

**Предмет физика.  
Измерение  
физических величин.  
Погрешности.**









# Измерение величин

КОМИССИЯ О МѢРАХ И ВѢСАХ 1736 г.



УКАЗЪ ЕГО ВЕЛИЧЕСТВА  
ИМПЕРАТОРА И САМОДЕРЖЦА ВСЕРОССИЙСКОГО

Объявляется во всенародное известіе.

ПО ЕГО Императорского Величества указу, состоявшемуся въ Правительствующемъ Сенатѣ, Декабря 24. дня, мінуваго 1724 Года, по доношенію Каморъ Коллегіи и главнаго Полцимистерскаго Канцеляріи, и главнаго Магістрата, вѣлно во всѣхъ Губерніяхъ и Провінціяхъ, Городѣхъ и мѣстахъ муку, ярупу, солодъ, толокно, и всякой молотой и толченой всякаго званія клѣбъ продавать въ всѣхъ а не на мѣру, по чему пудъ надлежитъ умѣренными цѣнами и въ за орленскіе вѣсы. И того :смотрѣть въ таможахъ, и въ Провінціяхъ Магістратамъ кособоно, для того въ мѣрахъ а на и паче въ молотыи чужду крупнои и мѣлкои муки противъ вѣсу немалое зыбавствъ различіе и обманъ И того ради сіиъ ЕГО Императорскаго Величества указомъ публикуется во всео:народное известіе, чтобъ о томъ всякаго чина люды ібдали, и чинили по вышесказанному неспрѣнно



Печатанъ въ САНКТЪПІТЕРБУРХѢ при Сенатѣ,  
Генваря 16 Дня, 1725 Года.

**«Наука начинается... с тех пор, как  
начинают измерять»**

# Измерение величин





Определить  
цену деления  
устройства  
или прибора

$$C = \frac{10 - 5}{5} = \frac{5}{5} = 1(V)$$







Red warning lights: Battery, Engine

Yellow warning lights: Oil, Battery

# Прямые измерения



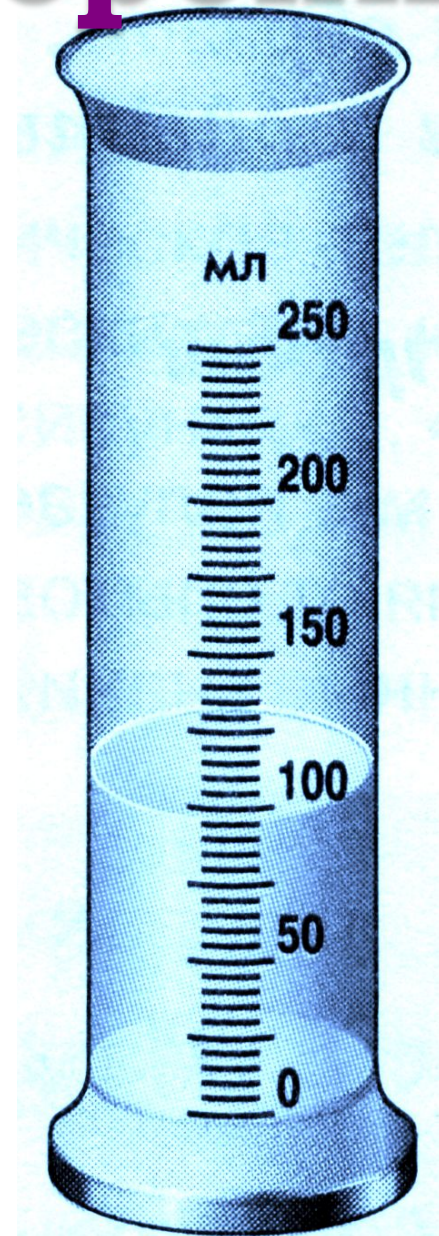
Прямыми называют такие измерения, результат которых получают непосредственно с помощью меры или измерительного прибора.

