

# ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

---

НАУМОВА ИРИНА  
ВЛАДИМИРОВНА

## ПЛАН ЛЕКЦИИ

---

1. Цель, задачи и методы финансовой математики
2. Метод простого процента
3. Метод сложного процента
4. Анализ акций
5. Анализ облигаций
6. Модель оценки стоимости облигаций

## Цель, задачи и методы

---

- **Цель и задача**  
**финансовой математики**  
— анализ инвестиционных  
проектов
- **Методы финансовой**  
**математики** — метод  
простого и сложного  
процента

## ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

---

- **Простой процент** — это начисление процента только на первоначально инвестированную сумму
  
- Определим будущую стоимость инвестиции:

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

---

- ▣ Пусть денежная сумма  $PV$  размещаем под годовую процентную ставку  $r$ .  
Определим будущую стоимость:

$$FV_1 = PV + PV \cdot r$$

$$FV_2 = FV_1 + PV \cdot r$$

$$FV_2 = PV + PV \cdot r + PV \cdot r$$

$$FV_2 = PV(1 + r \cdot 2)$$

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

$$FV = PV(1 + r \cdot n)$$

□ Обозначения

$PV$  - настоящая стоимость

$FV$  - будущая стоимость

$r$  - годовая процентная ставка,  
выраженная в долях единицы

$n$  - период вклада под процент  $r$

$t < 1 \text{ года}$

$$FV = PV \left( 1 + r \cdot \frac{t}{\text{база}} \right)$$

## ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ▣ Плавающая процентная ставка
- ▣ Размещаем сумму  $PV$ , первый год под процент  $r_1$ , второй год под процент  $r_2$ .

$$FV_1 = PV + PV \cdot r_1$$

$$FV_2 = FV_1 + PV \cdot r_2$$

$$FV_2 = PV + PV \cdot r_1 + PV \cdot r_2$$

$$FV_2 = PV(1 + r_1 + r_2)$$

## ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

---

$$FV = PV(1 + r \cdot n)$$

$t < 1 \text{ года}$

$$FV = PV \left( 1 + r \cdot \frac{t}{\text{база}} \right)$$

$$FV = PV(1 + r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$



# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.1.1
- Инвестор вложил 15 000 руб. сроком на 5 лет на депозит в банке, который начисляет 12% по вкладу. В конце каждого года инвестор снимает со счета начисленную сумму очередного процента. Какую величину составит общая сумма вклада и начисленных в течение 5 лет процентных платежей?

$$FV = 15000(1 + 0,12 \cdot 5)$$

- Ответ: В. 24 000 руб.

## ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.4
- Вкладчик положил в банк 10 000 руб. в начале 2010 г. Банк начислял с периодичностью раз в полгода простые проценты по следующим процентным ставкам: 2010 г. - 10% годовых; 2011 г. - 11% годовых; 2012 г. - 12% годовых. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите, какая сумма была на его счете в середине 2012г.

$$FV = 10000(1 + 0,1 + 0,11 + 0,12 * 1/2)$$

- Ответ: С. 12 700 руб.

## ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.5
- Вкладчик положил в банк 10 000 руб. в начале 2009 г. Банк выплачивал простые проценты с процентными ставками на уровне: 100% от ставки рефинансирования Банка России в 2009 г., 90% от ставки рефинансирования Банка России – в 2010 г. и 80% от ставки рефинансирования Банка России – в 2011 г. Будем считать, что ставка рефинансирования Банка России была следующей: в 2009 г. - 12% годовых; 2010 г. - 9% годовых; 2011 г. – 8% годовых. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите, какая сумма была на его счете в начале 2012 г.

$$FV = 10000(1 + 1 \cdot 0,12 + 0,9 \cdot 0,09 + 0,8 \cdot 0,08)$$

- Ответ: С. 12 650 руб.

