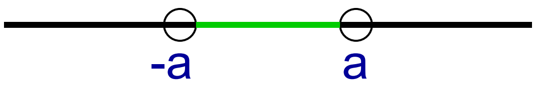
Неравенства с модулем

Способы решения неравенств с модулями:

- 1. По определению модуля
- 2. Возведение обоих частей неравенства в квадрат
- 3. Замена переменной
- 4. Раскрытие модуля на промежутке знакопостоянства
- 5. Равносильность неравенств системам
- 6. Важный частный случай

1.По определению модуля

$$|f(x)| < a$$



$|3x\text{-}1|<7$

$-7< 3x-1 <7$

$-6< 3x <8$

$-2< x < \frac{8}{3}$

Ответ: $\left(-2;\frac{8}{3}\right)$

$$|f(x)| > a$$

$$|5x-2|>4$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x-2>4 \\ 5x-2<-4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x>6 \\ 5x<2 \end{array}\right.$$

$$Ответ:\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{6}{5};+\infty\right)$$

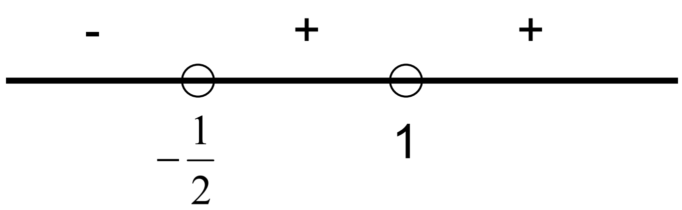
2.Возведение обеих частей в квадрат

$|x^2\text{-}1| > |x^2\text{-}x|$

$(x^2\text{-}1)^2 > (x^2\text{-}x)^2$ - *равносильность не нарушена*

$(x^2\text{-}1+ x^2\text{-}x)(x^2\text{-}1\text{-}x^2+x) > 0$ – *разность квадратов*

$(2x^2\text{-}x\text{-}1)(x\text{-}1) > 0$



$x\epsilon\left(-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$

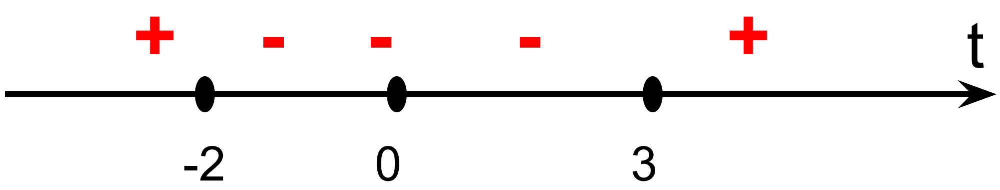
3.Замена переменной

$$x^2 - |x| - 6 \le 0$$

$$|x| = t; t \ge 0$$

$$t^2 - t - 6 \le 0$$

$(t+2)(t-3) \le 0$ *учитывая условие* $t \ge 0$, *получим*

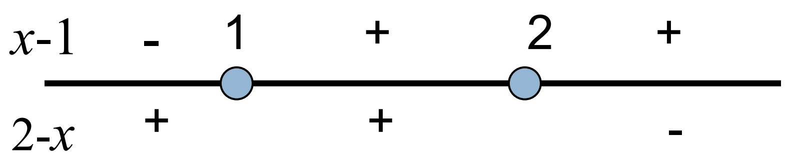


$$0 \le t \le 3$$

$|x| \le 3 \Longleftrightarrow x \in [-3; 3]$ *Ответ*: $[-3; 3]$

4. Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства

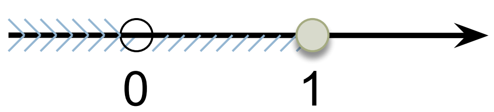
$|x-1| + |2-x| > 3$ Нули подмодульных выражений: $x = 1$ и $x = 2$



а)

$$\begin{cases} x \le 1 \\ -(x-1)+2-x>3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ x<0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty;0)$$

б)

$$\begin{cases} 1<x\le 2 \\ x+1-x>3 \end{cases}$$

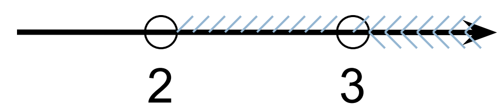
$$\begin{cases} 1<x\le 2 \\ 1>3-\textit{неверное} \end{cases}$$

$\varnothing$

в)

$$\begin{cases} x>2 \\ x-3+x>3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>2 \\ x>3 \end{cases}$$



$$x \in (3;+\infty)$$

$$\textit{Ответ}: (-\infty;0)\cup(3;+\infty)$$

5. Один частный случай

$$\left|\frac{x-1}{x+2}\right| > 1 \qquad ОДЗ: \ x \neq -2$$

$$\frac{|x-1|}{|x+2|} > 1$$ *умножим на* $|x+2|>0$ в ОДЗ

$$|x-1| > |x+2|$$ возведем в квадрат, обе части

$$(x-1+x+2)(x-1-x-2) > 0$$

$$(2x+1)(-3) > 0$$

для преобразования используем разность квадратов

$$2x+1 < 0$$

$$x < -\tfrac{1}{2}$$

Учитывая ОДЗ, получим:

$$Ответ: (-\infty;-2) \cup (-2;-\frac{1}{2})$$

Обучающая самостоятельная работа

Метод решения	условие	ответы
1. По определению модуля	$\lvert x+2\rvert < 3$	(-5; 1)
По определению модуля	$\lvert x^2-17\rvert \geq -1$	$(-\infty;\ +\infty)$
По определению модуля	$\lvert x^2-17\rvert \geq 1$	$(-\infty;\ -3\sqrt{2}][-4;4] \cup [3\sqrt{2};\ +\infty)$
По определению модуля	$\left\lvert \frac{x-1}{x+2} \right\rvert > 1$	$(-\infty;\ -1) \cup (-1;0)$
2. Возведение обеих частей в квадрат	$\lvert x-2\rvert < \lvert x+4\rvert$	$(-1;\ +\infty)$
3. Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства	$x \cdot \lvert x\rvert \geq x$	$[-1;0) \cup [1;\ +\infty)$
4. Замена переменной	$x^2-7\lvert x\rvert-8 \geq 0$	$(-\infty;\ -8] \cup [8;\ +\infty)$
Замена переменной	$2\lvert x-1\rvert \geq (x-1)^2+1$	0; 2