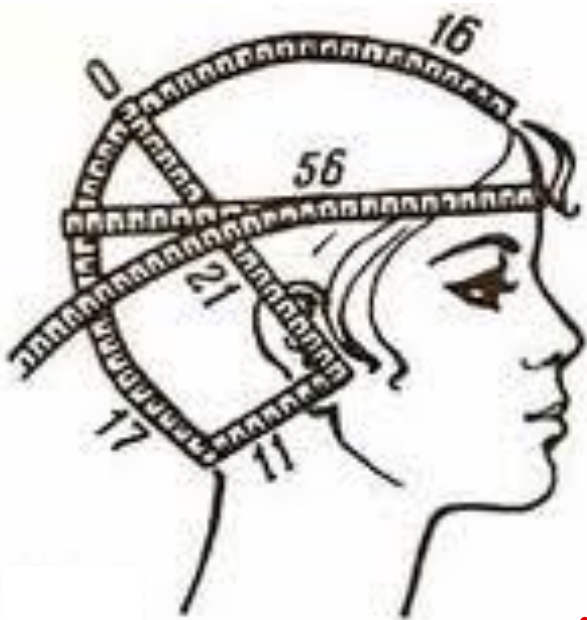
# Прямые измерения

массы тела – на весах;

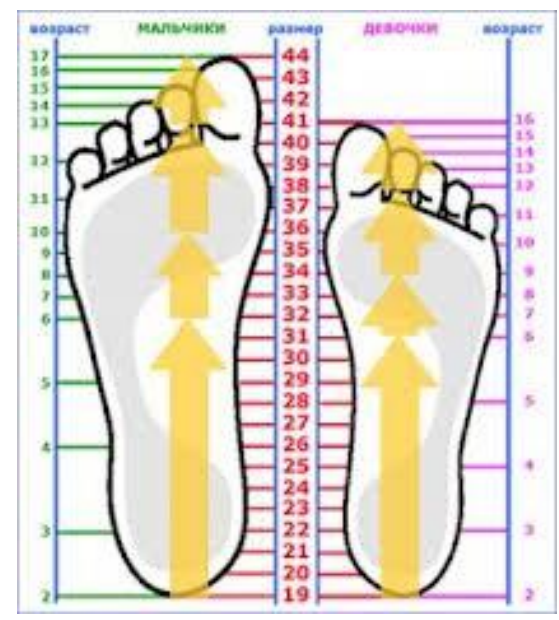


Объём жидкости и  
твёрдого тела – мензуркой;