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- **Определим настоящую стоимость инвестиции:**

$$PV = \frac{FV}{1 + r \cdot n}$$

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + r \cdot \frac{t}{\text{база}}\right)}$$

$$PV = \frac{FV}{(1 + r_1 + r_2 + \dots + r_n)}$$

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

---

- ЗАДАЧА 4.2.6
- По окончании 2-го года на счете клиента банка находится сумма 13 200 руб. Начисление процентов в банке происходило по схеме простого процента в конце каждого квартала по ставке 16% годовых. Рассчитайте первоначальную сумму вклада.

$$PV = \frac{13200}{1 + 0,16 \cdot 2}$$

- Ответ: В. 10 000 руб.

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.9
- Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале 2010 г. Банк в конце каждого года начислял простые проценты по следующим процентным ставкам: 2010 г. - 12% годовых; 2011 г. - 10% годовых; 2012 г. - 8% годовых. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите, какую сумму он положил в банк, если на его счете в середине 2012 г. было 36600 руб.

$$PV = \frac{36600}{1 + 0,12 + 0,1}$$

- Ответ: В. 30 000 руб.

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.11
- Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале 2009 г. Банк начислял с периодичностью раз в полгода простые проценты по следующим годовым процентным ставкам: 2009 г. - 90% от ставки рефинансирования Банка России; 2010 г. - 80% от ставки рефинансирования Банка России; 2011 г. - 70% от ставки рефинансирования Банка России. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите, какую сумму он положил в банк, если на его счете в середине 2010 г. было 28 600 руб. Для ставки Банка России принять следующие значения: 2009 г. - 12%; 2010 г. - 9%; 2011 г. - 8%.

$$PV = \frac{29125}{1 + 0,9 \cdot 0,13 + 0,8 \cdot 0,12 \cdot \frac{1}{2}}$$

- Ответ: С. 25 000 руб.

## ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.14
- Инвестор открывает в банке депозит на 90 дней под 10% годовых и хотел бы в конце периода получить по депозиту 10 тыс.руб. Какую сумму ему следует разместить сегодня на счете? База 365 дней.

$$PV = \frac{10000}{1 + 0,1 \cdot \frac{90}{365}}$$

- Ответ: А. 9 759,36 руб.



# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ▣ Определим доходность и период инвестиции:

$$r = \left( \frac{FV}{PV} - 1 \right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$n = \left( \frac{FV}{PV} - 1 \right) \cdot \frac{1}{r}$$

$$r = \left( \frac{FV}{PV} - 1 \right) \cdot \frac{\text{база}}{t}$$

$$t = \left( \frac{FV}{PV} - 1 \right) \cdot \frac{\text{база}}{r}$$

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.15
- Инвестор открывает в банке депозит под 10% годовых (простой процент) на сумму 10 тыс. руб. и хотел бы получить по счету 10,5 тыс. руб. На сколько дней следует открыть депозит? База 360 дней.

$$t = \left( \frac{10500}{10000} - 1 \right) \cdot \frac{360}{0,1}$$

- Ответ: А. 180 дней.

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.16
- Вкладчик разместил на счете в банке 10000 руб. и получил через 180 дней 10540 руб. По счету начислялся простой процент. Определить доходность его операции в расчете на год на основе простого процента. Финансовый год равен 365 дням.

$$r = \left( \frac{10540}{10000} - 1 \right) \cdot \frac{365}{180}$$

- Ответ: С. 10,95% годовых.

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.20
- Вкладчик положил в банк 20 000 руб. в начале 2009г. Банк начислял простые проценты в размере 90% от ставки рефинансирования Банка России в течение первого года, 80% от ставки рефинансирования Банка России – в течение второго года и 70% – в течение третьего года. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета и ставка рефинансирования не менялась в течение трех лет, определите ставку рефинансирования Банка России, если в начале третьего года на счете вкладчика было 24 320 руб.

$$24320 = 20000(1 + 0,9 \cdot x + 0,8 \cdot x + 0,7 \cdot x)$$

$$x = \frac{\frac{24320}{20000} - 1}{0,9 + 0,8 + 0,7}$$

- Ответ: С. 9%.

