Змістовий модуль 1. Математична логіка

Тема 1.
Математична логіка

§1 Булеві функції. Способи задання булевих функцій. Булеві функції однієї та двох змінних.

§2 Реалізація булевих функцій формулами, пріоритет операцій. Двоїстість булевих функцій.

§3 Закони булевої алгебри.

§4 Диз’юнктивні та кон`юктивні розкладання булевих функцій.

§5 Нормальні форми зображення булевих функцій.

§6 Алгебра Жегалкіна. Лінійні функції. Монотонні функції. Класи булевих функцій.

§7 Мінімізація булевих функцій. Метод карт Карно, метод Мак-Класкі, метод послідовного застосування законів алгебри логіки.

§8 Методи доведення в логіці Буля.

§1 Булеві функції. Способи задання булевих функцій. Булеві функції однієї та двох змінних.

1.1 Булеві змінні та булеві функції

Для зображення інформації в комп’ютерах використовується двійкова система числення, тобто всі операції, які виконує комп’ютер, проводяться на множині {0;1}.

Джорджем Булем у середині XIX ст. було створено апарат двійкової логіки, алгебри, яку називають *булевою*.

Ця алгебра використовується при проектуванні інтелектуальних систем, при роботі з базами даних та інше.

Розглянемо двохелементну множину B={0;1}. Змінні, що приймають значення із множин B, називаються *булевими* або *логічними змінними*. Значення 0 і 1 булевих змінних називаються *булевими константами.*

Булевою функцією *n* незалежних змінних називається
функція

$$y = f(x1, x2, ..., xn),\ n \geq 1,$$

в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множини {0; 1}, тобто

$$x_k \in \{0; 1\},\ k = \overline{1,n}\ ,\ y = \{0, 1\}.$$

Кортеж ($x1, x2, ..., xn$) конкретних значень булевих змінних називається ***набором***, або ***булевим вектором.***

Якщо незалежні змінні розміщено у прямому порядку, тобто у вигляді $x = (x1, x2, ..., xn)$, то набір називається ***прямим***, а якщо їх розміщено у зворотному порядку, тобто у вигляді $x = (xn, xn−1, …, x1)$, то набір називається ***зворотним***.

Областю визначення булевої функції n ***аргументів*** є сукупність 2^n булевих кортежів.

Число різних булевих функцій є скінченне і дорівнює 2^{2^n} .

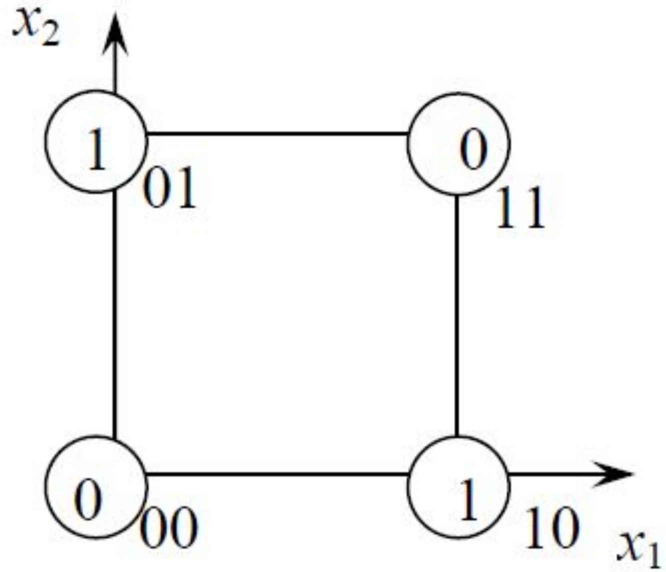
За n = 1 число булевих функцій дорівнює 4, а за n = 2 дорівнює 16.