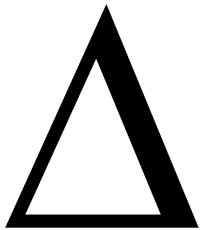


Прямые измерения  
могут быть  
*однократными*  
И  
*многократными.*



# Погрешность

допускаемую при измерении неточность называют *погрешностью измерений*



абсолютная



относительная

прямых  
измерений

косвенных  
измерений

случайная

# Абсолютная погрешность

*Вычисление погрешности прямых измерений*

$$\Delta = \Delta_{\text{инструмента}} + \Delta_{\text{отсчёта}}$$

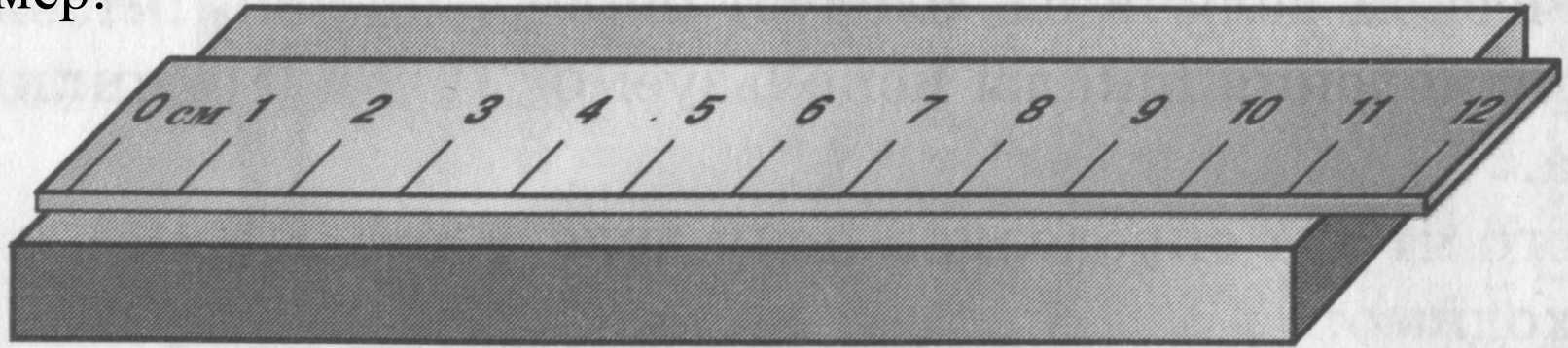
$$\Delta_{\text{инструмента}} = C$$

$$\Delta_{\text{отсчёта}} = \frac{C}{2}$$

$$\Delta = C + \frac{C}{2} = 1,5C$$

**Погрешность  
инструмента  
не может быть  
больше  
цены деления  
измерительного  
прибора**

Пример:



$$\Delta = \Delta_{\text{инструмента}} + \Delta_{\text{отсчёта}}$$

$$\Delta_{\text{инструмента}} = C$$

$$\Delta_{\text{отсчёта}} = 0,5C$$

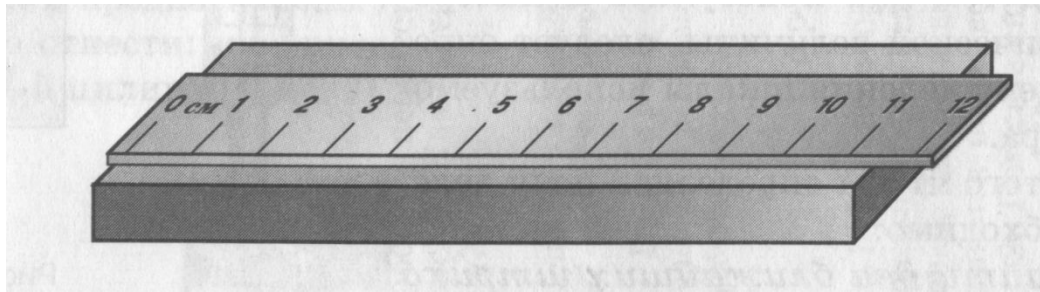
$$\Delta = C + \frac{C}{2} = 1 + 0,5 = 1,5(\text{см})$$



# Запись величины с учётом погрешности

$a$  - приближённое значение измерений

$$A = a \pm \Delta a$$



$$l = l_{np} \pm \Delta l \quad \Delta l = 1 \text{ см}$$

$$l = 11 \text{ см} \pm 1 \text{ см}$$

# Правила округления результатов и погрешностей

Погрешность округляют до первой значащей цифры:

$$\Delta A = 0,0247 \approx 0,02$$

Результат округляют до цифры с которой начинается погрешность:

$$A = (5,235867 \pm 0,0247)$$

$$A \approx (5,24 \pm 0,02)$$



## Задание

Измерьте длину бруска.

Запишите результаты с учётом погрешности

# Алгоритм

1. Определить цену деления прибора;
2. Рассчитать погрешность прибора;
3. Рассчитать погрешность измерения;
4. Рассчитать абсолютную погрешность;
5. Провести приближённые измерения;
6. Записать величину с учётом погрешности.



