газах, жидкостях и твердых телах.

Наиболее **быстро диффузия** происходит **в газах**, медленнее в жидкостях, еще медленнее в твердых телах, что обусловлено характером движения частиц в этих средах.

Для газа ***диффузия – это распределение молекул примеси от источника*** (или взаимная диффузия газа).

Решим одномерную задачу. Пусть в газе присутствует примесь с концентрацией ***n*** в точке с координатой ***x***. Концентрация примеси зависит от координаты ***x***:



$$\mathrm{grad}\, n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

Градиент концентрации, в общем случае равен:

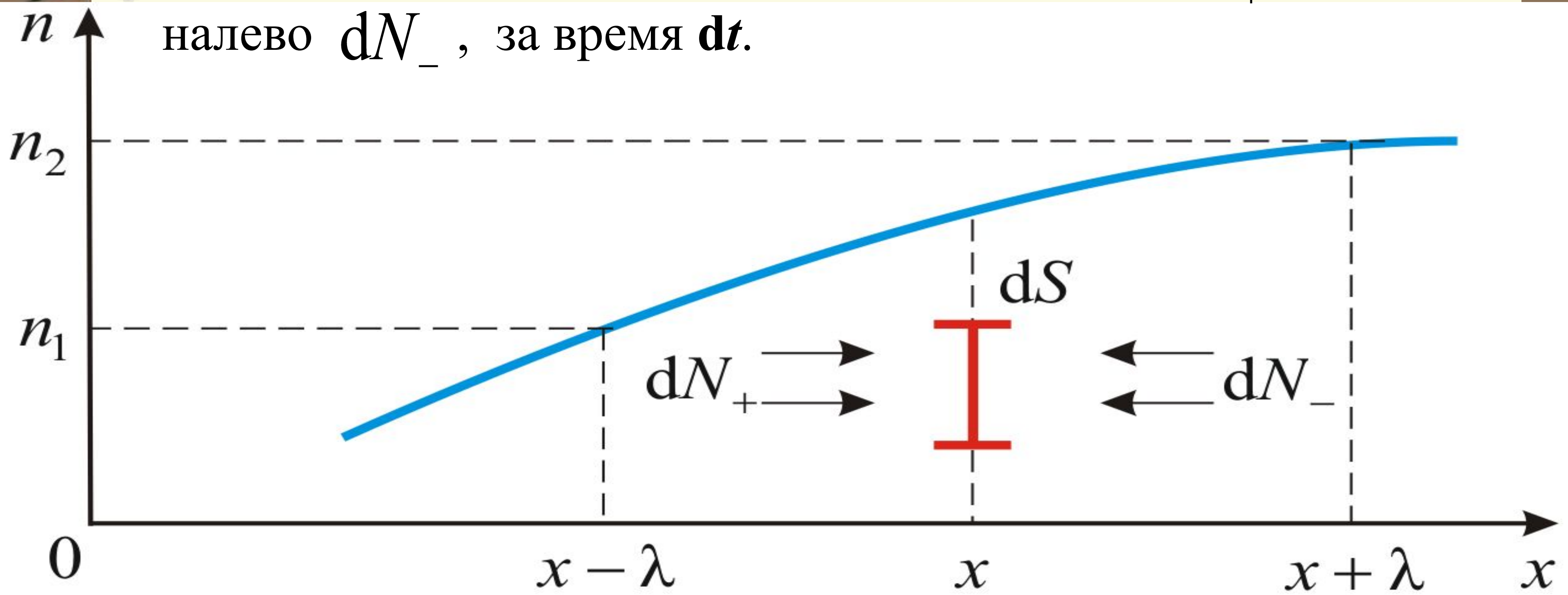
$$\operatorname{grad} n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\vec{\boldsymbol{k}}$$

Так как у нас **одномерная задача**, то (модуль):

$$\operatorname{grad} n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$$

При наличии grad ***n***, хаотическое движение будет более направленным и **возникнет поток молекул** примеси, направленный от мест с большей концентрацией к местам с меньшей концентрацией. Найдём этот поток.

Подсчитаем число молекул, проходящих через единичную площадку **d*S*** в направлении слева на право $\mathrm{d}N_+$ и справа налево $\mathrm{d}N_-$, за время **d*t***.



$$\mathrm{d}N_+ = \frac{1}{6} n_1 < \upsilon > \mathrm{d}S\mathrm{d}t; \quad \mathrm{d}N_- = \frac{1}{6} n_2 < \upsilon > \mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}N_+ - \mathrm{d}N_-$$

где $\boldsymbol{n_1}$ − концентрация молекул слева от площадки d*S*, а $\boldsymbol{n_2}$ − концентрация справа.

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}N_+ - \mathrm{d}N_-$$

Результирующий диффузионный поток

через единицу площади в единицу времени:

$$J = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t} = \frac{1}{6}\left(n_1 - n_2\right) < \upsilon >$$

$$J = -\frac{1}{3}\lambda < \upsilon > \frac{n_2 - n_1}{2\lambda},$$

но $n_2 - n_1 = \mathrm{d}n; \quad 2\lambda = \mathrm{d}x,$ тогда

$$\frac{n_2 - n_1}{2\lambda} = \frac{dn}{dx}, \qquad J = -\frac{1}{3}\lambda < \upsilon > \frac{dn}{dx}$$

Обозначим: $D = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon > -$ ***коэффициент диффузии***.

