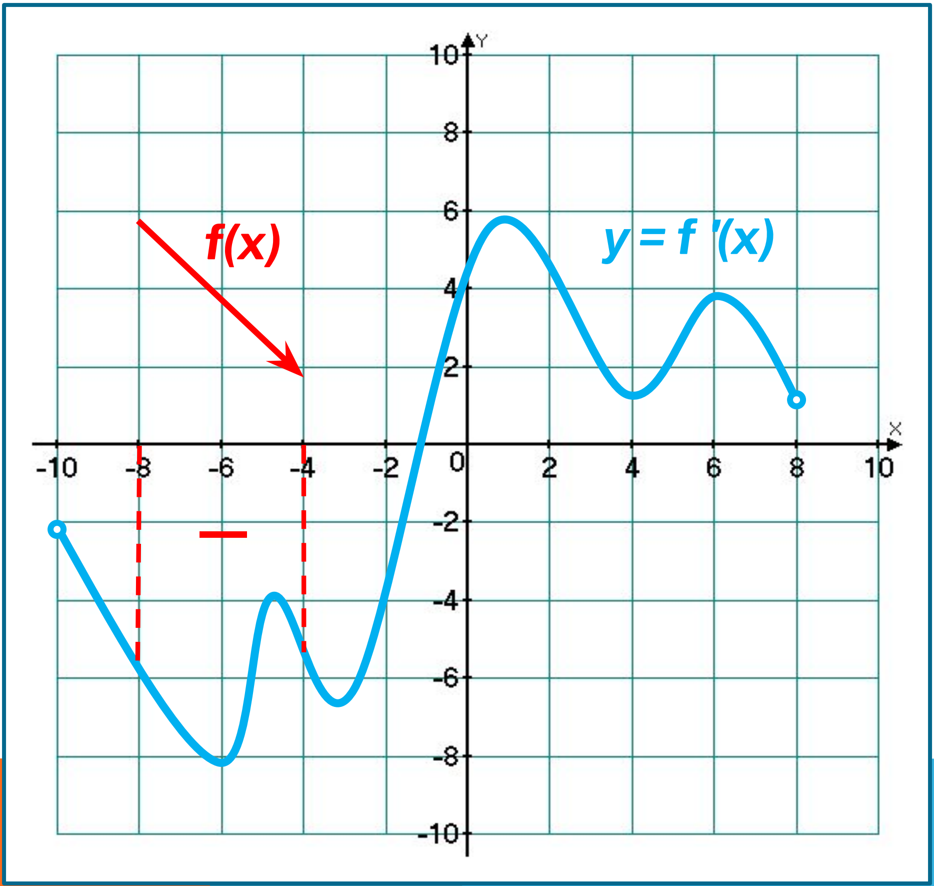
Производная и первообразная

Задание 7 ЕГЭ профильной математики

Группа «Математика в школе»

https://vk.com/alkaevalr

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

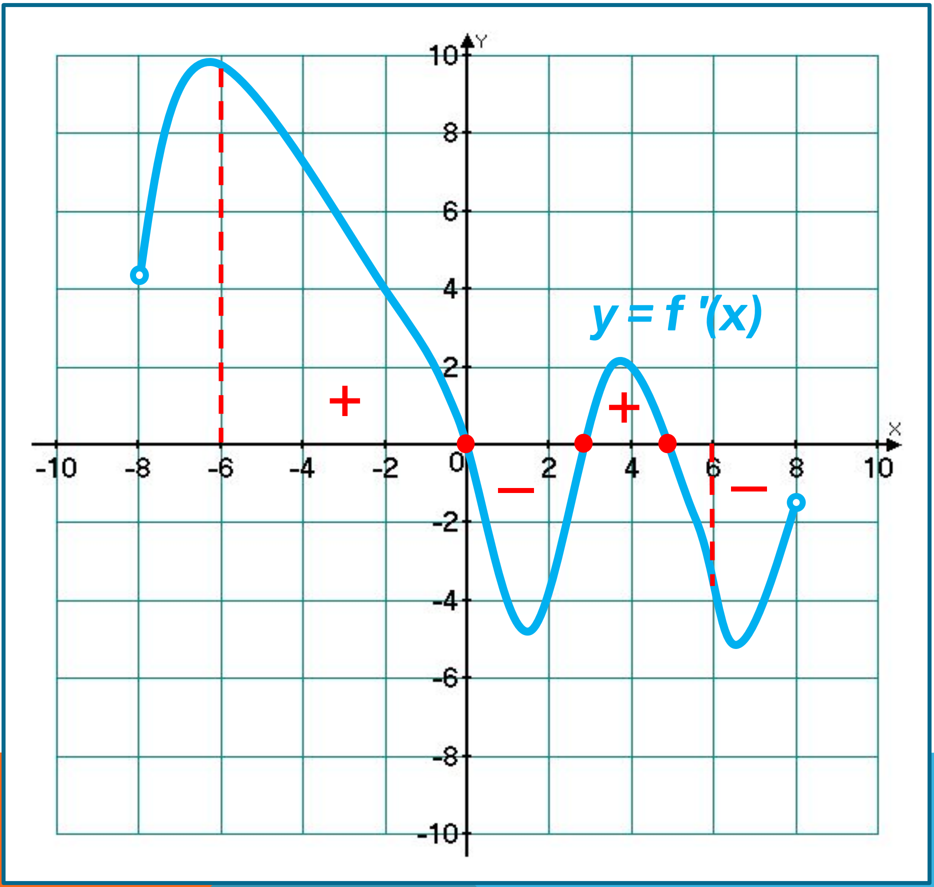


Решение:

Заметим, что на отрезке $[-8; -4]$ производная функции отрицательна, значит, сама функция убывает, а значит, наименьшее значение на этом отрезке она принимает на правом конце отрезка, то есть в точке -4.

Ответ: -4.

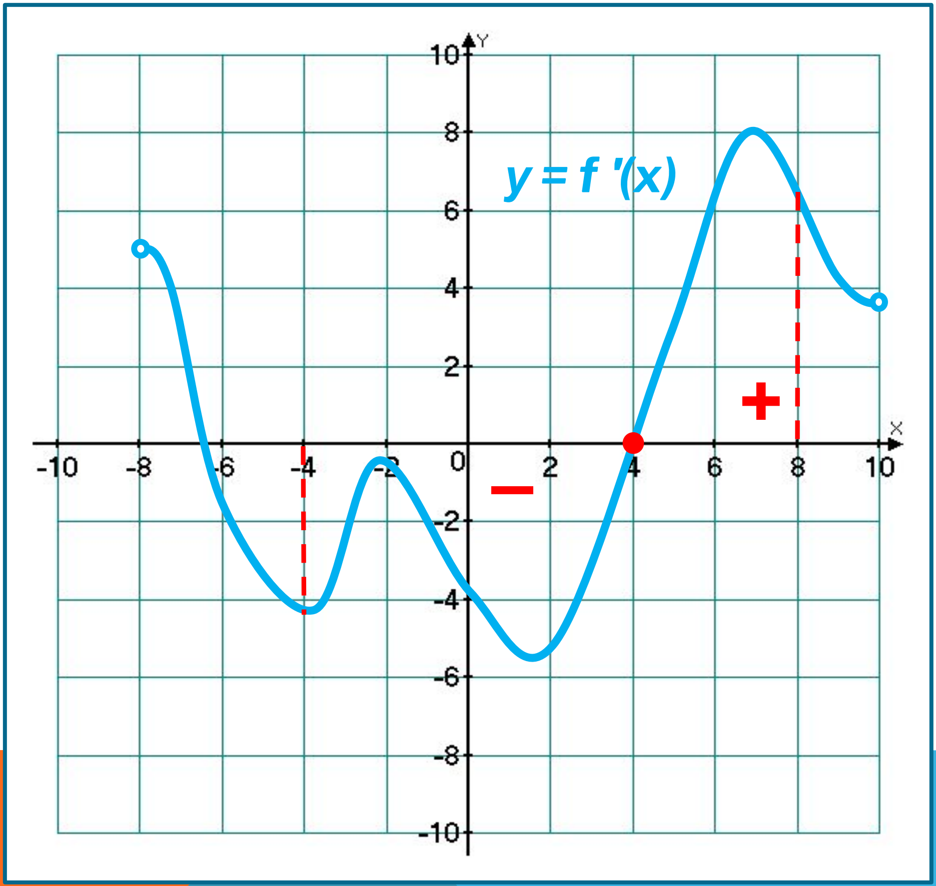
На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(–8; 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[– 6; 6]$.



<u>Решение:</u>
В точке экстремума производная функции равна 0 либо не существует.
Видно, что таких точек принадлежащих отрезку [–6; 6] три.
При этом в каждой точке производная меняет знак либо с «+» на «–», либо с «–» на «+».

Ответ: 3.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(–8; 10)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(– 4; 8)$.