**Если проводить измерения этими сантиметровыми лентами, то которой из них измерения будут проведены более точные?**

# Точность измерений

$$C = \frac{20 - 10}{10} = 1(\text{см})$$

$$C = \frac{3 - 2}{10} = \frac{1}{10} = 0,1(\text{см})$$

$$C = \frac{123 - 122}{2} = \frac{1}{2} = 0,5(\text{см})$$

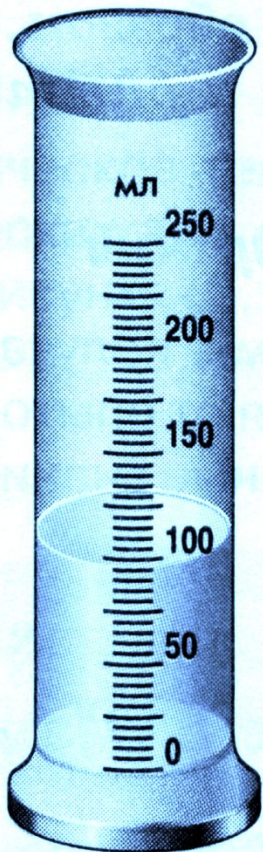
$\Delta_{\text{жёлтой}} = 1\text{см}$

$\Delta_{\text{розовой}} = 0,1\text{см}$

$\Delta_{\text{коричневой}} = 0,5(\text{см})$

*Критерий  
качества измерения*

***Чем меньше цена  
деления прибора,  
тем больше  
точность  
измерения!***



$$C = \frac{200 - 150}{10} = \frac{50}{10} = 5(\text{мл})$$

$$\Delta = \Delta_{\text{инструмента}} + \Delta_{\text{отсчёта}}$$

$$\Delta_{\text{инструмента}} = 5$$

$$\Delta_{\text{отсчёта}} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\Delta = C + \frac{C}{2} = 7,5(\text{мл})$$

$$V_{\text{пр}} = 100\text{см}^3$$

$$\Delta V = 5\text{мл} = 5\text{см}^3$$

$$V = 100\text{см}^3 \pm 7,5\text{см}^3$$



Определите  
погрешность измерения  
термометра.  
Запишите показание  
термометра с учётом  
погрешности.





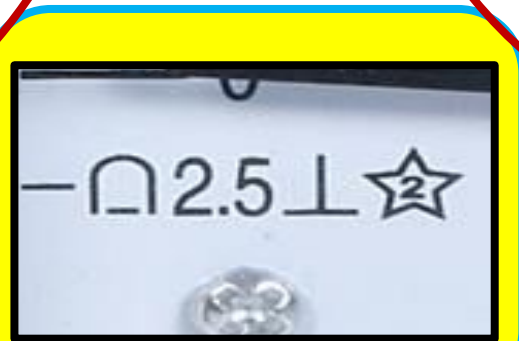
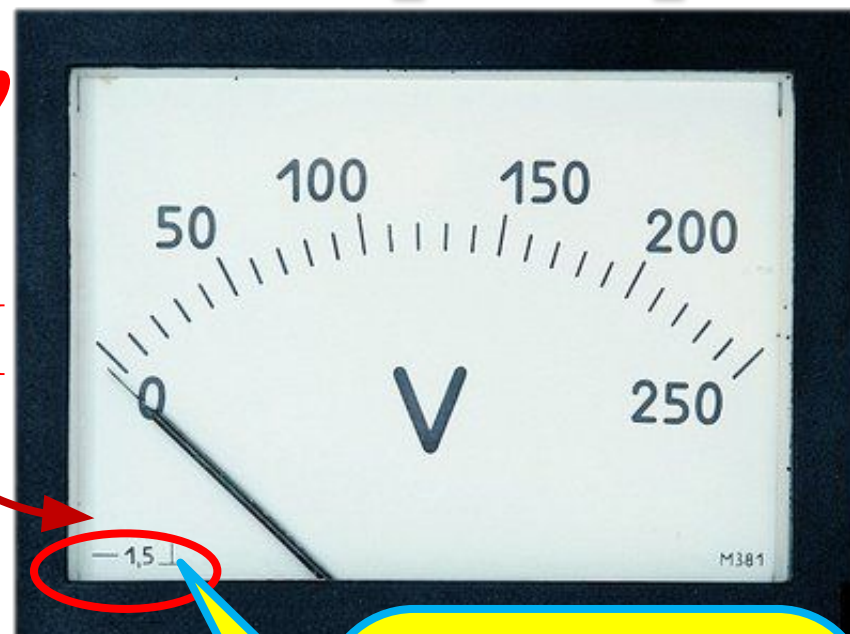
ТБ-1Б

Определите погрешность измерения медицинского термометра. Запишите показание градусника с учётом погрешности.