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.21
- Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале года. Банк начислял простые проценты, причем процентная ставка за второй год была в полтора раза выше, чем за первый, а за третий год – составляла 80% от второго. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите процентную ставку за первый год, если в начале четвертого года на счете вкладчика была сумма, в 3 раза превышающая первоначальную.

$$r_1 = x \quad r_2 = 1,5 \cdot x \quad r_3 = 0,8 \cdot 1,5 \cdot x$$

$$3PV = PV(1 + x + 1,5 \cdot x + 0,8 \cdot 1,5 \cdot x)$$

- Ответ: В. 54%.

$$x = \frac{3-1}{1+1,5+0,8 \cdot 1,5}$$

# ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.22
- Вкладчик положил в банк некоторую сумму в начале года. Банк начислял простые проценты, причем процентная ставка за второй год была в полтора раза выше, чем за первый. В предположении, что вкладчик не снимал денег со своего счета, определите процентную ставку за второй год, если в начале третьего года на счете вкладчика была сумма, в 2 раза превышающая первоначальную.

$$r_2 = x \quad r_1 = \frac{x}{1,5}$$

$$2PV = PV \left( 1 + \frac{x}{1,5} + x \right)$$

- Ответ: С. 60%.

$$x = \frac{2-1}{\frac{1}{1,5}+1}$$

---

# ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть 2

НАУМОВА ИРИНА

2013

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

---

- **Сложный процент** — это процент, который начисляется на первоначально инвестированную сумму и начисленные в предыдущие периоды проценты
- Определим будущую стоимость инвестиции



## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

---

- Пусть денежная сумма  $PV$  размещаем под годовую процентную ставку  $r$ .

$$FV_1 = PV + PV \cdot r$$

$$FV_2 = FV_1 + FV_1 \cdot r$$

$$FV_2 = PV + PV \cdot r + PV \cdot r + PV \cdot r^2$$

$$FV_2 = PV(1 + 2r + r^2)$$

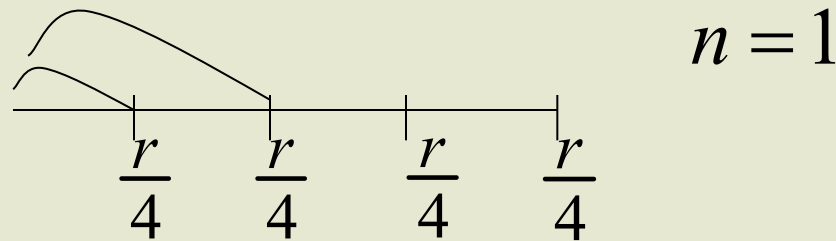
$$FV_2 = PV(1 + r)^2$$

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

$$FV = PV(1 + r)^n$$

процесс наращивания

$m$  — число раз начисления  
процента за один год



$$FV = PV \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^{n \cdot m}$$

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- Плавающая процентная ставка
- Размещаем сумму  $PV$ , первый год под процент  $r_1$ , второй год под процент  $r_2$ .

$$FV_1 = PV + PV \cdot r_1$$

$$FV_2 = FV_1 + FV_1 \cdot r_2$$

$$FV_2 = PV + PV \cdot r_1 + PV \cdot r_2 + PV \cdot r_1 \cdot r_2$$

$$FV_2 = PV(1 + r_1) \cdot (1 + r_2)$$

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

---

$$FV = PV(1 + r)^n$$

$$FV = PV \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^{n \cdot m}$$

$$FV = PV(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)$$

Будущая стоимость инвестиции  
возрастает при:

- ✓увеличении срока;
- ✓возрастании годовой процентной ставки;
- ✓росте частоты начисления процентов.