Тогда ***диффузионный поток*** будет равен:

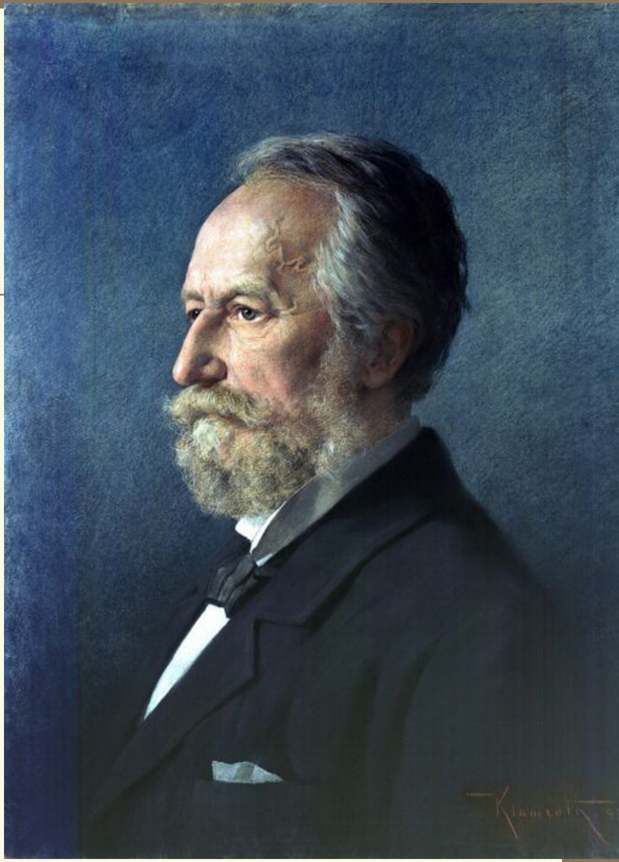
$$\boxed{J = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}}$$

- **закон Фика** (одномерный вид)

или в общем случае (в трёхмерный случай):

$$\boxed{J = -D\,\mathrm{grad}\,n}$$

- ***закон Фика*** (в общем виде)



Адольф Фик –немецкий учёный XIX века (1829-1901), приобрел известно-сть в 26 лет (1855 г.) благодаря своей первой работе в области физики, в ко-торой выдвинул гипотезу о том, что скорость диффузии газов пропорциона-льна градиенту их концентрации.
Спустя год он опубликовал монографию «Die Medizinische Physik», которая на десятилетия стала энциклопедией по **медицинской физике**.
31 год Фик проработал в Вюрцбурге, где **создал институт физиологии**, ставший известным во всем мире в качестве передового центра медицинской науки. Здесь же он предложил свой метод измерения сердечного выброса, обессмертивший его имя.

$$J = -D\,\mathrm{grad}\,n$$

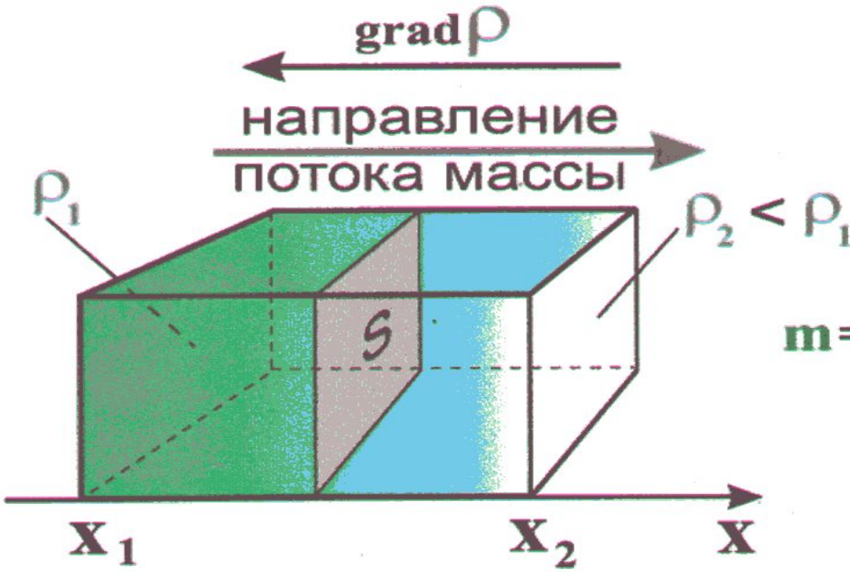
Из **закона Фика** видно, что **диффузионный поток, направлен в сторону уменьшения концентрации**.

При этом коэффициент диффузии ***D*** численно равен диффузионному потоку через единицу площади в единицу времени при $\mathrm{grad}\,n = 1$

Измеряется коэффициент диффузии ***D*** в $м^2/с$.

Диффузия газа

Диффузия - явление переноса молекулами массы



Закон Фика

$$m = -D\frac{d\rho}{dx} \quad \left[\frac{кг}{м^2 \cdot с}\right]$$

$m = \frac{M}{S \cdot t}$ - плотность потока массы

$\frac{d\rho}{dx}$ - градиент плотности

D - коэффициент диффузии газа

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle \lambda \rangle$$

$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ - средняя скорость молекулы

$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ - средняя длина свободного пробега молекулы

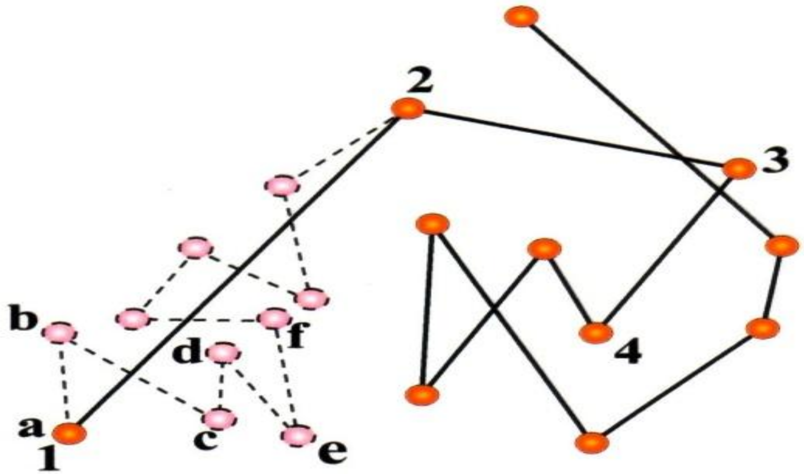
Движение молекул

Атомы и молекулы находятся в состоянии непрерывного хаотического ТЕПЛОВОГО движения