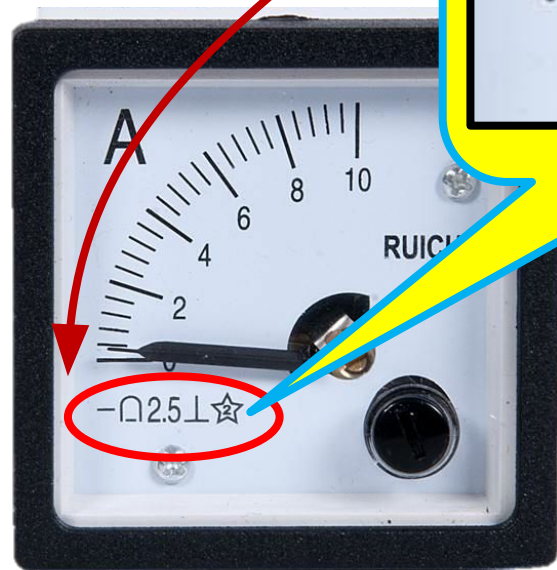
# Погрешность

## электроизмерительных приборов

задаётся **классом точности  $\gamma$**   
и **пределом измерения прибора -  $M$**



$$\Delta A = \frac{M \cdot \gamma}{100}$$



# Классы точности

Класс точности бывает:

0,5; 1,0; 1,5;

2,0; 2,5; 4

Чем меньше число,  
тем выше точность!

😊 класс точности  
школьных приборов = 4



# Погрешность цифровых приборов

Погрешность цифровых приборов рассматривается через **класс точности**.

**НЕТ**  
погрешности отсчёта!

*Для быстрого (и не плохого) учёта погрешности можно считать, что приборная погрешность равна цене деления прибора.*



В данном случае,

**единице в последнем разряде шкалы прибора.**



# Погрешность времени

Современные секундомеры, встроенные в часы и телефоны измеряют время с точностью до тысячных долей секунды.

Но из этого **не следует, что именно такова реальная точность измерений.**

Дело в том,

оно не проводится электронными приборами или магнитных датчиками.

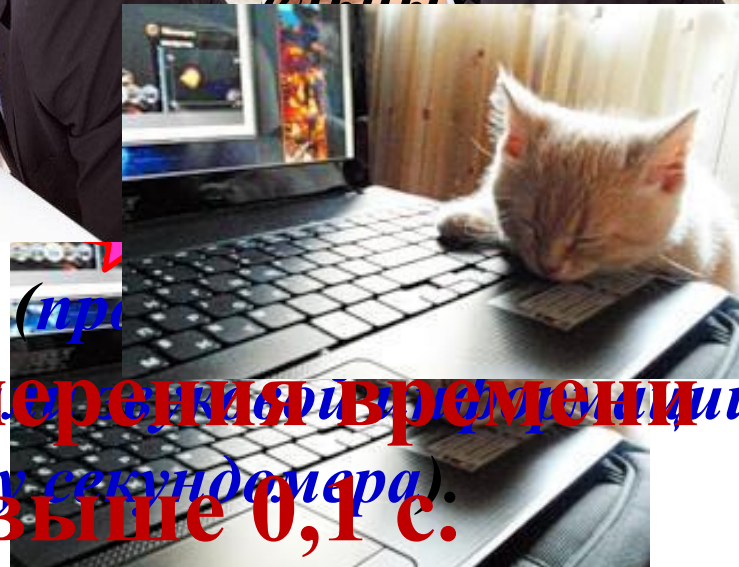
или магнитных датчиков.

