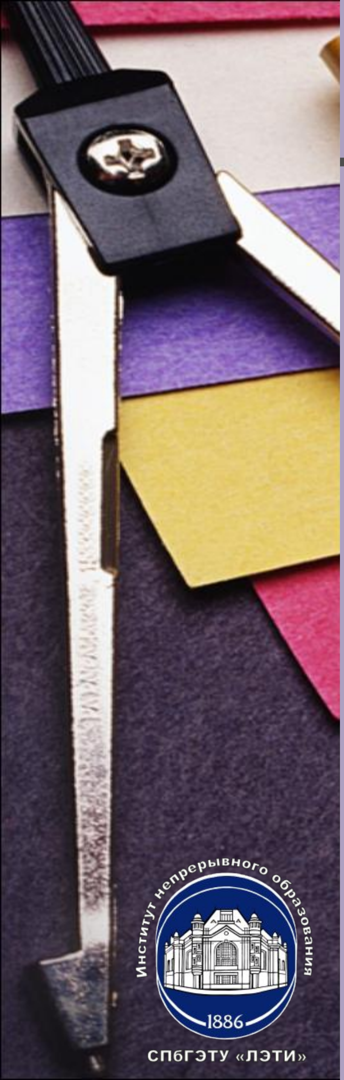
«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Моделирование алгоритмов вейвлет-преобразования. Гармоническое вейвлет-преобразование

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»



ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (1)

Скалярные произведения для вычисления вейвлет-коэффициентов

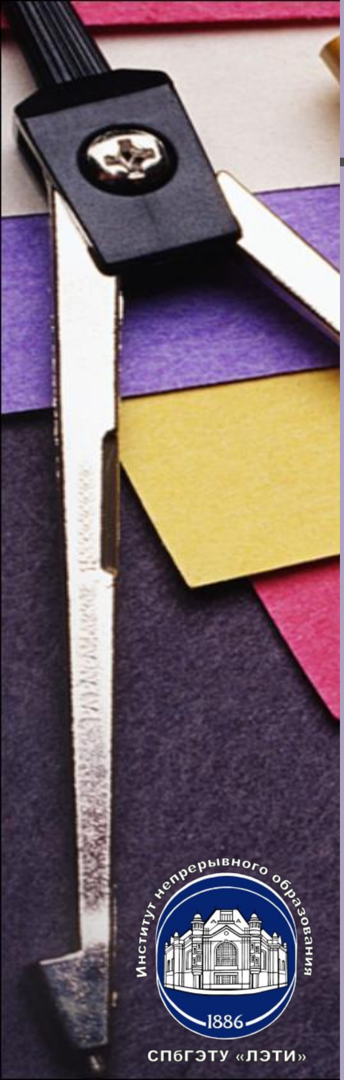
$$a_{j,m} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) w^*(2^j x - m) dx$$

$${}'a_{j,m} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) w(2^j x - m) dx$$

$$a_{\phi,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi^*(x - m) dx$$

$${}'a_{\phi,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi(x - m) dx$$

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (2)