Доказательством этого являются:

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

- движение взвешенных в жидкости или газе макроскопических частиц



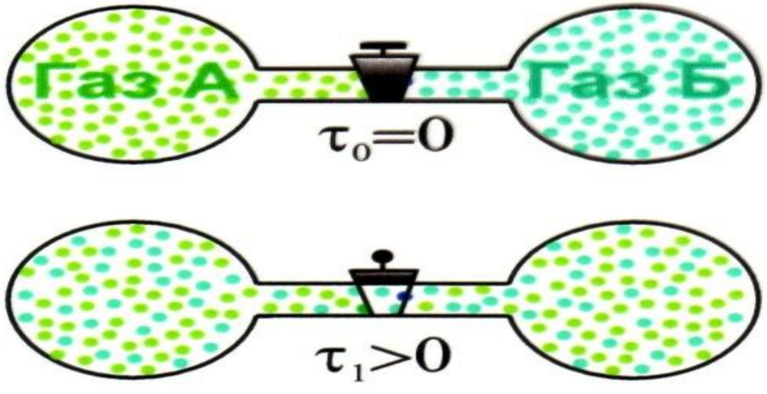
a-b-c-... - фиксация положения частицы производилась через $\Delta t=5$ с

1-2-3- ... - через $\Delta t=50$ с

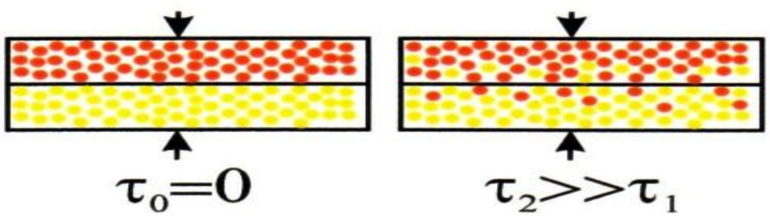
ДИФФУЗИЯ

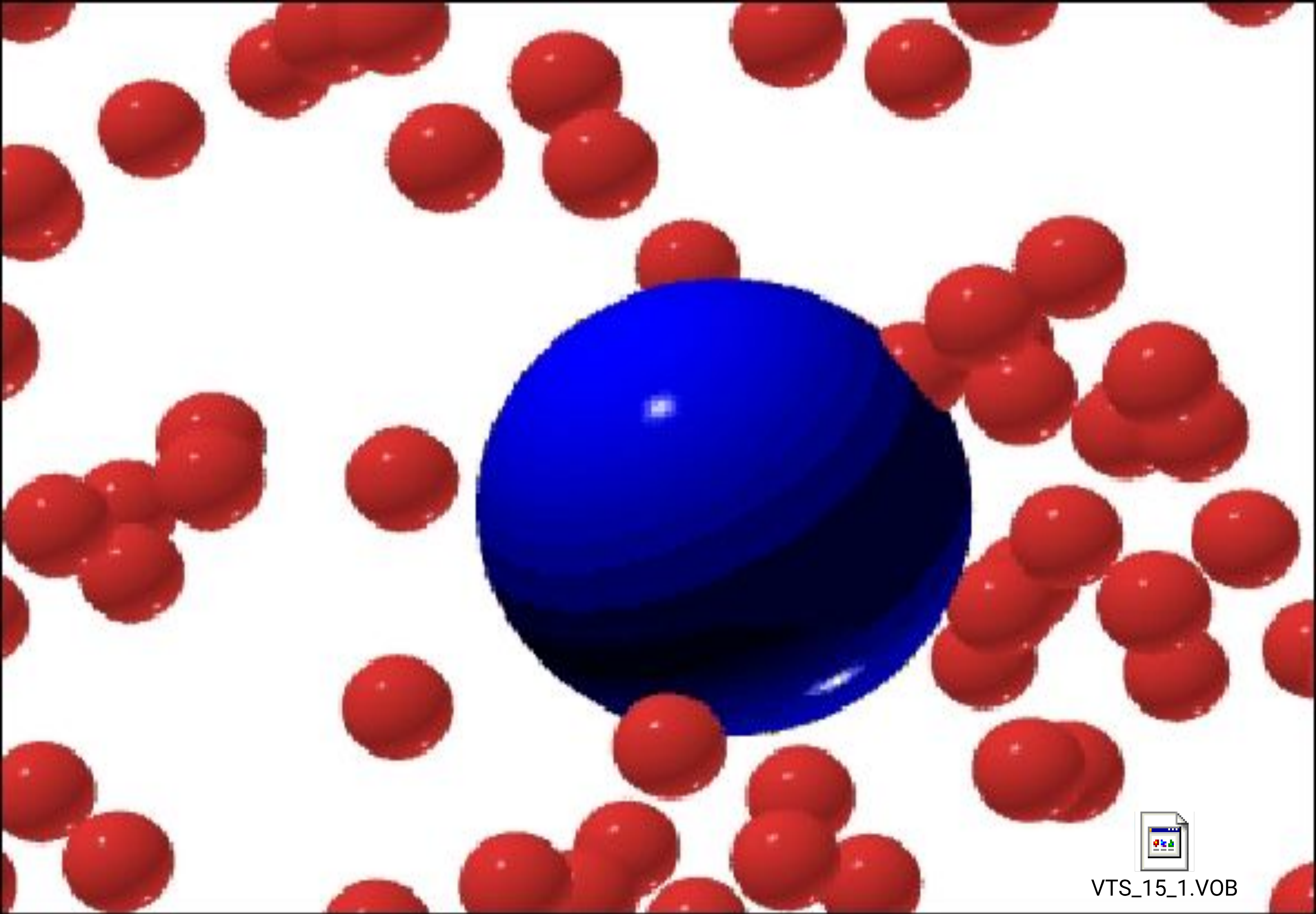
- проникновение различных веществ друг в друга, вследствие теплового движения молекул

Диффузия в газах



Диффузия в твердых телах





Хаотическое движение миниатюрной частицы, подвешенной в жидкости или газе (Броуновское движение)

Броуновское движение

Броуновское движение в жидкости тем оживлённее, чем меньше вязкость жидкости. Его едва удаётся подметить в глицерине, а **в газах**, оно чрезвычайно интенсивно. Броуновское движение вызывается толчками, испытываемыми взвешенными частицами со стороны окружающих молекул, совершающих тепловое движение. Под влиянием ударов молекул окружающей среды **скорость броуновской частицы меняется**.