время реакции человека (при нажатии на кнопку секундомера).

Реально погрешность измерения времени любым секундомером не выше 0,1 с.



не времени, если...



# Вопросы

1. Как понимать выражение «измерить длину с точностью до 1 мм?»
2. Можно ли линейкой, имеющей только сантиметровые деления, измерить длину с точностью до 1 мм?
3. Какова связь точности измерений с ценой деления шкалы прибора?
4. Какова погрешность школьного вольтметра с пределом измерения 6 В и школьного амперметра с пределом измерения 2 А?



# Относительная погрешность

*Определение: относительной погрешностью измерения называется отношение абсолютной погрешности измерения к модулю приближённого значения величины, выраженное в процентах*

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{|a_{np}|} \cdot 100\%$$

**Пример:** Измерим длину стола рулеткой.

$$L = L_{np} \pm \Delta L$$

Абсолютная погрешность  $\Delta L = 0,5\text{см}$

Результат получили следующий  $120,0\text{см} \pm 0,5\text{см}$

**Относительная погрешность**

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{|L_{np}|} \cdot 100\% \quad \varepsilon = \frac{0,5}{120,0} \cdot 100\% \approx 0,4\%$$



**Пример:** Измерим длину стержня ученической чертёжной линейкой

$$l = l_{np} \pm \Delta l$$

Результат получили следующий  $12,5\text{ мм} \pm 1,5\text{ мм}$

Абсолютная погрешность  $\Delta l = 1,5\text{ мм}$

Приближённое значение величины  $l_{np} = 12,5\text{ мм}$

**Относительная погрешность**

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{|l_{np}|} \cdot 100\% \quad \varepsilon = \frac{1,5}{12,5} \cdot 100\% = 12\%$$



# Вопросы

1. Как используя линейку измерить объем?

$$V = abc$$

2. Как используя линейку измерить скорость?

$$v = \frac{s}{t}$$

3. Как используя линейку измерить плотность?

$$\rho = \frac{m}{V}$$

# Погрешность косвенных измерений

**Косвенные измерения** – измерения, при которых невозможно прямое сравнение измеряемой величины с эталоном, но есть однозначная функциональная зависимость измеряемой величины от других величин, измеряемых прямо.

$$A=f(B,C,D\dots)$$

# Относительная погрешность

*Для вычисления погрешности косвенных измерений необходимо сначала найти относительную погрешность.*

*Для разных функциональных зависимостей вычисляемой величины от измеряемых относительную погрешность находят по разному.*

Пусть измеряемая величина  $A$  зависит от реально измеряемых прямо величин как:

$$A = B^m C^n D^k$$

Тогда, для большинства случаев относительная погрешность:

$$\varepsilon = \sqrt{m\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + n\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + k\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2}$$

# Абсолютная погрешность

*По относительной погрешности косвенных измерений находят абсолютную*

$$\Delta A = \varepsilon_A \cdot A$$

Можно рассчитать относительную погрешность косвенного измерения упрощенно используя таблицу

Вид функции	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$A = a + b$	$\Delta A = \Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}$
$A = a - b$	$\Delta A = \Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a - b}$
$A = ab$	$\Delta A = a\Delta b \pm b\Delta a$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$A = a^n$	$\Delta A = na^{n-1}\Delta a$	$\frac{\Delta A}{A} = n \frac{\Delta a}{a}$
$A = \sqrt[n]{a}$	$\Delta A = \frac{\Delta a}{nA^{n-1}}$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{n} \frac{\Delta a}{a}$
$A = \frac{a}{b}$	$\Delta A = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2}$	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