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

- 4.1.23
- В формуле  $FV = PV * (1 + r)^n$  выражение  $(1 + r)^n$  называется...
- Ответ: А. Коэффициентом наращения
  
- 4.1.24
- Формула  $FV = PV * (1 + r)^n$  используется при вычислении...
- Ответ: D. Будущей стоимости при начислении сложного процента
  
- 4.1.25
- В формуле  $FV = PV * (1 + r)^n$  переменная PV называется...
- Ответ: B. Настоящей стоимостью
  
- 4.1.26
- В формуле  $FV = PV * (1 + r)^n$  величина FV называется...
- Ответ: B. Будущей стоимостью

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n}$$

процесс дисконтирования

- 4.1.27
- В формуле  $PV = FV / (1 + r)^n$  величина  $1 / (1 + r)^n$  называется...
- Ответ: D. Коэффициентом дисконтирования
  
- 4.1.28
- В формуле  $FV = PV * (1 + r)^n$  величина  $r$  называется...
- Ответ: A. Ставкой процента, выраженной в долях единицы, под которую размещается текущая стоимость
  
- 4.1.29
- В формуле  $FV = PV * (1 + r)^n$  величина  $n$  называется...
- Ответ: B. Числом периодов начисления процентов по ставке  $r$

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.1.31
- Вкладчик положил в банк 20 000 руб. Банк выплачивает 12% годовых. Проценты сложные. Какая сумма будет на счете у вкладчика через три года?

$$FV = 20000(1 + 0,12)^3$$

$$0,12 * = =$$

*(Handwritten diagram showing two arcs connecting 0,12 to \*0,12, illustrating the compounding process)*

- Ответ: С. 28 099 руб.

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ▣ ЗАДАЧА 4.1.32
- ▣ Вкладчик размещает в банке 2 000 руб. под 8% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов на счете ежеквартально. Какая сумма денег получится на счете через 3 года?

$$FV = 2000 \left( 1 + \frac{0,08}{4} \right)^{3 \cdot 4}$$

- ▣ Ответ: А. 2 536,48.



## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

---

- ЗАДАЧА 4.1.35
- Вкладчик положил в банк 10 000 руб. Банк выплачивает сложные проценты. Какая сумма будет на счете у вкладчика через два года, если процентная ставка за первый год составляет 20%, а за второй - 30%?

$$FV = 10000(1 + 0,2) \cdot (1 + 0,3)$$

- Ответ: С. 15 600 руб.

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.37
- В начале года вкладчик размещает в банке 2 000 руб. под 8% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов в конце каждого года. В течение года по счету начисляется простой процент. Какая сумма денег получится на счете через 3 года и 90 дней? База 365 дней.

3 года

90 дней

$$FV = 2000(1 + 0,08)^3 \cdot \left( 1 + 0,08 \cdot \frac{90}{365} \right)$$

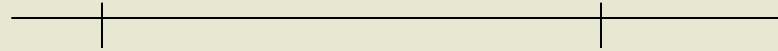
- Ответ: D 2 569,12.

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.38
- За 30 дней до окончания года вкладчик размещает в банке 2 000 руб. под 8% годовых. Банк осуществляет капитализацию процентов в конце каждого года. В течение года по счету начисляется простой процент. Какая сумма денег получится на счете через 3 года и 120 дней? База 365 дней.

30 дней 3 года

90 дней



$$FV = 2000 \cdot \left(1 + 0,08 \cdot \frac{30}{365}\right) \cdot (1 + 0,08)^3 \cdot \left(1 + 0,08 \cdot \frac{90}{365}\right)$$

- Ответ: А. 2 586,02 руб.

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.39
- Инвестор разместил на депозит в банке 1000руб. сроком на 5 лет. Банк начисляет 10% годовых раз в год. Два с половиной года инвестор был в командировке за границей. Вернувшись из командировки, инвестор получил процентные платежи, начисленные ему за три предшествующие года, и далее получал процентные платежи в конце каждого года. Суммарно инвестор получил следующую сумму процентных платежей:

$$\begin{array}{r} 1000 \cdot (1 + 0,1)^3 = 13310 \longrightarrow 3310 \\ 1000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 2) = 12000 \longrightarrow 2000 \\ \hline 5310 \text{ руб.} \end{array}$$

- Ответ: В. 5 310 руб.