Пусть броуновская частица имеет форму шарика радиуса ***r*** . Если небольшой шарик равномерно движется в жидкости со скоростью υ , то, как показывает опыт и теория, на него действует сила сопротивления ***F***, пропорциональная скорости υ. Коэффициент пропорциональности в формуле

$\upsilon = B \cdot F$ называется **подвижностью частицы** – ***B***.

Подвижность частицы ***B*** связана с коэффициентом диффузии **соотношением Эйнштейна**:

$$\boxed{D = kT \cdot B}$$

Теплопроводность газов

Учение о теплопроводности начало развиваться в XVIII в. и получило свое завершение в работах французского ученого **Ж. Фурье** (1768 – 1830), опубликовавшего в 1822 г. книгу «Аналитическая теория теплоты».

Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) — французский математик и физик, иностранный почетный член Петербургской АН (1829). Труды по алгебре, дифференциальным уравнениям и математической физике.

В 1807 и 1811 годах он представил Парижской АН свои первые открытия по теории распространения тепла в твёрдом теле, а в 1822 году опубликовал работу "Аналитическая теория тепла", сыгравшую большую роль в последующей истории математики.

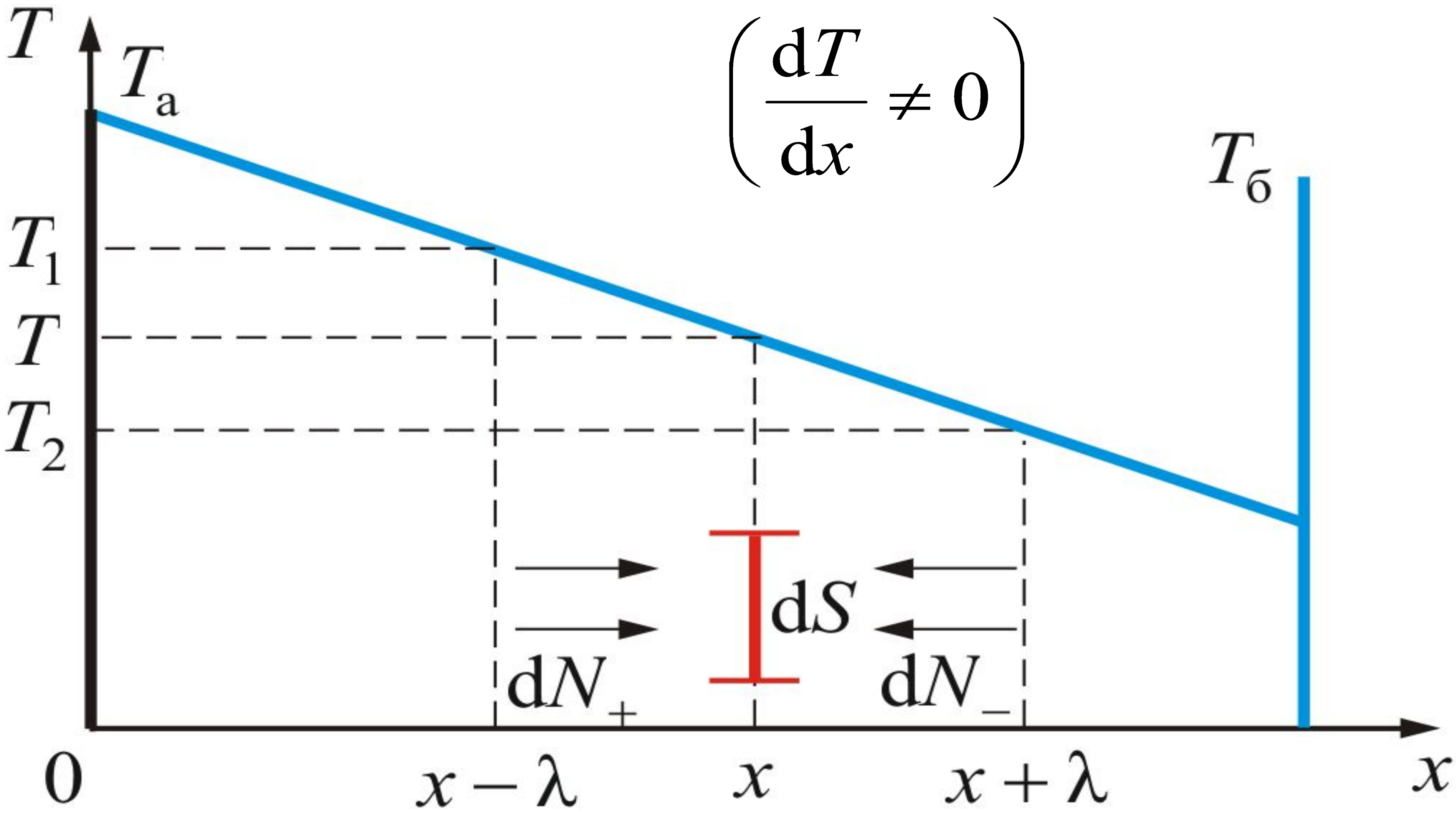
Если в соседних слоях газа создана и поддерживается разность температур, то между ними будет происходить обмен тепла. Благодаря хаотическому движению, молекулы в соседних слоях будут перемешиваться и, их средние энергии будут выравниваться. Происходит ***перенос энергии от более нагретых слоев к более холодным.***

Перенос энергии от более нагретых слоев к более холодным называется *теплопроводностью*.