# Примеры

1. Вычислим погрешность скорости:

$$v = \frac{S}{t}$$

$$\varepsilon_v = \sqrt{\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

$$\Delta v = \varepsilon_v \cdot v$$

2. Вычислим погрешность ускорения:

$$S = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2S}{t^2}$$

$$\varepsilon_a = \sqrt{\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

*(обратить внимание на цифру 2 – степень времени в формуле ускорения)*

$$\Delta a = \varepsilon_a \cdot a$$

3. Вычислим погрешность кинетической энергии:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(\frac{S}{t}\right)^2}{2}$$

$$\varepsilon_E = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

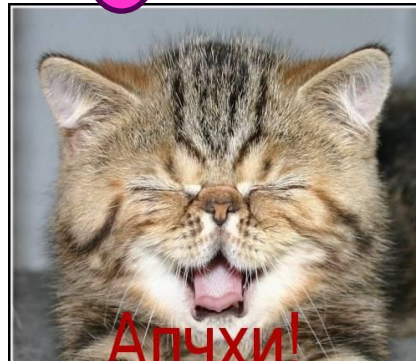
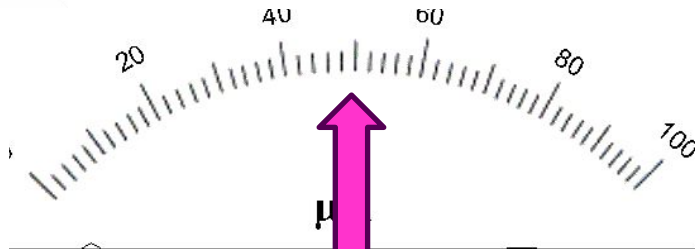
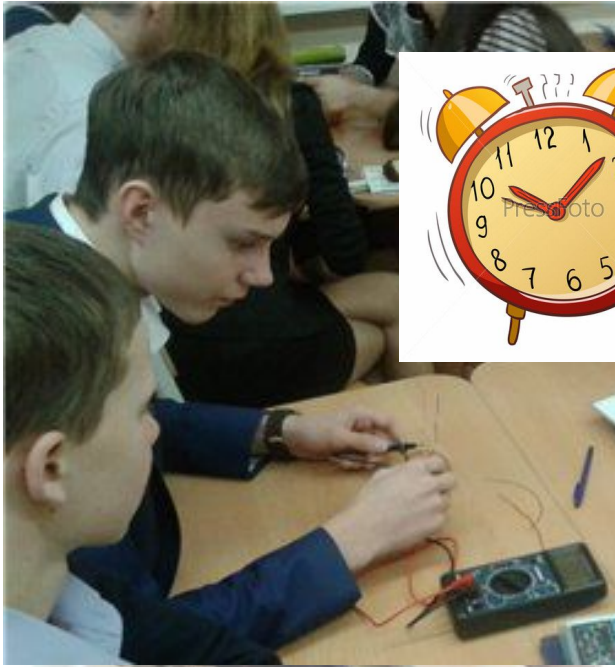
*(обратить внимание на то, что скорость необходимо сначала представить в виде прямо измеряемых величин и на цифру 2 – степень перемещения и времени в формуле кинетической энергии)*

$$\Delta E = \varepsilon_E \cdot E$$





# Случайная погрешность



# Учёт случайной погрешности

**Случайная** погрешность-погрешность, возникающая в результате действия случайных (чаще всего не известных) факторов.

## **Особенность воздействия:**

- случайность во времени
- случайность по величине
- случайность по направлению.

*То есть один и тот же фактор может отбросить результат измерения на неопределённую величину как в «+», так и в «-». Эта особенность позволяет бороться с данной погрешностью даже не зная истинных её источников.*

# Метод устранения

- многократное проведение эксперимента с последующим усреднением результата.

*Случайная погрешность, отбрасывая результат в разные стороны начинает самоуничтожаться. Может показаться, что таким образом можно вообще избавиться от случайной погрешности, но это не верно. В частности, **для этого потребуется бесконечное число измерений.***

Для учёта оставшейся случайной погрешности применяют целый ряд достаточно сложный вычислений. (см. список литературы).