1.2 Способи задання булевих функцій

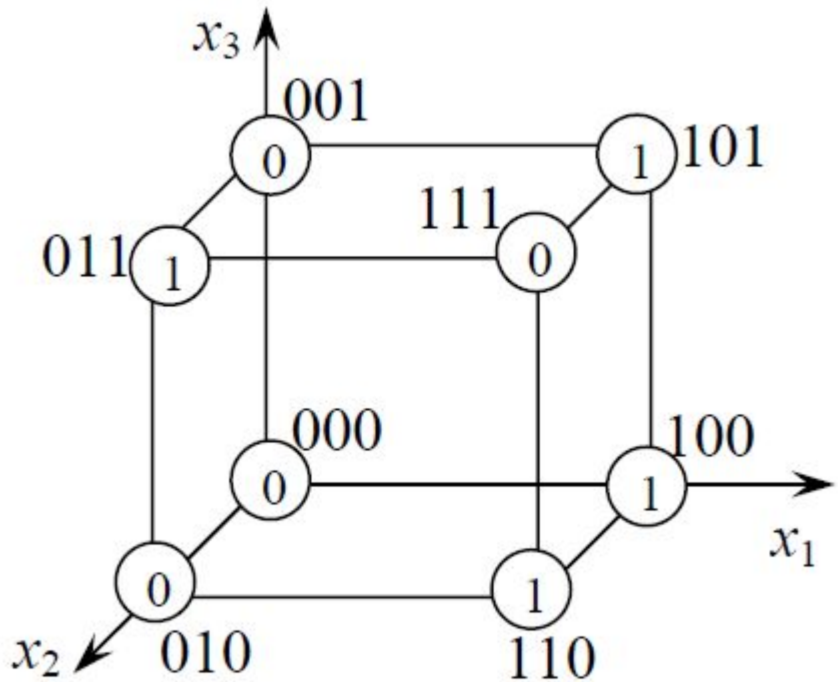
1. ***Табличний.*** Функція задається у вигляді таблиці істинності.

0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

2. ***Графічний.*** Функція задається у вигляді *n*-вимірного одиничного куба, у вершинах якого записано значення функції (у кружечках) та набори значень аргументів



Двовимірний одиничний квадрат



Тривимірний одиничний куб

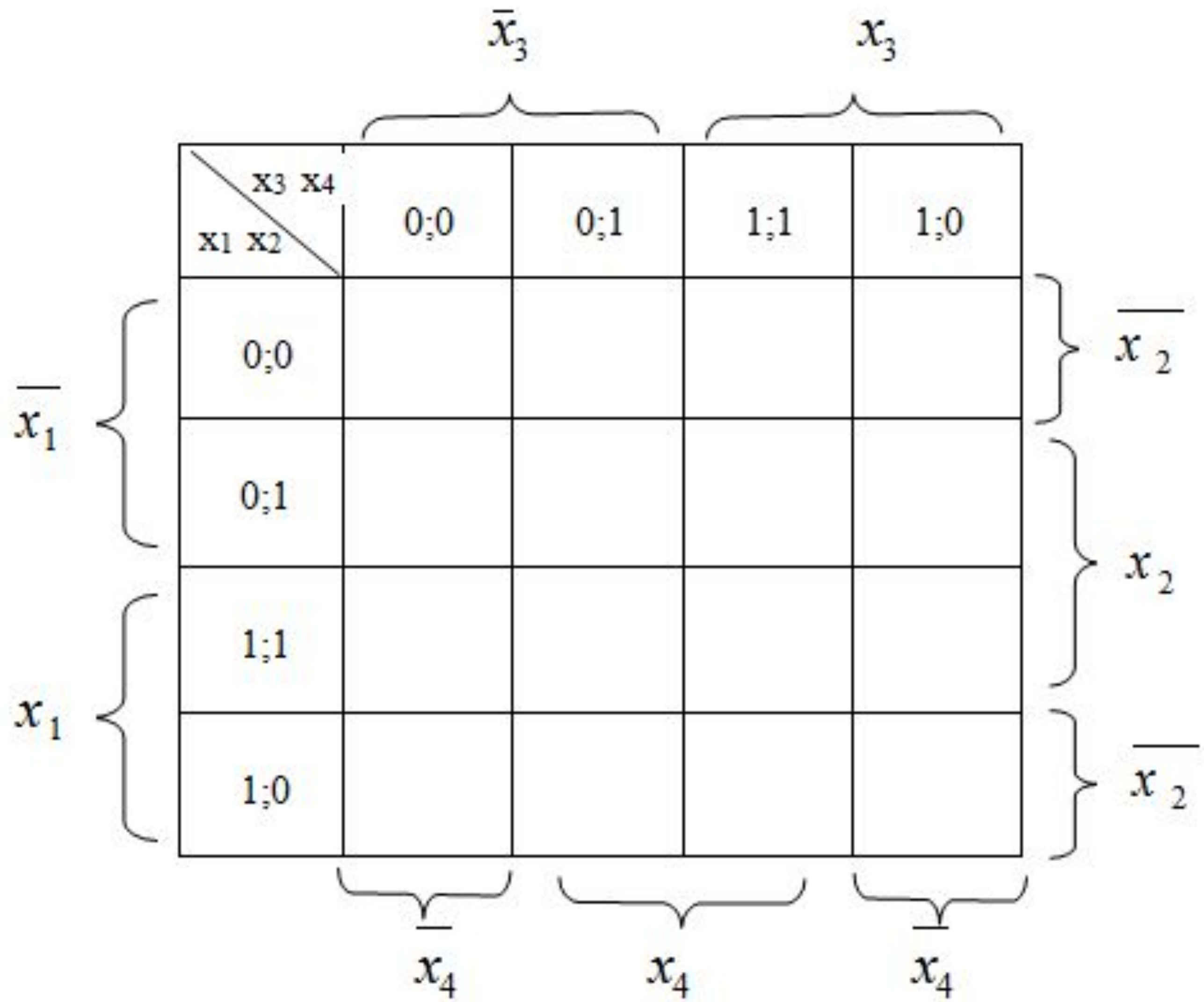
3. ***Координатний* (*картою Карно*).** У клітинках карти записуються значення функції (нулі зазвичай не вписують, їм відповідають порожні клітини).