Поток тепла пропорционален градиенту температуры:

$$Q \sim \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

Рассмотрим газ, заключённый между двумя параллельными стенками, имеющими разную температуру $T_а$ и $T_б$.



$$\left(\frac{dT}{dx} \neq 0\right)$$

Итак, у нас имеется градиент температуры

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \neq 0\right)$$

Тогда через газ в направлении оси $\boldsymbol{x}$ будет идти поток тепла.

Хаотично двигаясь, молекулы будут переходить из одного слоя газа в другой, перенося с собой энергию. Это движение молекул приводит к перемешиванию молекул, имеющих различную кинетическую энергию :

$$E = \frac{m_0 < \upsilon >^2}{2} = \frac{i}{2} kT$$

здесь i – число степеней свободы молекулы.

При подсчёте потока тепла введём следующие упрощения:

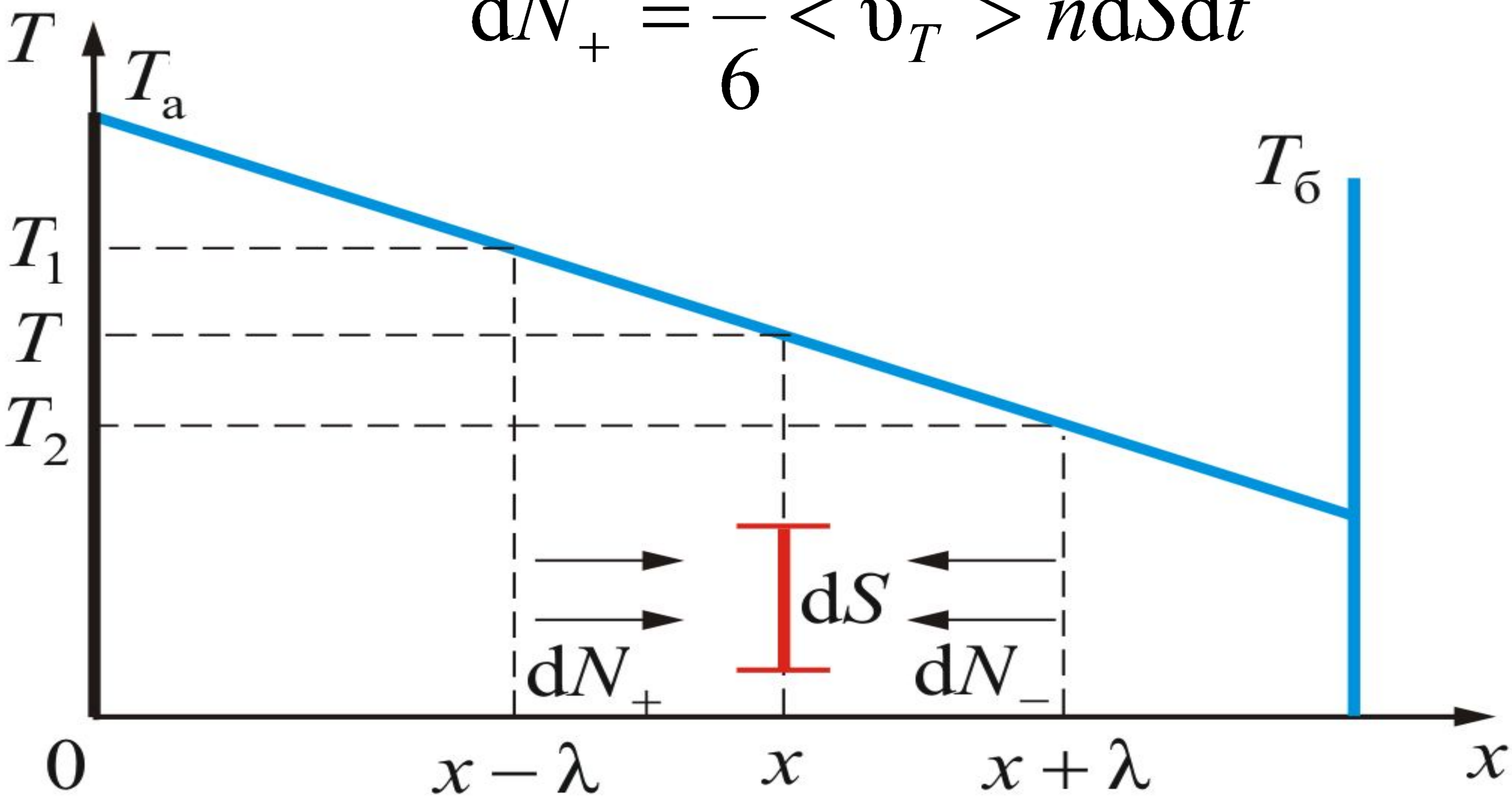
Среднеарифметическая скорость теплового движения молекул

$$\langle \upsilon_T \rangle = \mathrm{const}$$

Концентрация молекул в соседних слоях одинакова, хотя на самом деле она различается (что даёт ошибку ≈ 10 %).

Через площадку dS за время dt **слева** проходит число молекул:

$$\mathrm{d}N_{+} = \frac{1}{6} < \upsilon_T > n\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$



Средняя энергия этих молекул E – соответствует значению энергии в том месте, где они испытывают последний раз столкновение. Для одной молекулы газа:

$$E_1 = \frac{i}{2} kT_1.$$

Соответственно, **справа** проходит

$$\mathrm{d}N_{-} = \frac{1}{6} n < \upsilon_{\mathrm{T}} > \mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

молекул.