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ▣ Определим настоящую стоимость инвестиции:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n}$$

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}}$$

$$PV = \frac{FV}{(1+r_1) \cdot (1+r_2) \cdot \dots \cdot (1+r_n)}$$

Денежную сумму, которую необходимо инвестировать сегодня, чтобы через определенное время получить данную будущую стоимость, называют **приведенной**

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

---

- ▣ ЗАДАЧА 4.1.40
- ▣ Банк выплачивает 12% годовых. Проценты сложные. Какую минимальную сумму требуется разместить вкладчику в банке, чтобы через 2 года у него было не менее 10 000 руб.?

$$PV = \frac{10000}{(1 + 0,12)^2}$$

- ▣ Ответ: С. 7 972 руб.

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ▣ ЗАДАЧА 4.2.41
- ▣ Инвестор открывает в банке депозит на два года под 10% годовых и хотел бы в конце периода получить по депозиту 10 тыс.руб. Банк начисляет проценты ежеквартально. Какую сумму ему следует разместить сегодня на счете.

$$PV = \frac{10000}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{2 \cdot 4}}$$

- ▣ Ответ: В. 8 207,47 руб.

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.47
- Банк выплатил за первый год проценты по ставке Сбербанка, а за второй год – на 10% ниже, чем в Сбербанке. Проценты сложные. Какую минимальную сумму требуется разместить вкладчику в банке, чтобы через 2 года его вклад был не менее 12 000 руб., если ставка Сбербанка все два года была равна 12% годовых?

$$100\% - 10\% = 90\%$$

$$PV = \frac{12000}{(1 + 0,12) \cdot (1 + 0,9 \cdot 0,12)}$$

- Ответ: А. 9 670 руб.



## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.49
- Банк выплатил за первый год проценты по ставке Сбербанка, а за второй год – на 20% выше, чем в Сбербанке. Проценты сложные. Какую минимальную сумму требуется разместить вкладчику в банке, чтобы через 2 года его вклад был не менее 21 000 руб., если ставка Сбербанка все два года была равна 12% годовых?

$$100\% + 20\% = 120\%$$

$$PV = \frac{21000}{(1 + 0,12) \cdot (1 + 1,2 \cdot 0,12)}$$

- Ответ: В. 16 390 руб.

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ▣ **Определение периода начисления процентов**

$$FV = PV(1 + r)^n$$

$$\frac{FV}{PV} = (1 + r)^n$$

$$\ln \frac{FV}{PV} = \ln(1 + r)^n$$

$$n = \frac{\ln \frac{FV}{PV}}{\ln(1 + r)}$$

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.1.51
- Банк выплачивает сложные проценты. Вкладчик разместил в банке 15 000 руб. Сколько лет потребуется вкладчику для того, чтобы его вклад достиг 41 160 руб., если банк выплачивает 40% годовых?

$$41160 = 15000(1 + 0,4)^n$$

$$2,744 = 1,4^n \quad n = 3$$

- Ответ: D. 3 года.

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ▣ **Определение номинальной процентной ставки**

$$r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

$$r = m \cdot \left( \sqrt[n \cdot m]{\frac{FV}{PV}} - 1 \right)$$

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.54
- Инвестор разместил деньги на банковском депозите на восемь лет. Капитализация процентов осуществлялась ежегодно. Какую ставку по депозиту начислял банк, если в конце периода капитал вкладчика увеличился в четыре раза?

$$r = \sqrt[8]{\frac{4 \cdot PV}{PV}} - 1 = \sqrt[8]{4} - 1$$

$$\sqrt[8]{\quad} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{\quad}}}$$

- Ответ: А. 18,92%.

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

---

- ЗАДАЧА 4.1.57
- Банк выплачивает сложные проценты. Какую минимальную процентную ставку должен обеспечить банк для того, чтобы вкладчик удвоил свои средства за четыре года?

$$r = \sqrt[4]{2} - 1$$

- Ответ: В. 18,92%

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.61
- Банк А выплачивает сложные проценты раз в полгода. Банк Б выплачивает 12% годовых по простой процентной ставке. Вкладчик разместил по 10 000 руб. в банках А и Б сроком на 2 года. Какую полугодовую процентную ставку должен начислять банк А, чтобы у вкладчика по итогам 2-х лет суммы в банках были одинаковы?

