«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Дискретные сигналы.
Z-преобразование

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

1) **Z-преобразование** связано с **преобразованием Лапласа**:

Интегральное преобразование Лапласа

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$x(t)$ – непрерывная функция времени (функция-оригинал)

$X(p)$ – изображение функции $x(t)$ по Лапласу

p – оператор Лапласа (комплексная частота)

$$p = \sigma + j\omega$$

2) Преобразование Лапласа справедливо в области **абсолютной сходимости несобственного интеграла.**

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Дискретное преобразование Лапласа

$$t \to nT$$

$$X(e^{pT}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}$$

Z-преобразование

$$z = e^{pT}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

$x(nT)$ – функция дискретного времени

$X(z)$ – изображение функции $x(nT)$

Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА (1)

***Z*-преобразование** справедливо в области **абсолютной сходимости ряда**

$$\sum_{n=0}^{\infty} | x(nT) z^{-n} | < \infty$$

Свойства *Z*-преобразования

1) Линейность

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \ldots$$

$$X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + \ldots$$

2) Теорема о задержке

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

$$x(n-m) \leftrightarrow X(z) z^{-m}$$

Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА (2). ОБРАТНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

3) Теорема о свертке

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) \quad \leftrightarrow \quad X(z) = X_1(z) X_2(z)$$

Обратное *Z*-преобразование

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

C – замкнутый контур на комплексной z-плоскости, охватывающий начало координат и особые точки функции $X(z)$

Если *X(z)* – дробно-рациональная функция, ее особыми точками являются полюсы.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (1)

1) Теорема Коши о вычетах

$$x(n) = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}_{\alpha_k}\left[X(z)\,z^{n-1}\right]$$

α_k – k-полюс

Res_{α_k} – вычет в k-м полюсе

$$\mathrm{Res}_{\alpha_k}\left[X(z)\,z^{n-1}\right] = \lim_{z \to \alpha_k}\left[(z-\alpha_k)\,X(z)\,z^{n-1}\right]$$

Пример

$$X(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \leftrightarrow x(n) = a_1^{\,n}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (2). СВЯЗЬ КОМПЛЕКСНЫХ P И Z-ПЛОСКОСТЕЙ (1)

2) Разложение на простые дроби дробно-рациональной функции *X(z)*

$$X(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \right)$$

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k{}^{n}$$

3) Использование таблицы соответствий

Связь комплексных *p* и *z*-плоскостей

$$z = e^{pT} =$$

$$= e^{(\sigma + j\omega)T} =$$

$$= e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j\omega}$$

СВЯЗЬ КОМПЛЕКСНЫХ P И Z-ПЛОСКОСТЕЙ (2)

Формы представления переменной *z*

1) алгебраическая

$$z = \xi + j\eta$$

2) показательная

$$z = re^{j\varphi}$$

Сравнение форм представления переменной *z*

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\varphi = \hat{\omega}$$

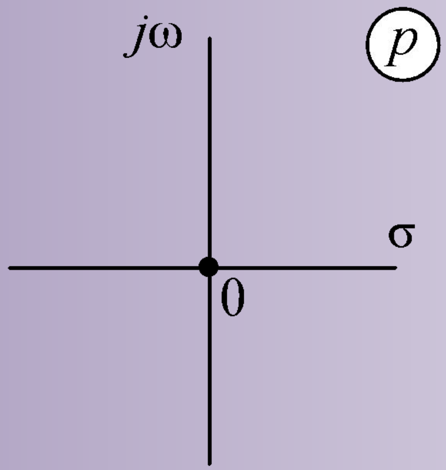
Смысл нормированной частоты – угол на комплексной z-плоскости,

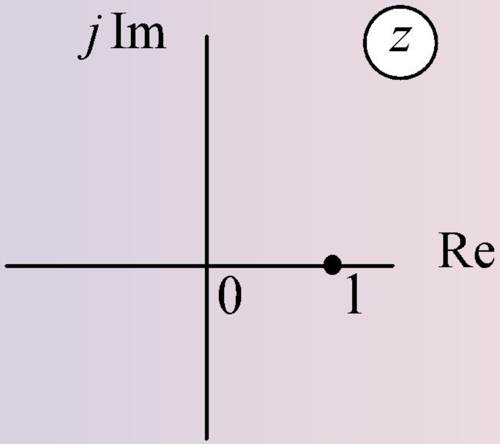
измеряемый в радианах.