Каждая из этих молекул перенесёт энергию

$$E_2 = \frac{i}{2} kT_2.$$

Результирующий поток энергии через dS равен разности потоков dQ_+ и dQ_-, то есть

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{6} n < \upsilon_T > \mathrm{d}S\mathrm{d}t \frac{i}{2} k(T_1 - T_2)$$

Применяя те же рассуждения, получим: результирующий поток через единичную площадку в единицу времени равен $\boldsymbol{q}$ и направлен он в сторону противоположную направлению градиента:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t} = q = -\frac{1}{3}\lambda < \upsilon_T > n \frac{i}{2} k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x},$$

$$q = -\chi \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$ - **закон Фурье** (одномерный вид)

или $$\boxed{q = -\chi \operatorname{grad} T}$$

– ***уравнение теплопроводности Ж. Фурье***. Здесь ***q*** – ***тепловой поток***;

χ – ***коэффициент теплопроводности***, равный:

$$\chi = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon_{\text{т}} > n\frac{i}{2}k$$ или

$$\boxed{\chi = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon_{T} > \rho C_{V_{\text{уд}}}}$$

$$\chi = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon_T > \rho C_{V\text{уд}}$$

$\upsilon_{\text{Т}}$ – тепловая скорость молекул;

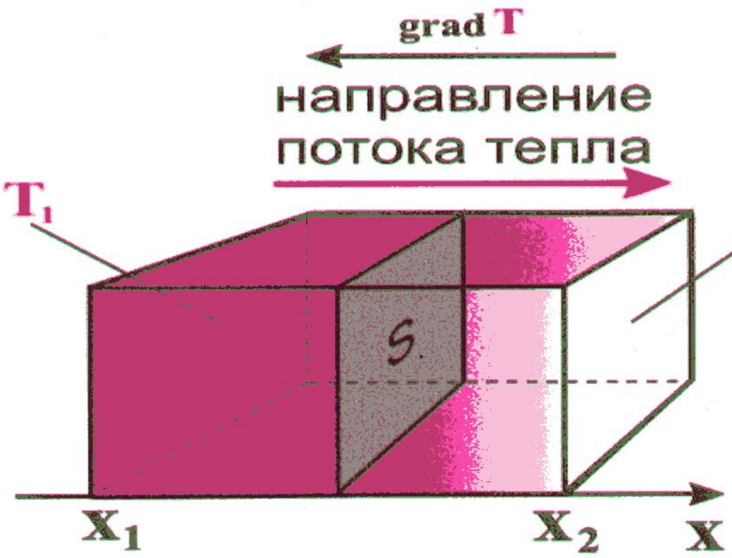
$C_{V\text{уд}}$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Найдем размерность коэффициента теплопроводности:

$$[\chi] = \frac{q\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

Теплопроводность газа

Теплопроводность - явление переноса молекулами энергии



Закон Фурье

$$q = -\chi \frac{dT}{dx} \quad \left[\frac{кг}{м^2 \cdot с}\right]$$

$q = \frac{Q}{S \cdot t}$ - плотность потока энергии

$\frac{dT}{dx}$ - градиент температуры

χ - коэффициент теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C_v$$

$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ - средняя скорость молекулы

$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$ - средняя длина свободного пробега молекулы

$C_v = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$ - удельная теплоемкость при постоянном объеме

Внутреннее трение. Вязкость газов.

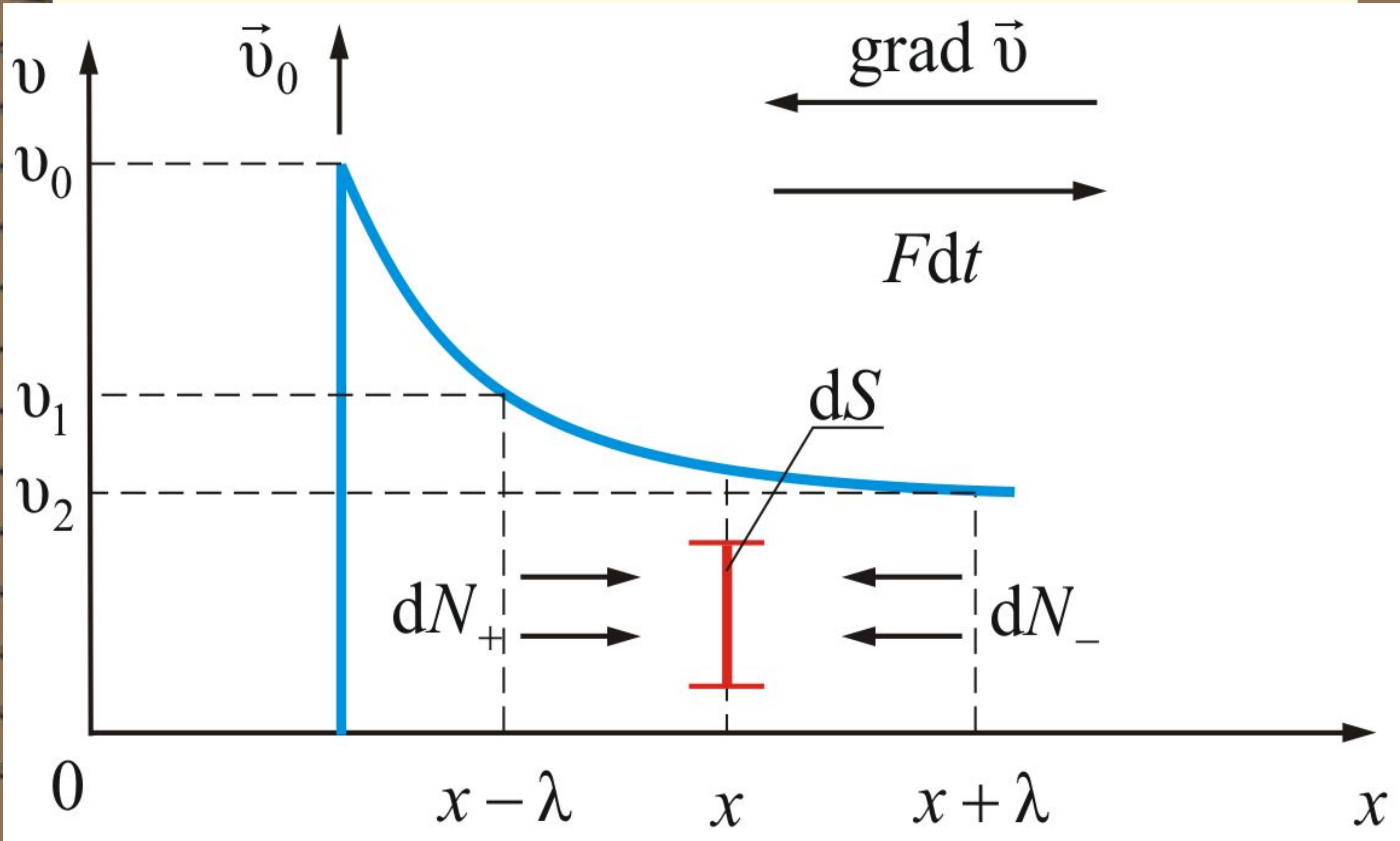
Если какое либо тело движется в газе, то оно сталкивается с молекулами газа и сообщает им импульс. С другой стороны, тело тоже будет испытывать соударения со стороны молекул, и получать собственный импульс, но направленный в противоположную сторону. Газ ускоряется, тело тормозиться, то есть, ***на тело действуют силы трения***.