$$\begin{array}{ccc} & \text{А} & \text{Б} \\ 10000 \left( 1 + \frac{r}{2} \right)^{2 \cdot 2} & = & 10000(1 + 0,12 \cdot 2) \end{array}$$

$$\frac{r}{2} = \sqrt[2 \cdot 2]{1 + 0,12 \cdot 2} - 1$$

- Ответ: В. 5,53%

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.62
- Банк А выплачивает сложные проценты раз в полгода. Банк Б выплачивает 15% годовых по простой процентной ставке. Вкладчик разместил по 10 000 руб. в банках А и Б сроком на 2 года. Какую полугодовую процентную ставку должен начислять банк А, чтобы у вкладчика по итогам 2-х лет сумма вклада в банке А была на 10% больше, чем в банке Б?

$$\begin{array}{ccc} & \text{А} & \text{Б} \\ 10000 \left( 1 + \frac{r}{2} \right)^{2 \cdot 2} & = & 10000(1 + 0,15 \cdot 2) \cdot 1,1 \\ \frac{r}{2} & = & \sqrt[2 \cdot 2]{(1 + 0,15 \cdot 2) \cdot 1,1} - 1 \end{array}$$

- Ответ: D. 9,35%



# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ▣ **Эффективный (реальный) процент** —  
— это процент, который получается по итогам года при начислении сложного процента в рамках года
- ✓  $n=1$
- ✓ условие эквивалентности процентных ставок

$$FV = PV \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^m \quad \Bigg| \quad FV = PV (1 + r_{eff})$$

$$\frac{FV}{PV} = \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^m \quad \Bigg| \quad \frac{FV}{PV} = (1 + r_{eff})$$

$$\left( 1 + \frac{r}{m} \right)^m = (1 + r_{eff})$$

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- Эффективный (реальный) процент через номинальную процентную ставку определяется как:

$$r_{eff} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

$$r = m \left( \sqrt[m]{1 + r_{eff}} - 1 \right)$$

# СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.66
- По вкладу в банке ежеквартально начисляется 3% от суммы вклада. Найдите годовую ставку процента с учетом ежеквартального реинвестирования дохода.

$$r = 0,3\% \cdot 4 = 12\%$$

$$r_{eff} = \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4$$

- Ответ: С. 12,6%

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.67
- Банк начисляет сложные проценты по ставке равной одному проценту в месяц. Найдите годовую ставку процента с учетом ежемесячного реинвестирования дохода?

$$r = 0,1\% \cdot 12 = 12\%$$

$$r_{eff} = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1268$$

- Ответ: А. 12,7%

## СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕНТ

- ЗАДАЧА 4.2.68
- Банк производит ежеквартальное начисление дохода по вкладу. Какой должна быть ежеквартальная процентная ставка, чтобы доходность по вкладу с учетом ежеквартального реинвестирования дохода составила 16% годовых?

$$\frac{r}{4} = \sqrt[4]{1 + 0,16} - 1$$

- Ответ: В. 3,78%

---

# ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

## Часть 3

НАУМОВА ИРИНА

2013

## АНАЛИЗ АКЦИЙ

- Акции относятся к долевым ценным бумагам – доходы, получаемые владельцем акций, непосредственно связаны с доходами предприятия. Доходы по акциям, как правило, могут быть выше, чем доходы по государственным облигациям, однако акции считаются более рискованным инструментом. Доходы по акциям трудно прогнозируемы.
- Доходы по акциям поступают в виде дивидендов. Кроме того, владелец акции может получить доход за счет изменения ее рыночной стоимости (если эта стоимость вырастет за период владения).