Соотношения для вейвлет-коэффициентов

$${}'a_{j,m} = a^{*}_{j,m}$$

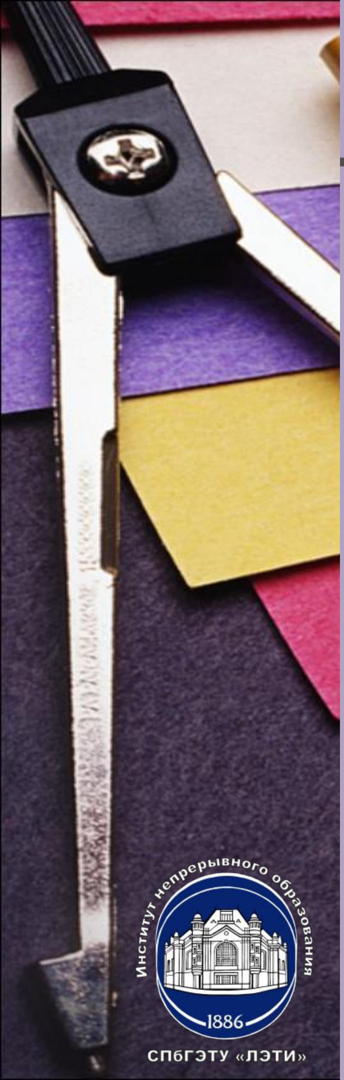
$${}'a_{\phi,m} = a^{*}_{\phi,m}$$

Функциональный ряд для функции *f(x)*

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(a_{\phi,k}\phi(x-m) + \tilde{a}_{\phi,m}\phi^{*}(x-m) \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(a_{j,m} w(2^{j}x-m) + \tilde{a}_{j,m} w^{*}(2^{j}x-m) \right)$$

Коэффициенты для расчета

$${}'a_{j,m}, a_{j,m}, \tilde{a}_{\phi,m}, a_{\phi,m}$$



ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (3)

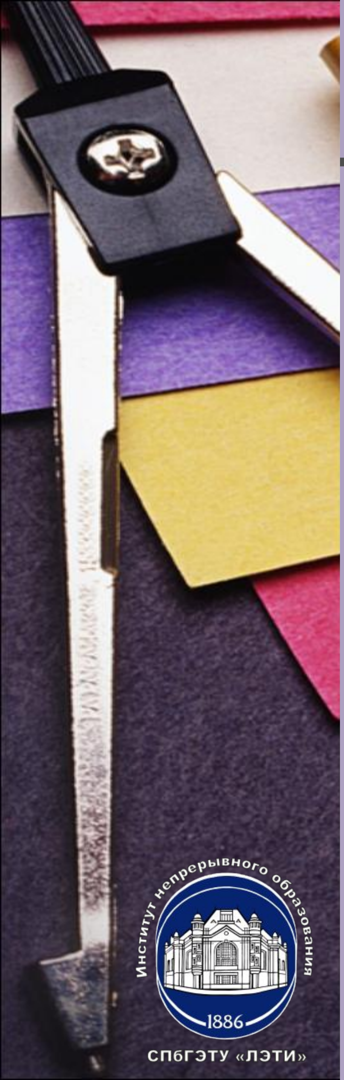
Пример вычисления вейвлет-коэффициентов

$$a_{j,m} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi 2^j}^{4\pi 2^j} d\omega\, e^{i\omega m/2^j}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)e^{-i\omega x} =$$

$$= \int_{2\pi 2^j}^{4\pi 2^j} F(\omega)e^{i\omega m/2^j}\, d\omega$$

$$F_{2^j+s} = 2\pi F(\omega = 2\pi(2^j+s))$$

$$a_{2^j+m} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{2^j+s}e^{i2\pi sm/2^j}, \quad m = 0,\dots,2^j-1$$



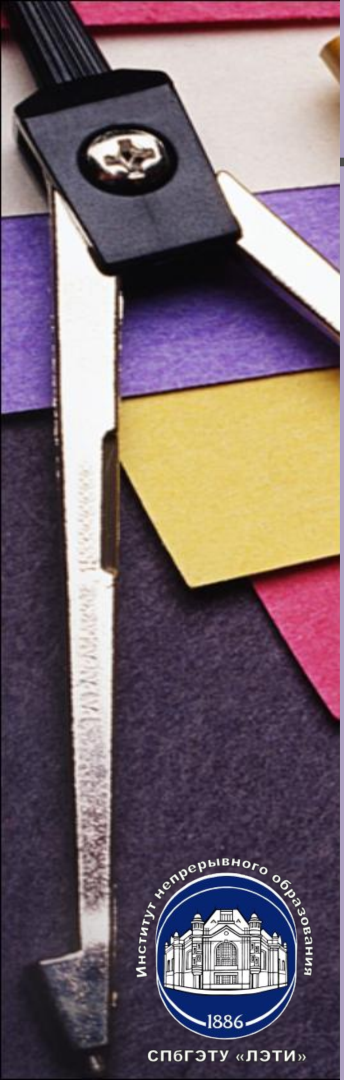
ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (4)