Такая же сила трения будет действовать и между двумя соседними слоями газа (или жидкости), движущимися с разными скоростями.

Это явление носит название ***внутреннее трение*** или ***вязкость*** ***газа***, причём ***сила трения пропорциональна градиенту скорости:***

$$F_{\text{тр}} \sim \frac{d\upsilon}{dx}$$

Рассмотрим систему координат υ от x



Пусть в покоящемся газе вверх, перпендикулярно оси x движется пластинка со скоростью υ_0, причём $\upsilon_0 << \upsilon_T$ (υ_T – скорость теплового движения молекул).

Пластинка увлекает за собой прилегающий слой газа, тот соседний слой и так далее. Весь газ делится, как бы на тончайшие слои, скользящие вверх тем медленнее, чем дальше они от пластинки.

Раз **слои газа движутся с разными скоростями, возникает трение.**

Выясним причину трения в газе.

Каждая молекула газа в слое принимает участие в двух движениях: **тепловом и направленном**.

Так как направление теплового движения хаотически меняется, то **в среднем вектор тепловой скорости равен нулю** $\langle \vec{\upsilon}_T \rangle = 0$

При **направленном движении** вся совокупность молекул будет дрейфовать с постоянной скоростью υ.

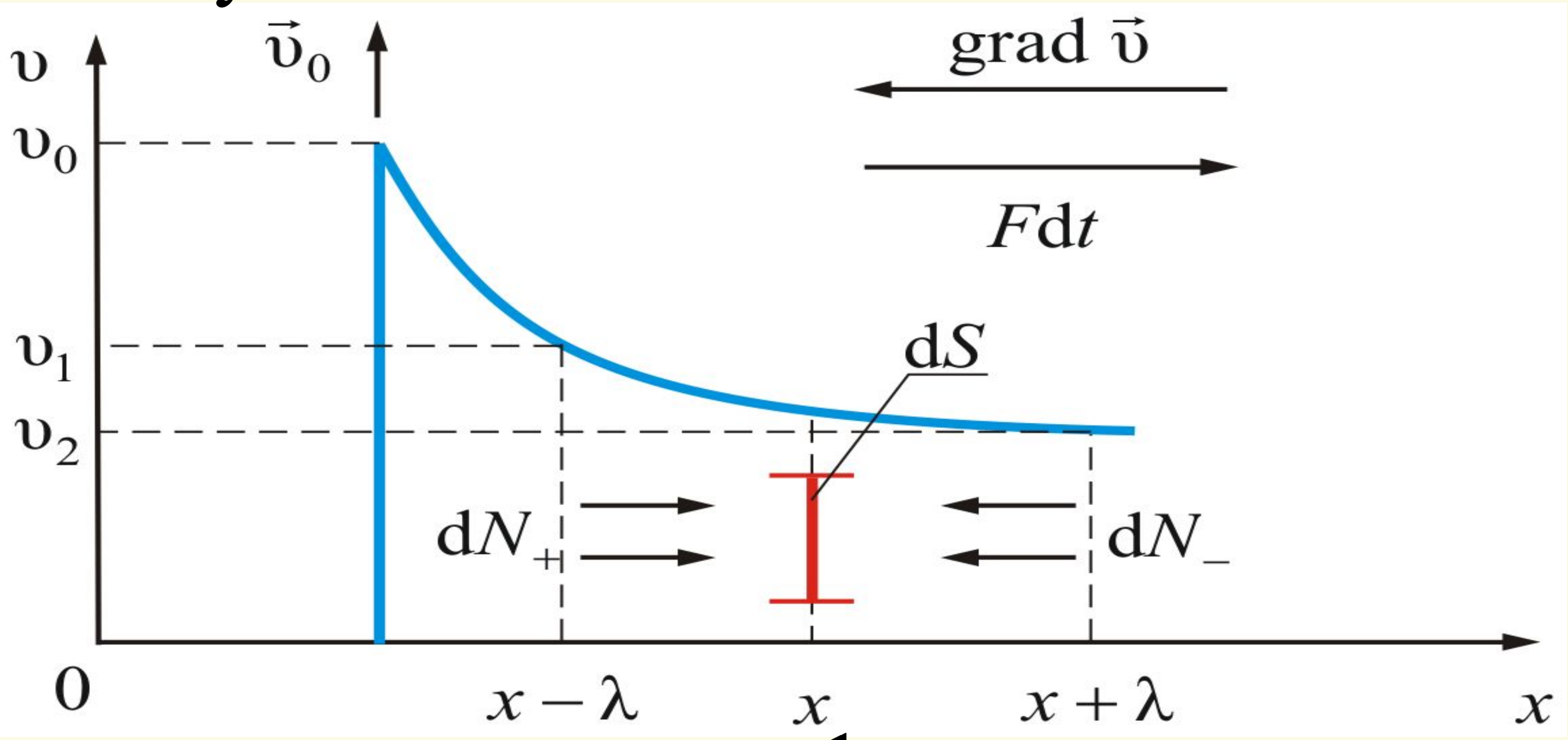
Средний импульс отдельной молекулы в слое определяется только дрейфовой скоростью υ:

$$p_0 = m_0 \upsilon.$$

Но так как молекулы участвуют в тепловом движении, они будут переходить из слоя в слой. При этом они будут переносить с собой добавочный импульс, который будет определяться молекулами того слоя, куда перешла молекула.

Перемешивание молекул разных слоёв приводит к выравниванию дрейфовых скоростей разных слоёв, что и проявляется макроскопически как действие сил трения между слоями.

Рассмотрим элементарную площадку dS перпендикулярно оси x. Через эту площадку за время dt влево и вправо переходят потоки молекул.



$$\mathrm{d}N_+ = \mathrm{d}N_- = \frac{1}{6} n < υ > \mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

Но эти потоки переносят разный импульс: $m_0 \upsilon_1 \mathrm{d}N_+$ и $m_0 \upsilon_2 \mathrm{d}N_-$

При переносе импульса от слоя к слою происходит изменение импульса этих слоёв. Это значит, что на каждый из этих слоёв действует сила, равная изменению импульса.

Сила эта есть не что иное, как ***сила трения между слоями газа***, движущимися с различными скоростями. Отсюда и название – ***внутреннее трение***.

Закон вязкости был открыт **И. Ньютоном** в 1687 г.

Переносимый за время dt импульс равен: $\mathrm{d}(m_0\upsilon)$ или

$$F\mathrm{d}t = \frac{1}{6} n < \upsilon > m_0(\upsilon_1 - \upsilon_2)\mathrm{d}S$$

Отсюда получим силу, действующую на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа:

$$\frac{F}{\mathrm{d}S} = f = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon > nm_0\left(\frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2\lambda}\right) = -\frac{1}{3}\lambda < \upsilon > m_0 n \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{2\lambda}$$

Сила, действующая на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа:

$$f = -\eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$$ - **уравнение Ньютона**

Или, в общем виде: $$\boxed{f = -\eta \, \mathrm{grad}\,\upsilon}$$

уравнение Ньютона.

Здесь η – **коэффициент вязкости**:

$$\eta = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon > nm_0 = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon > \rho = D\rho$$

где ***D*** – коэффициент диффузии;

ρ – плотность газа.

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon > \rho}$$

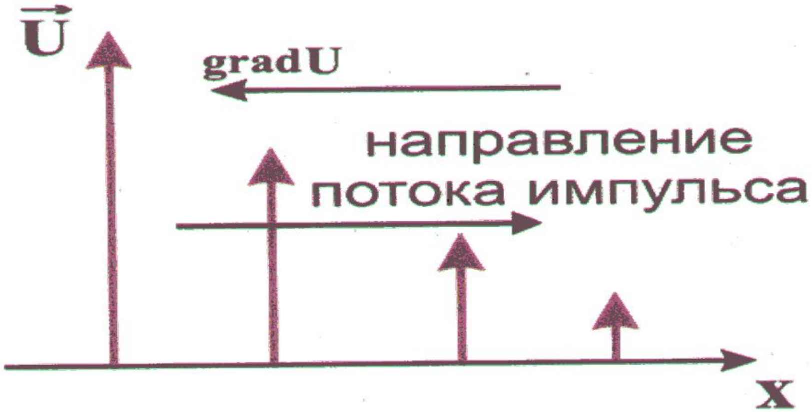
- <u>коэффициент вязкости</u>

Физический смысл ***коэффици-ента вязкости*** $\boldsymbol{\eta}$ *в том, что он численно равен импульсу, переносимому в единицу времени через единицу площади при градиенте скорости равном единице.*

Вязкость газа

Вязкость - явление переноса молекулами импульса направленного движения

Сила внутреннего трения



$$F = \eta \left| \frac{dU}{dx} \right| S$$

$$j = -\eta \frac{dU}{dx}$$

$\frac{dU}{dx}$ - градиент скорости направленного движения молекул

$j = \frac{F}{S}$ - плотность потока импульса

η - коэффициент вязкости газа

$$\eta = \frac{1}{3} \rho <v><\lambda>$$

$<v> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ - средняя скорость теплового движения молекулы

$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ - средняя длина свободного пробега молекулы

Уравнения и коэффициенты переноса

Сопоставим уравнения переноса

$$\boxed{J = -D \operatorname{grad} n}$$

$$\boxed{J = -D \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} -}$$

<u>Уравнение Фика для диффузии</u>.

<u>Коэффициент диффузии</u>

$$\boxed{D = \frac{1}{3} \lambda < \upsilon_T >}$$

$$\boxed{q = -\chi\,\mathrm{grad}T}$$

или

$$\boxed{q = -\chi\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}}$$

Уравнение Фурье

для теплопроводности.

***Коэффициент теплопроводности*:**

$$\boxed{\chi = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon_T > \rho C_{\text{уд}} = D\rho C_{\text{уд}}}$$

$$\boxed{f_{\text{тр}} = -\eta \operatorname{grad} \upsilon}$$

$$\boxed{f_{\text{тр}} = -\eta \frac{d\upsilon}{dx}}$$

- **Уравнение Ньютона для трения.**

Коэффициент вязкости:

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3}\lambda < \upsilon_T > \rho = D \cdot \rho}$$


Лекция закончен