



Методы и Системы Поддержки Принятия Решений

АР

Methods and Systems for Decision-Making Support

Л-5

**Многокритериальный анализ решений:
лексикографический метод,
обобщенные критерии**



Criteria: C_1, C_2, \dots, C_m
Alternatives: A_i





МКАР /Парето оптимальность

Методика решения МЗПР на основе Парето-оптимальности включает *2 общих* подхода:

1. Для рассматриваемой МЗПР находят множество Парето-оптимальных альтернатив. Выбор лучшего решения предоставляется ЛПР/ экспертам.
2. Проводят сужение мно-ва Парето (до 1ой альтернативы в идеале) с помощью разработанных методов (моделей) МКАР (Базируясь на дополнительной информации)



МКАР - Парето оптимальность

Пример подхода 1-2:

А) подход к сужению на основе задания нижних границ (для позитивных критериев): $C_i \geq C_{i,min}$

С увеличением границ – множество Парето-оптим решений уменьшается.

Б) субоптимизация: выделяется 1 из критериев (напр. C_1 - наиболее значимый в данных исследованиях), по оставшимся критериям вводятся нижние границы $C_{i,min}$. Оптимальным считается критерий с наибольшим значением выделенного критерия, удовлетворяющий всем доп. ограничениям.

Данный подход – сведение к скалярной оптимизации с использованием выявленных доп. Ограничений.

МКАР: Лексикографический метод

1) Упорядочение критериев по важности:

$$C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_m$$

2) Отбирают альтернативы с максимальной оценкой по наиболее важному критерию (C_1);
если такая альтернатива одна, то она объявляется опт.
if нет:

3) отбирают альтернативы с наилучшей оценкой по 2-ому по важности критерию (C_2),....

и тд.

ПР: Лексикографический метод

Недостатки:

- необходимость полной упорядоченности;
- учитывается только 1 критерий из m ;
- не учитываются возможные (незначительные/ существенные) количественные различия по критериям;
- не учитываются (возможные) низкие оценки по другим критериям
- не учитывается возможности компенсации значений критериев

МКАР. Пример - Выбор места работы

Альтернативы (A_i)	Критерий		
	Зарплата (тыс. руб/год)	Отпуск (дни)	Время поездки на раб. (мин)
1.	900	20	-60
2.	500	30	-20
3.	700	36	-40
4.	800	40	-50
5.	400	60	-15
6.	600	30	-10
7.	900	35	-60
8.	600	24	-10
9.	650	35	-40



МКАР. Пример - Выбор места работы

Анализ Парето-доминирования:

$A_3 > A_9$, $A_6 > A_2$, $A_6 > A_8$, $A_7 > A_1$.

Отбрасываем доминируемые A (1,2,8,9)

МКАР. Пример - Выбор места работы

Альтернативы (A_i)	Критерий		
	Зарплата (тыс. руб/год)	Отпуск (дни)	Время поездки на раб. (мин)
1.	900	20	-60
2.	500	30	-20
3.	700	36	-40
4.	800	40	-50
5.	400	60	-15
6.	600	30	-10
7.	900	35	-60
8.	600	24	-10
9.	650	35	-40



МКАР. Пример - Выбор места работы

1) Указываем нижние границы критериев:

$$Z \geq 600$$

$$ДО \geq 30$$

$$Вр.П \leq 40 \text{ мин}$$

Остаются варианты: А(3,6,9)

Оптимальные альтернативы: А3, А6.



МКАР. Пример - Выбор места работы

2) Субоптимизация:

Выделенный критерий: *Зарплата*

$ДО \geq 30$

$Вр.П \leq 40$ мин

Остаются варианты: А(2,3,5,6,9)

Оптимальный (*max* Зп): А3



МКАР. Пример - Выбор места работы

2) Лексикографическая оптимизация:

Упорядочение по важности:

Зарплата >Время> Отпуск

максимум по З: А1,А7

По В - =;

По О: А7 – optim

Вывод:

четко продумать приемлемый(е) метод МКАР

МКАР: Обобщенный критерий

синтезирует в себе все оценки по
исходным критериям в единую
(интегральную) численную оценку,
выражающую собой итоговую
(интегральную) ценность альтернативы



