Введение в теорию пределов

Последовательность

- <u>Опр</u>. Числовой последовательностью $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве N натуральных чисел.

  Кратко обозначается $\{x_n\}\ или\ x_n\ ,\ n \in N$

  x_n - общий или n- ый член последовательности

Примеры:

$$x_n = \frac{1}{n};\ x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n!}$$

Предел последовательности

- Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N, что при всех n > N выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n$$

Предел функции в точке

- Определение Коши (в терминах $\varepsilon - \delta$)

Число А называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Односторонние пределы

- Число A_1 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 <u>слева</u>, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при $x \in (x_0 - \delta;\, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$

- Число A_2 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 <u>справа</u>, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при $x \in (x_0;\, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$

Предел функции в бесконечности

- Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число M>0, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Бесконечно большая функция

- Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если для любого числа M>0 существует $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| > M$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Бесконечно малая функция
(величина)

- Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ (б.м.величина)

- *Величина обратная б.м.ф. есть б.б.ф*:

  если $\alpha(x)$ - б.м.ф. ($\alpha(x) \neq 0$), то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - б.б.ф,

- *Величина обратная б.б.ф. есть б.м.ф.*:

  если $f(x)$ - б.б.ф. ($f(x) \neq 0$) , то $\dfrac{1}{f(x)}$ - б.м.ф

Теоремы о бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции ,

$A(x)$ – ограниченная функция. Тогда…

1. Сумма (разность) б.м.ф. есть б.м.ф.:

$$\alpha(x)+\beta(x) \text{ и } \alpha(x)-\beta(x) - б.м.ф.$$

2. Произведение б.м.ф. есть б.м.ф.: $\alpha(x)\cdot\beta(x) - б.м.ф.$

3. Произведение б.м.ф. и ограниченной есть б.м.ф.

$$\alpha(x)\cdot A(x) - б.м.ф.$$

4. Частное б.м.ф. и функции $f(x)$, *если* $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq 0$

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} - б.м.ф.$$

Связь между функцией, её пределом и бесконечно малой функцией

- $(\lim_{x \to x_0} f(x) = A) \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$

- $f(x) = A + \alpha(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$

Основные теоремы о пределах

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} c\ f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$

Основные теоремы о пределах

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim_{x\to x_0} f(x))^n$$

- Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},\ \ (\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0)$$

Признаки существования пределов

- Теорема о пределе промежуточной функции.

Если функция заключена между двумя функциями, стремящимися к одному и тому же пределу, то она стремится к этому пределу.

$$(\lim_{x\to x_0} g(x) = A \ \ и \ \ \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A; \quad g(x) < f(x) < \varphi(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

- Теорема о пределе монотонной функции.

Если функция $f(x)$ *монотонная и ограниченная при* $x < x_0$ *или при* $x > x_0$ *то существует соответственно её левый предел* $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ *или её правый предел*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

Замечательные пределы

- I ЗП (первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- I I ЗП (второй замечательный предел)

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

или

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$$

Эквивалентные бесконечно малые

$$Если\ \alpha(x)\ и\ \beta(x) - б.м.ф.\ при\ x \to x_0;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,\ то$$

$\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются*

эквивалентными бесконечно малыми.

Применение эквивалентных б.м. для вычисления пределов функций

- Т. При вычислении предела функции можно бесконечно малую функцию заменить на ей эквивалентную.

$$\textit{При}\ \ x \to x_0\ \textit{эквивалентными}\ \textit{б.м.}\ \textit{являются}...$$

$$\sin x \sim x\ ; \qquad \arcsin x \sim x; \qquad arctg \sim x;$$

$$e^{x-1} \sim x; \qquad \ln(1+x) \sim x$$

Правило Лопиталя

При раскрытии неопределённости вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ редел отношений функций равен пределу отношений производных этих функций.