Карта Карно
для
трьох змінних

		$\bar{x}_3$	x_3	x_3	$\bar{x}_3$
	$x_1 \backslash x_2\,x_3$	0;0	0;1	1;1	1;0
$\overline{x_1}$	0		1		1
x_1	1		1		
		$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$	x_2	x_2

Функція $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ на наборах (0,0,1), (1,0,1), (0,1,0) або $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, x_3), (x_1, \overline{x_2}, x_3), (\overline{x_1}, x_2, \overline{x_3})$.

Карта Карно для чотирьох змінних



4. ***Числовий.*** Функція задається у вигляді цілих десяткових (вісімкових, шістнадцяткових) чисел, які є еквівалентами тих наборів значень аргументів, на яких функція набуває значення 1.

Наприклад, $f = \{2; 4; 5; 7\}$ для трьох змінних $x1, x2, x3$.

Десяткова система числення	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

5. ***Аналітичний.*** Функція задається у вигляді формули. Наприклад: f = $x1+x2 \cdot x3$

$$f = \Bigg(\bigg(\Big(\overline{x_1|x_2|\overline{x_3}|x_4}\Big) \to \Big(\overline{\overline{x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3}}\Big)\bigg) \to \bigg((x_1 \oplus x_2) \vee (\overline{x_1} \oplus x_3) \vee \Big(\overline{\overline{x_1} \oplus \overline{x_4}}\Big)\bigg)\Bigg) \vee \Big(\overline{x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4}\Big)$$

$$f = \Bigg(\bigg(\Big(\overline{x_1 \downarrow x_2 \downarrow \overline{x_3} \downarrow \overline{x_4}}\Big) \to (\overline{x_1} \downarrow x_2)\bigg) \oplus \Big(\overline{x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}}\Big) \oplus \Big(\overline{x_1 \vee \overline{x_2}}\Big)\Bigg) \equiv \Big(\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4}\Big)$$

1.3 Булеві функції однієї та двох змінних

Булеві функції однієї та двох незалежних змінних прийнято називати ***елементарними*** булевими функціями. Вони використовуються як логічні операції над булевими змінними при побудові булевих функцій багатьох незалежних змінних.