ПРИМЕРЫ (1)

1) Начало координат *p*-плоскости: *p=0; σ = 0; ω=0;*

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega} = 1e^{j0} = 1$$



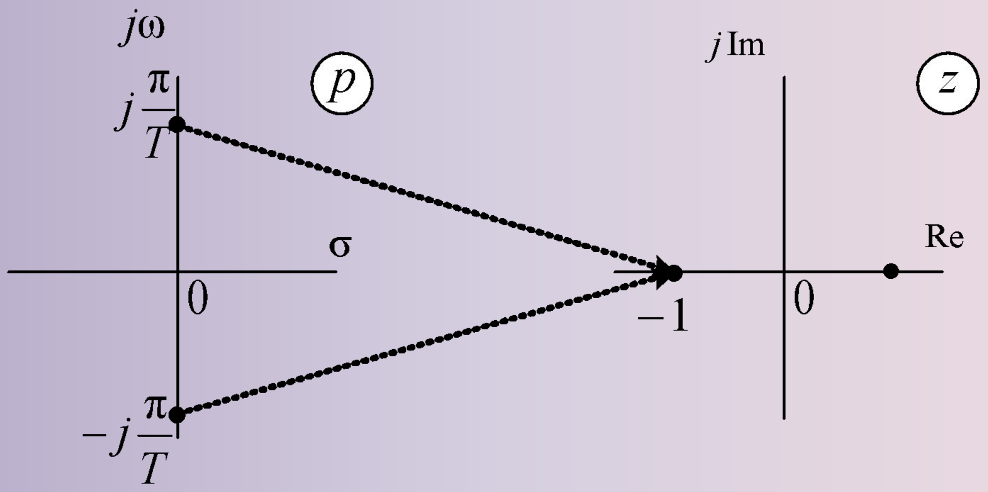


ПРИМЕРЫ (2)

2) Точки на оси ординат *p*-плоскости

$$p = \pm j\frac{\pi}{T} \qquad \sigma = 0;\ \omega = \pm\frac{\pi}{T}$$

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T}e^{j\omega T} = 1e^{\pm j\frac{\pi}{T}T} = 1e^{\pm j\pi} = -1$$



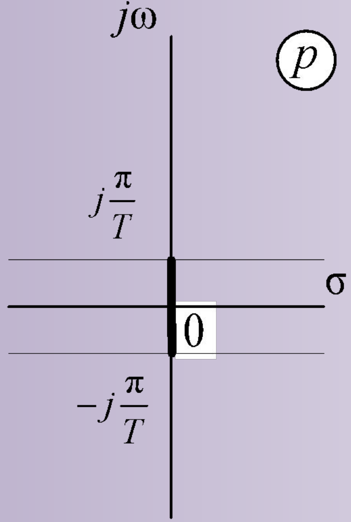
ПРИМЕРЫ (3)

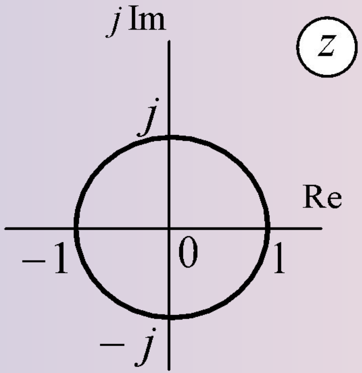
3) Отрезок на оси частот *p*-плоскости

$$-j\frac{\pi}{T} < p \le j\frac{\pi}{T} \qquad \sigma = 0;\ -\frac{\pi}{T} < \omega \le \frac{\pi}{T}$$