**Проводить многократные измерения с последующим усреднением результата допустимо только для воспроизводимого эксперимента, т.е. эксперимента, начальные условия которого можно повторить точно.**

# Алгоритм нахождения случайной погрешности

1. Измерить величину  $A$   $n$  раз, получая результаты  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_n$
2. Наилучшее приближение измеряемой величины  $A$  – среднее статистическое результатов измерений:  $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$
3. Погрешность каждого конкретного измерения:  $(A - \bar{a})$

$$S_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}} \quad \text{среднее значение случайной погрешности}$$

*Поскольку данное значение является средним, для гарантированного попадания каждого следующего измерения в интервал погрешности, величину  $S_0$  надо умножить на специально вычисляемый коэффициент – коэффициент Стьюдента. Упрощённый вариант действий (без поиска коэффициента Стьюдента): **принять его = 3**. Тогда для 10 – кратного измерения одной величины вероятность попадания следующего измерения в интервал погрешности - 99%, что неплохо 😊*

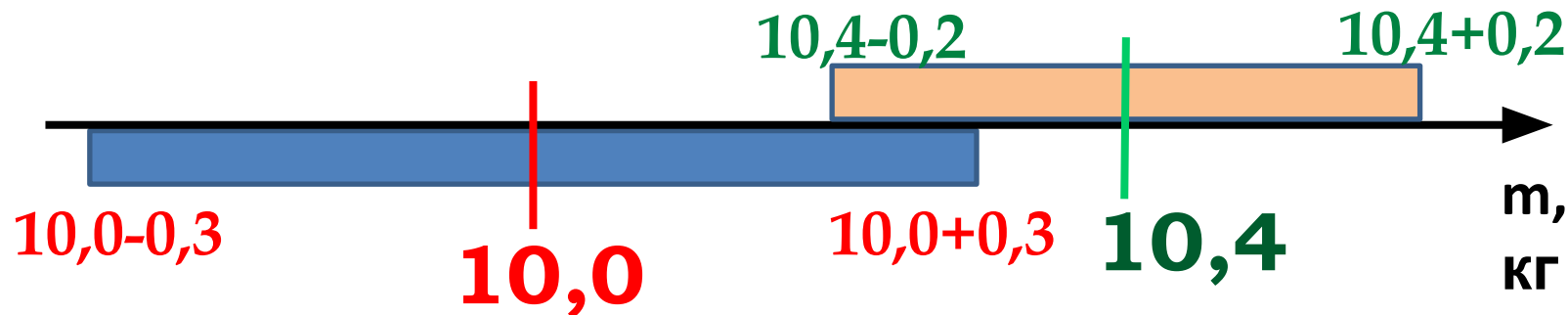
4. Записать результат эксперимента:  $A = \bar{a} \pm 3S_0$

# Графические методы отображения погрешностей

Часто при проведении лабораторного исследования приходится сравнивать различные величины. Это могут быть два или более результата эксперимента или сравнение полученной величины с табличной. Наиболее наглядно такое сравнение провести с помощью **линейки сравнения**.

Для этого создаётся координатная ось с размерностью измеряемой величины и на неё в масштабе наносятся сравниваемые величины с их погрешностями.

При этом, если интервалы погрешностей перекрываются, то величины можно считать равными, если нет – то нет.



# График

установление зависимости между исследуемыми величинами.

**Построение графика в программе VS Excel** (или подобные ей программы—электронные таблицы из других офисных пакетов)

1. На график наносятся точки измеренных значений
2. Выводят интервалы погрешностей по соответствующим осям.
3. Полезно построить **линию тренда**. Она проводится программой автоматически и наилучшим образом описывает зависимость между данными величинами.

*Примером правильно построенного графика может служить график, приведённый на следующем слайде (зависимости температуры жидкости от времени).*

При построении графика в MS Excel после ввода данных эксперимента в таблицу, нужно выделить оба столбца таблицы и выбрать построение не графика, а **точечной диаграммы**.

*В противном случае построится зависимость не «второго столбца» от «первого», а две зависимости столбцов от номера ячейки.*

# Пример

Зависимость температуры воды массой 100г от времени в стандартном калориметре