## АНАЛИЗ АКЦИЙ

### □ Инвестиционные качества акций:

Дивидендная (текущая) доходность

$$r_d = \frac{Div}{PV}$$

□ ЗАДАЧА 4.1.156

□ Компания выплачивает ежеквартально дивиденд в размере 50 ед. на одну акцию, текущая рыночная стоимость которой составляет 3 000 ед. Текущая (дивидендная) доходность акции составляет (в процентах годовых):

$$r_d = \frac{50 \cdot 4}{3000}$$

□ Ответ: С. 6,67%



## АНАЛИЗ АКЦИЙ

□ **Инвестиционные качества акций:**

Доход на одну акцию

$$EPS = \frac{\text{прибыль} - \text{налог} - \text{div}_{пр}}{\text{кол} - \text{во.об.ак.}}$$

- ЗАДАЧА 4.1.155
- Чистая прибыль компании составила 975 тыс. руб. Уставный капитал компании состоит из 10000 обыкновенных акций и 2 000 привилегированных акций номинальной стоимостью 1000 руб. Дивидендная ставка по привилегированным акциям - 20%. Рассчитайте величину показателя "доход на одну акцию".

$$EPS = \frac{975000 - 0,2 \cdot 1000 \cdot 2000}{10000}$$

- Ответ: В. 57,5 руб

## АНАЛИЗ АКЦИЙ

- **Инвестиционные качества акций:**
- коэффициент P/E – это количество лет при текущем уровне прибыли, которое потребуется компании для того, чтобы окупить цену своих акций.

ЗАДАЧА 4.1.151

- Ответ: С.

$$\frac{PV}{EPS}$$

- коэффициент P/E для компаний одной отрасли приблизительно равны.

- $\frac{PV_A}{EPS_A} \cdot EPS = PV_{\text{акции компании}}$  - справедливая цена

- ЗАДАЧА 4.1.150
- Для каких целей может использоваться показатель P/E?
- Ответ: С.

## АНАЛИЗ ОБЛИГАЦИЙ

- ▣ **Облигация** – срочная долговая ценная бумага, удостоверяющая отношения займа между ее владельцем и эмитентом. Эмитент выступает в роли заемщика, так как обязуется выплачивать определенный доход по облигациям, а покупатель облигации выступает в роли кредитора.
- ▣ Известно достаточно много типов облигаций (глава 2 – виды ценных бумаг), в том числе купонные и бескупонные. Доход инвестора по бескупонной облигации – разность между ее номинальной стоимостью и ценой приобретения. Для купонных облигаций возникает также дополнительный доход от выплат по купонам.

# АНАЛИЗ ОБЛИГАЦИЙ

- ▣ **Инвестиционные качества облигаций:**  
Текущая доходность

$$r_{\tau} = \frac{C}{PV}$$

Используется для сравнения текущей доходности этого вложения с доходностью альтернативных инвестиций с целью принять какое-то инвестиционное решение. Для расчета текущей доходности используется именно текущая рыночная цена, а не цена, по которой облигация была приобретена.

# АНАЛИЗ ОБЛИГАЦИЙ

## ЗАДАЧА 4.1.153

- Текущая доходность облигации с купонной ставкой 10% годовых и рыночной стоимостью 75% равна:

$$r_{\tau} = \frac{10}{75}$$

- Ответ: D. 13,33%

## ЗАДАЧА 4.1.154

- Текущая доходность облигации с купонной ставкой 9,5% годовых и рыночной стоимостью 98% равна:

$$r_{\tau} = \frac{9,5}{98}$$

- Ответ: C. 9.7%

# АНАЛИЗ ОБЛИГАЦИЙ

- **Инвестиционные качества облигаций:**

Простая (или валовая) доходность к погашению

$$r = \frac{N - PV + C \cdot n}{PV \cdot n}$$

- самый простой способ, который предполагает, что полученные в виде купонных платежей доходы не реинвестируются
- ЗАДАЧА 4.1.152
- Доходность к погашению облигации с годовой купонной ставкой 10%, сроком погашения 1 год и рыночной стоимостью 75%, в годовых процентных ставках равна:

$$r = \frac{100 - 75 + 10}{75}$$

- Ответ: D. 46,67%

# АНАЛИЗ ОБЛИГАЦИЙ

- **Инвестиционные качества облигаций:**
- Грязная цена облигации - цена с учетом накопленного купонного дохода
- ЗАДАЧА 4.1.157
- Если рыночная стоимость облигации равна 85% от номинальной стоимости, годовой купон - 10%, то по истечении 3 месяцев с момента выплаты купона, "грязная" цена облигации в процентах от номинальной стоимости составит:

$$10 \cdot \frac{3}{12} = 2,5 \quad 85 + 2,5 = 87,5$$

- ЗАДАЧА 4.1.158
- Рыночная ("чистая") цена облигации составляет 85% номинальной стоимости, "грязная" цена - 92,5%, годовой купон 15%. Рассчитайте срок, прошедший с момента выплаты последнего купона.