МКАР: обобщенный критерий

$$A = \{A_1, \dots, A_n\}, C = \{C_1, \dots, C_m\}$$

$$a \in A$$

$$F(a) = F(C_1(a), \dots, C_m(a)); X \subset \mathbf{R}^m$$

$$F : X \rightarrow \mathbf{R}^1 (\mathbf{R}^2)$$

F – обобщенный/ интегральный критерий:
сведение МКЗ к 1 критериальной



МКАР: обобщенный критерий

Def. Под обобщенным критерием понимают функцию $F(\mathbf{x})$

$$F(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$$

$$F : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$$

удовлетворяющую условию

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \underset{Par}{>} \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$$

$$\Rightarrow F(\mathbf{x}) > F(\mathbf{y})$$



МКАР: обобщенный критерий

часто используемая обобщенная ф-я:

$$\mathbf{a} = \mathbf{x} = (C_1(a), \dots, C_m(a)) = (x_1, \dots, x_m)$$

$$F(\mathbf{a}) = F(C_1(a), \dots, C_m(a))$$

$$= w_1 V_1(C_1(a)) + \dots + w_m V_m(C_m(a))$$

w_i – весовые коэффициенты

(веса относительной важности критериев)

$V_i(x)$ – функции, нормирующие значения критериев C_i .

(ф-я нормализации, ф-я ценности/полезности и др):

[будет обсуждаться при изучении методов МКАР]



МКАР: обобщенный критерий

$$0 < w_i \leq 1;$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1$$

Мощности функции и — ;

$$0 \leq V_i(x) \leq 1 \quad (1 \rightarrow 100)$$

$V_i(x)$ – приводит разнородные критерии к единой (количественной) шкале.

Примеры.



МКАР: обобщенный критерий

Th. Если векторная оценка $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ доставляет максимум обобщенному критерию $F(\mathbf{x})$,

$$F(\mathbf{x}) = w_1 V_1(x_1) + \dots + w_m V_m(x_m)$$

тогда точка \mathbf{x}^* является Парето-оптимальной.



МКАР: обобщенный критерий

Def. Обобщенные критерии $F_1(\mathbf{x})$ и $F_2(\mathbf{x})$ называются эквивалентными, если для любых векторных оценок $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$

из соотношения $F_1(\mathbf{x}) \geq F_1(\mathbf{y})$
следует $F_2(\mathbf{x}) \geq F_2(\mathbf{y})$

(примеры: $F_1 = 2x_1 + 3x_2$; $F_2 = 0.4x_1 + 0.6x_2$; $F_3 = \exp(2x_1 + 3x_2), \dots$)



МКАР: обобщенный критерий

Def. Кривая безразличия (indifference curve):

Пусть дан обобщенный критерий $F(\mathbf{x})$ $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

Множество точек $I_c = \{\mathbf{x}: F(\mathbf{x}) = c\}$

называют *кривой безразличия* (для выбранной обобщенной ф-ии).

МКАР: обобщенный критерий

Кривая безразличия: $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{R}^n$

$F(x, y)$ - обобщенный критерий.

$M(x, y)$ – точка на кривой безразличия,

$M_1(x_1, y_1)$ – точка (сдвиг M) вдоль кривой безр;

→ ‘прибавка’ $\Delta x = x_1 - x$ компенсирует (для ЛПР)

‘потерю’ $\Delta y = y - y_1$; Число (положит)

$k = k(x, y) = \lim \Delta y / \Delta x (\Delta x \rightarrow 0)$

называют Локальным коэфф-том замещения

(ЛКЗ) (для малых Δx : $\Delta y \approx k \Delta x$)



МКАР: обобщенный критерий

Утв.1. ЛКЗ $k=k(x,y)$ равен тангенсу угла (производной) к кривой безразличия в точке $M(x,y)$.

*Пусть $X \subset \mathbf{R}^2$ Множество всех кривых безразличия в X составляет *Карту Безразличия*.*

Утв. Задание в обл. X карты безразличия эквивалентно заданию ЛКЗ в каждой т. M в X .

МКАР: обобщенный критерий

Условия, при которых ЛКЗ постоянен:

$$k=k(x,y)=-dy/dx,$$

тогда: $y=-kx+c$

(карта безразличия – семейство параллельных прямых)

МКАР: обобщенный критерий

Утв.2. У обобщенных эквивалентных критериев карты безразличия совпадают (в области векторных оценок X).

Утв.3. Карта безразличия определяет обобщенный критерий с точностью до эквивалентности

$$F_1(x, y) = f_1(C(x, y));$$

$$F_2(x, y) = f_2(C(x, y))$$

монотонные возрастающие функции



МКАР: обобщенный критерий

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/
32782602/deesoft/decerns_mcd_a_de_
20130228.zip](https://dl.dropboxusercontent.com/u/32782602/deesoft/decerns_mcd_a_de_20130228.zip)

DecernsMCDA, DECERNS MCDA;

МКАР. Пример - Оценки по 3-м предметам

	Критерий		
Ученики (A_i)	C1	C2	C3
1.	3	4	3
2.	5	3	2
3.	3	2	5
4.	4	5	4
5.	3	4	5
6.	3	4	4
7.	3	5	2
8.	4	4	5