Алгебра з такими логічними операціями називається ***алгеброю логіки***, а булеві функції називаються ще ***функціями алгебри логіки***.

Загальне число різних елементарних функцій (логічних операцій) дорівнює загальному числу функцій двох змінних, тобто $2^{2^n} = 16$ (функції однієї змінної є окремим випадком функцій двох змінних).

Булеві функції однієї змінної

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функція φ0 – константи 0. Позначення: $\varphi 0(x) = 0$

Функція φ3 – константи 1. Позначення: $\varphi 3(x) = 1$.

Функція φ1 – тотожність, набуває тих самих значень, що й *x*, тобто $\varphi 1(x) = x$.

Функція $\varphi 2(x)$ – заперечення, набуває протилежних значень *x*. Позначення: $\varphi 2(x) = \bar{x}$

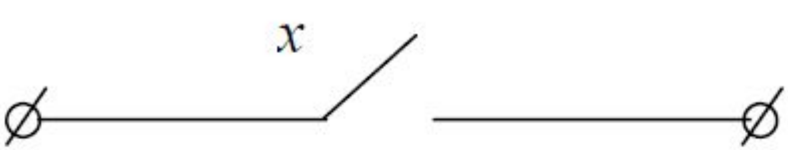
Технічна реалізація функцій однієї змінної

$\varphi_0 = 0$

Константа 0

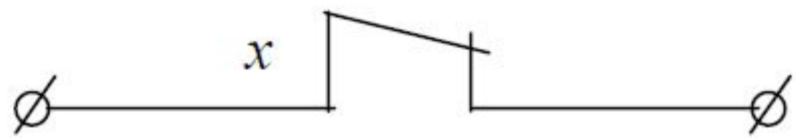
$\varphi_3 = 1$

Константа 1



$\varphi_1 = x$

Повторення



$\varphi_3 = \bar{x}$

Заперечення

Булеві функції двох змінних

Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_0(x, y)$	0	константа 0	константа 0
$f_1(x, y)$	$x \wedge y = xy$	кон'юнкція (логічне «і»)	x і y
$f_2(x, y)$	$x \leftarrow y$	заперечення імплікації	x і не y
$f_3(x, y)$	x	повторення першого аргументу	як x
$f_4(x, y)$	$y \leftarrow x$	заперечення оберненої імплікації	не x і y
$f_5(x, y)$	y	повторення другого аргументу	як y
$f_6(x, y)$	$x \oplus y$	що виключає «або» (сума за модулем 2)	x не як y
$f_7(x, y)$	$x \vee y$	диз'юнкція (логічне «або»)	x або y

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
f_2	0	0	1	0
f_3	0	0	1	1
f_4	0	1	0	0
f_5	0	1	0	1
f_6	0	1	1	0
f_7	0	1	1	1

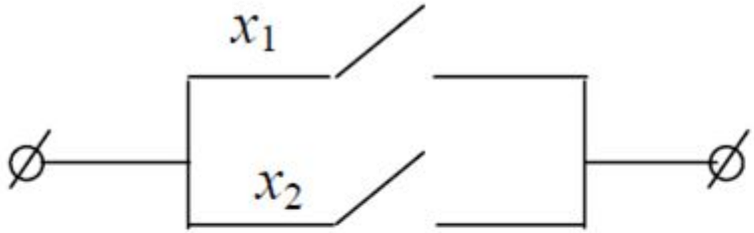
Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_8(x, y)$	$x \downarrow y$	заперечення диз'юнкції (стрілка Пірса)	не x і не y
$f_9(x, y)$	$x \sim y$	еквівалентність	x як y
$f_{10}(x, y)$	$\overline{y}$	заперечення другого аргументу	не y
$f_{11}(x, y)$	$y \rightarrow x$	обернена імплікація	x, якщо y (x або не y)
$f_{12}(x, y)$	$\overline{x}$	заперечення першого аргументу	не x
$f_{13}(x, y)$	$x \rightarrow y$	імплікація	якщо x, то y (не x або y)
$f_{14}(x, y)$	$x \mid y$	заперечення кон'юнкції (штрих Шеффера)	не x або не y
$f_{15}(x, y)$	1	константа 1	константа 1