$$92,5 - 85 = 7,5$$

- Ответ: D. 6 месяцев

# ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОБЛИГАЦИЙ

- Купонной облигацией называют финансовый инструмент, по которому периодически выплачиваются купонные проценты вплоть до погашения и номинальная стоимость – в момент его погашения

$$\left. \begin{aligned} PV_{(1)} &= \frac{C_1}{1+r} \\ PV_{(2)} &= \frac{C_2}{(1+r)^2} \\ \dots \\ PV_{(n)} &= \frac{C_n + N}{(1+r)^n} \end{aligned} \right\} + \bullet$$



# ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОБЛИГАЦИЙ

- ▣ **Приведенная стоимость облигаций** определяется в виде суммы приведенных стоимостей платежей, образующий этот денежный поток

$$PV = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_n + N}{(1+r)^n}$$

- сумма дисконтированных потоков

# ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОБЛИГАЦИЙ

- ЗАДАЧА 4.2.72
- Рассчитайте рыночную стоимость облигации номиналом 18 000 руб., ставкой выплачиваемого ежегодно купонного дохода 12% и сроком погашения 3 года, если ставка процента по вкладу в банке составляет 14% годовых.

$$PV = \frac{0,12 \cdot 18000}{(1 + 0,14)} + \frac{2160}{(1 + 0,14)^2} + \frac{2160 + 18000}{(1 + 0,14)^3}$$

$$2160 \div 0,14 = [M +] = [M +] = [M +]$$

$$18000 \div 0,14 = [M +] \quad [MR]$$

- Ответ: А. 17 164 руб.

# ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОБЛИГАЦИЙ

- ЗАДАЧА 4.2.71
- Номинал облигации 1 000 руб., купон 10%, выплачивается один раз в год. До погашения облигации 3 года. Определить цену облигации, если ее доходность до погашения должна составить 12%.

Если  $C_{\%} < r$

то  $PV < N$

- Ответ: А. 951,96 руб.

# ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОБЛИГАЦИЙ

- **Бескупонные облигации**
- поскольку доход по облигации выплачивается один раз при погашении, цена определяется только дисконтированием номинала

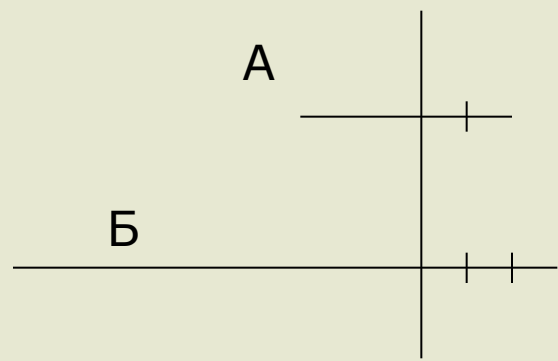
$$PV = \frac{N}{(1+r)^n}$$

- для среднесрочных и долгосрочных бескупонных облигаций

# БЕСКУПОННЫЕ ОБЛИГАЦИЙ

- ЗАДАЧА 4.2.86
- Бескупонная облигация А со сроком обращения 5 лет и бескупонная облигация Б со сроком обращения 10 лет имеют равную номинальную стоимость. Когда до погашения облигации А осталось 2 года, а до погашения облигации Б осталось 3 года, рыночная стоимость облигации А в два раза превысила рыночную стоимость облигации Б. Рассчитайте величину альтернативной годовой доходности.

$$PV_A = 2 \cdot PV_B$$



$$\frac{N}{(1+r)^2} = \frac{N}{(1+r)^3} \cdot 2$$

$$1 = \frac{2}{1+r}$$

- Ответ: С. 100%

**СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!**

---

797-95-60, доб.226  
naumova@ifru.ru