Алгоритм вычисления вейвлет-преобразования

1) исходная непрерывная функция $f(x)$ представляется набором дискретных отсчетов $f(r), r = 0,\dots,N-1$, где N является степенью двойки. В случае необходимости производится дополнение функции необходимым количеством нулей, чтобы ее длина стала равной целой степени двойки;

2) вычисляется ДПФ дискретной функции $f(r)$ с помощью БПФ с целью получения набора комплексных чисел $F_t, t = 0,\dots,N-1$ – Фурье-коэффициентов;

3) набор комплексных чисел F_t разбивается на октавные блоки, длины которых составляют геометрическую прогрессию. Далее октавные блоки F_t обрабатываются на основе ОДПФ для получения требуемых значений коэффициентов $\tilde{a}_{j,m}, a_{j,m}, a_{\phi,m}, \tilde{a}_{\phi,m}$.

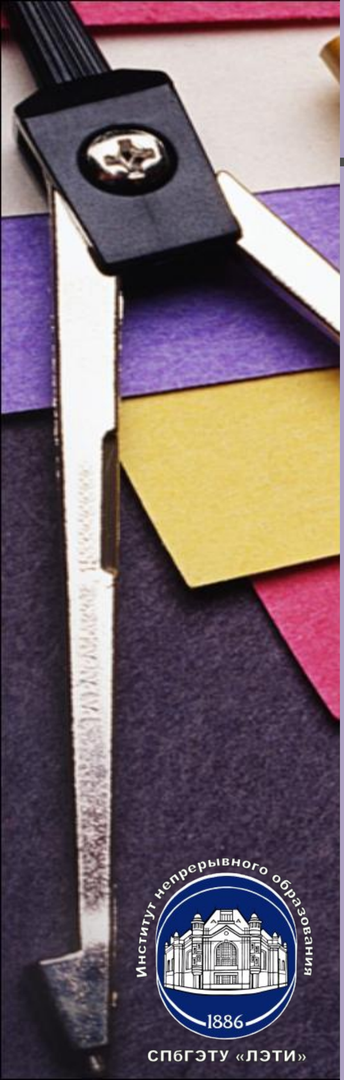


ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (5)

Вычисление вейвлет-коэффициентов *j*-го уровня

$$ {}'a_{2^j+m} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{-(2^j+s)} e^{-i2\pi sm/2^j}, \quad m = 0,\ldots,2^j-1. $$

$$ {}'a_{2^j+m} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{N-(2^j+s)} e^{-i2\pi sm/2^j}, \quad m = 0,\ldots,2^j-1 $$



ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (6)

Распределение вейвлет-коэффициентов по уровням

Номер уровня вейвлет-разложения j	Вейвлет-коэффициенты	Количество вейвлет-коэффициентов
0	$a_0 = F_0$ – всегда вещественное число	1
1	$a_1 = F_1$	1
2	a_2, a_3	2
3	a_4, a_5, a_6, a_7	4
…	…	…
j	$a_{2^j}, \ldots, a_{2^{j+1}-1}$	2^j
…	…	…
$q = (\log_2 N) - 1$	$a_{N/4}, \ldots, a_{N/2-1}$	2^{q-2}

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (7)

Пример вычисления вейвлет-коэффициентов

$$d_{\phi,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \Phi^*(\omega)\, e^{j\omega m}\, e^{-j\omega x}\, d\omega = \int_{0}^{2\pi} \Phi^*(\omega)\, F(\omega)\, e^{i\omega m}\, d\omega$$

Сравнение с быстрым пирамидальным алгоритмом Малла

При значениях N в диапазоне [128; 4096], **выигрыш в количестве операций** при использовании алгоритма двухэтапного ДПФ составляет **более чем в 2 раза**. При дальнейшем увеличении длины сигнала **выигрыш в числе операций начинает медленно уменьшаться.**

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Моделирование алгоритмов вейвлет-преобразования. Гармоническое вейвлет-преобразование

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»