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f_8	1	0	0	0
f_9	1	0	0	1
f_{10}	1	0	1	0
f_{11}	1	0	1	1
f_{12}	1	1	0	0
f_{13}	1	1	0	1
f_{14}	1	1	1	0
f_{15}	1	1	1	1

Усі можливі логічні функції n змінних можна створити за допомогою трьох основних операцій:

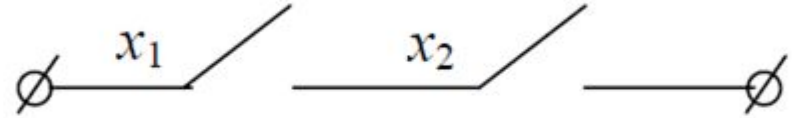
- *логічне заперечення* (інверсія, операція НІ) – це такий зв’язок між аргументом x та функцією y, за якого y істинна тоді і тільки тоді, коли значення x помилкове, і навпаки;
- *логічне додавання* (диз’юнкція, операція АБО) декількох змінних – це така функція, яка помилкова тоді і тільки тоді, коли одночасно помилкові всі змінні, що додаються.
- *логічне множення* (кон’юнкція, операція І) декількох змінних – це така функція, яка істинна тоді і тільки тоді, коли одночасно істинні всі логічні змінні.