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = 1e^{\pm j\omega}$$ — единичная окружность

(один оборот)





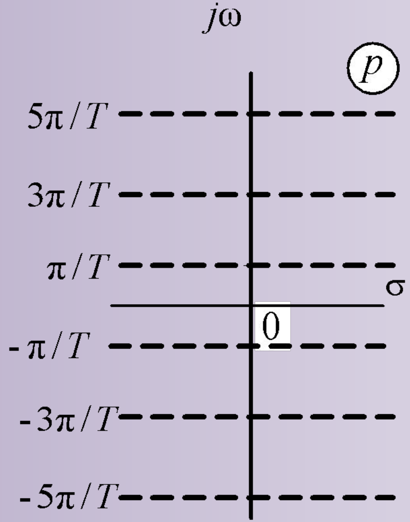
ПРИМЕРЫ (4)

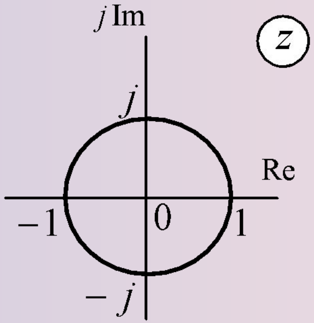
4) Ось частот *p*-плоскости

$$-j\infty < p \le j\infty \qquad \sigma = 0;\ -\infty < \omega < \infty$$

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = 1 e^{+j\omega T}$$ единичная окружность

(бесконечное число оборотов)



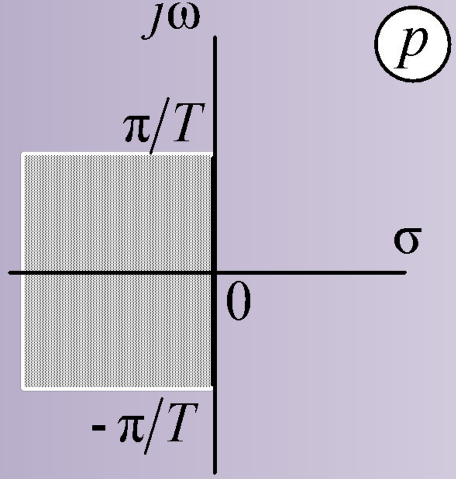


ПРИМЕРЫ (5)

5) Левая *p*-полуплоскость

$$-j\infty < p \le j\infty \qquad \sigma \le 0;\ -\infty < \omega < \infty$$

$$z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = re^{\pm j\bar{\omega}},\ r \le 1;\ -\infty < \bar{\omega} < \infty \text{ – единичный круг}$$



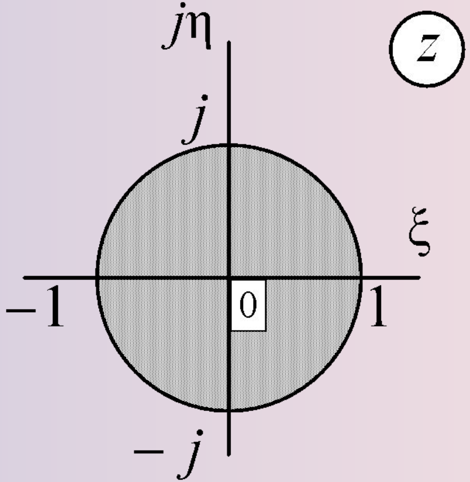


ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЙ

№	Последовательность	z-изображение
1	$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	$U_0(z) = 1$
2	$h(n) = (\pm a)^n$	$H(z) = \dfrac{1}{1 \mp a z^{-1}}$
3	$h(n) = r_*^n \dfrac{\sin\left[(n+1)\varphi_*\right]}{\sin\varphi_*}$	$H(z) = \dfrac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$, $a_1 = -2 r_* \cos\varphi_*$, $a_2 = r_*^2$

«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Дискретные сигналы. Z-преобразование

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»