Технічна реалізація функцій двох змінних



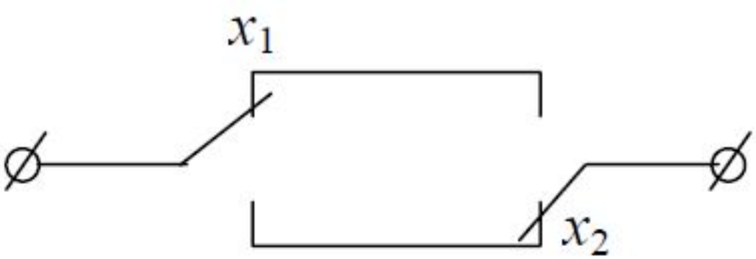
$x_1 + x_2$

Диз'юнкція



$x_1 \cdot x_2$

Кон'юнкція

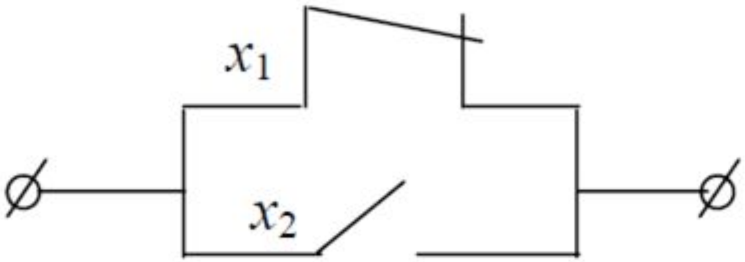


$x_1 \oplus x_2$

Додавання за модулем 2

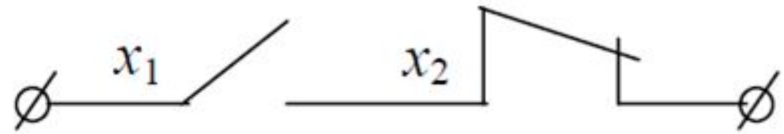
$x_1 \sim x_2$

Еквівалентність



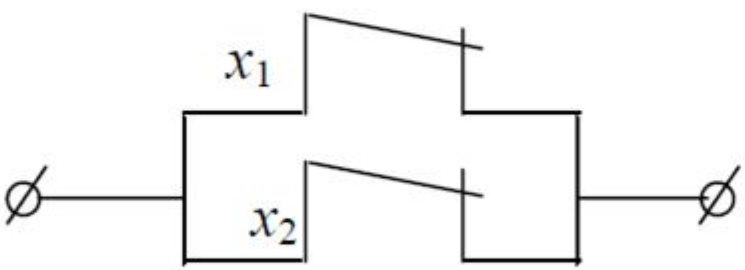
$x_1 \to x_2$

Імплікація



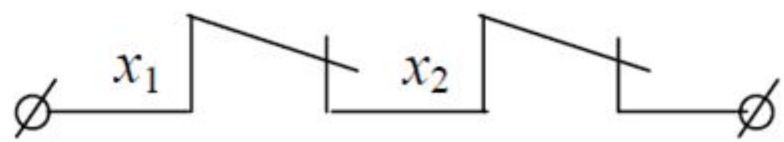
$x_1 \leftarrow x_2$

Заборона



x_1 / x_2

Штрих Шеффера



$x_1 \downarrow x_2$

Стрілка Пірса

§2 Реалізація булевих функцій формулами, пріоритет операцій. Двоїстість булевих функцій.

Булева алгебра (загальна) — це алгебраїчна структура $(A, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1)$ з бінарними операціями $\wedge, \vee: A^2 \rightarrow A$, унарною операцією «$\bar{\ }$»: $A \rightarrow A$ і виділеними елементами 0, 1 в носії A, які задовольняють властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності.

Якщо носій алгебраїчної структури $B = \{0, 1\}$ складається з двох елементів, то така структура $(B, \wedge, \vee, \bar{\ })$ називається ***двохелементною булевою алгеброю***.

Алгеброю логіки називається двохелементна булева алгебра $(B, \wedge, \vee, \bar{\ }, \rightarrow, \sim)$, $B=\{0,1\}$, в якій множину операцій доповнено двома бінарними операціями: імплікацією та еквівалентністю.

2.1 Формули булевих

Формула — це вираз, що містить булеві функції та їхні суперпозиції.

Суперпозицією називається спосіб одержання нових функцій шляхом підстановки значень одних функцій замість значень аргументів інших функцій, при цьому деякі з функцій можуть тотожно співпадати з однією із змінних.

Якщо у формулі відсутні дужки, то

операції виконуються у такій послідовності:

- заперечення $\overline{\ }$
- кон'юнкція $\wedge$
- диз'юнкція $\vee$
- імплікація $\rightarrow$
- еквівалентність $\sim$

На відміну від табличного задання, зображення функції формулою не єдине.

Формули, що зображують одну й ту ж функцію, називаються ***еквівалентними*** або ***рівносильними***.

Приклад. Функцію штрих Шеффера можна зобразити за допомогою основних операцій булевої алгебри формулами:

$f_{14} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$ або $f_{14} = \overline{x_1 x_2}$

а функцію стрілка Пірса таким чином:

$f_8 = \overline{x}_1 \overline{x}_2$ або $f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$

2.2 Двоїстість булевих функцій.

Логічна функція $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***двоїстою*** до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо має місце рівність $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$

Наприклад, функція f1 = *x*1·*x*2 має властивість двоїстості до функції f2 = *x*1+*x*2, тому що

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}$$

*x*1	*x*2	*f1*=*x*1 · *x*2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Логічна функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається ***самодвоїстою***, якщо має місце рівність

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}).$$

Наприклад, функція $f(x1, x2, x3) = x1 \cdot x2 + x2 \cdot x3 + x1 \cdot x3$ є самодвоїстою, тому що

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3}$$

Перевіряється за допомогою таблиці істинності.

Принцип двоїстості:

Для того, щоб одержати двоїсту формулу булевої алгебри, необхідно замінити в ній всі кон’юнкції на диз’юнкції, диз’юнкції на кон’юнкціїї, 0 на 1, 1 на 0 і використовувати дужки, де необхідно, щоб порядок операцій залишався попереднім.

Приклад. Знайти функцію двоїсту до функції

$$f = x_1 \vee \overline{x_2} x_3 \vee 1.$$

Розв’язання. Скористаємося правилом одержання двоїстих функцій $f^* = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge 0$.

Доведемо за допомогою таблиці істинності.

0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1