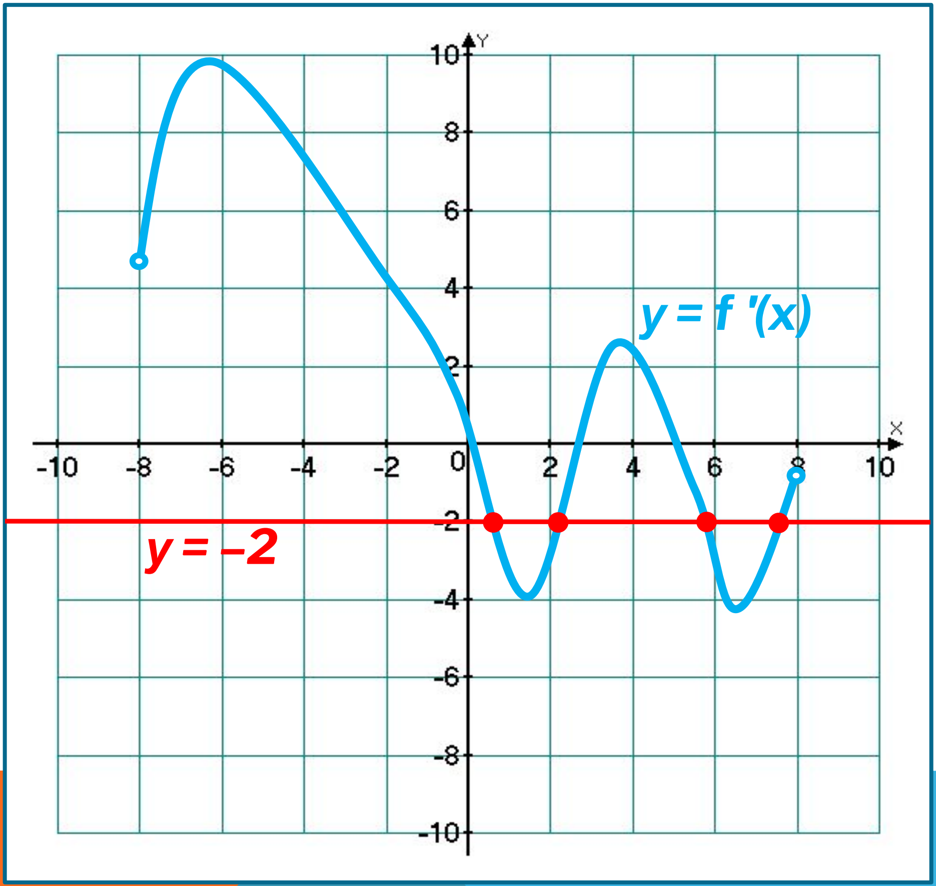


<u>Решение:</u>

Заметим, что на интервале (–4; 8) производная в точке $x_o = 4$ обращается в 0 и при переходе через эту точку меняет знак производной с «–» на «+», точка 4 и есть искомая точка экстремума функции на заданном интервале.

Ответ: 4.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 2$ или совпадает с ней.

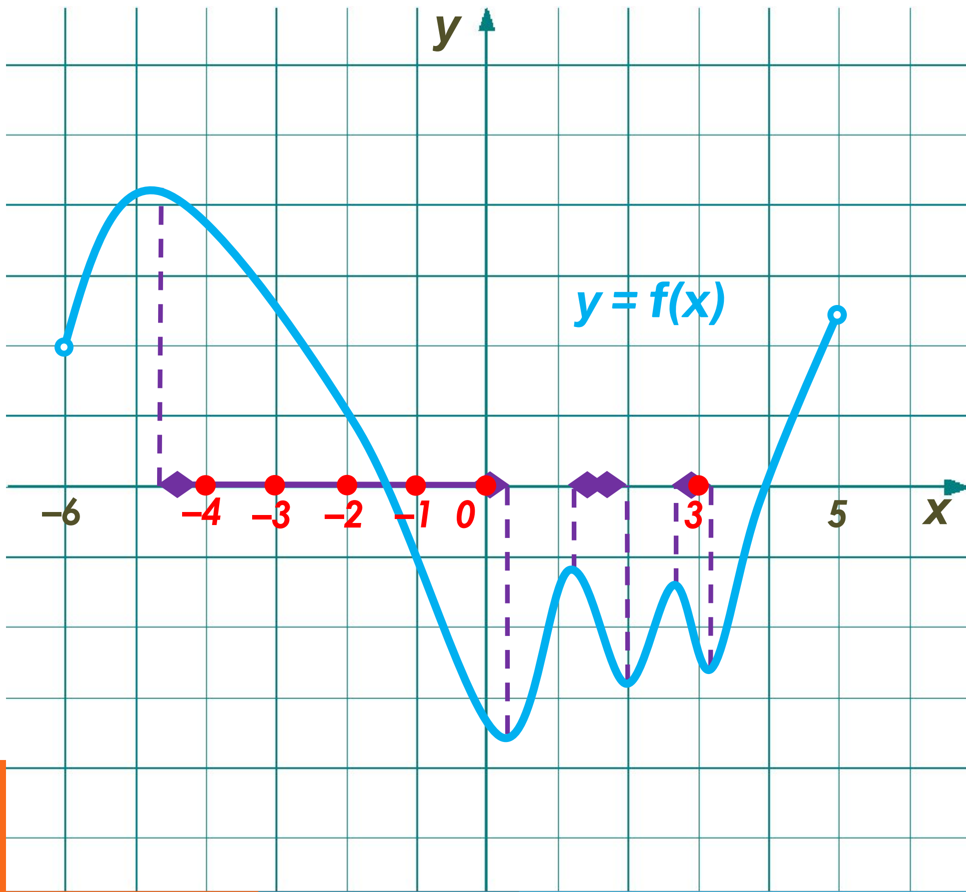


Решение:

Если касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 2$ или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент $k = -2$, а значит нам нужно найти количество точек, в которых производная функции $f'(x) = -2$. Для этого на графике производной проведем прямую $y = -2$, и посчитаем количество точек графика производной, лежащих на этой линии. Таких точек 4.

Ответ: 4.

На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (–6; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Решение:

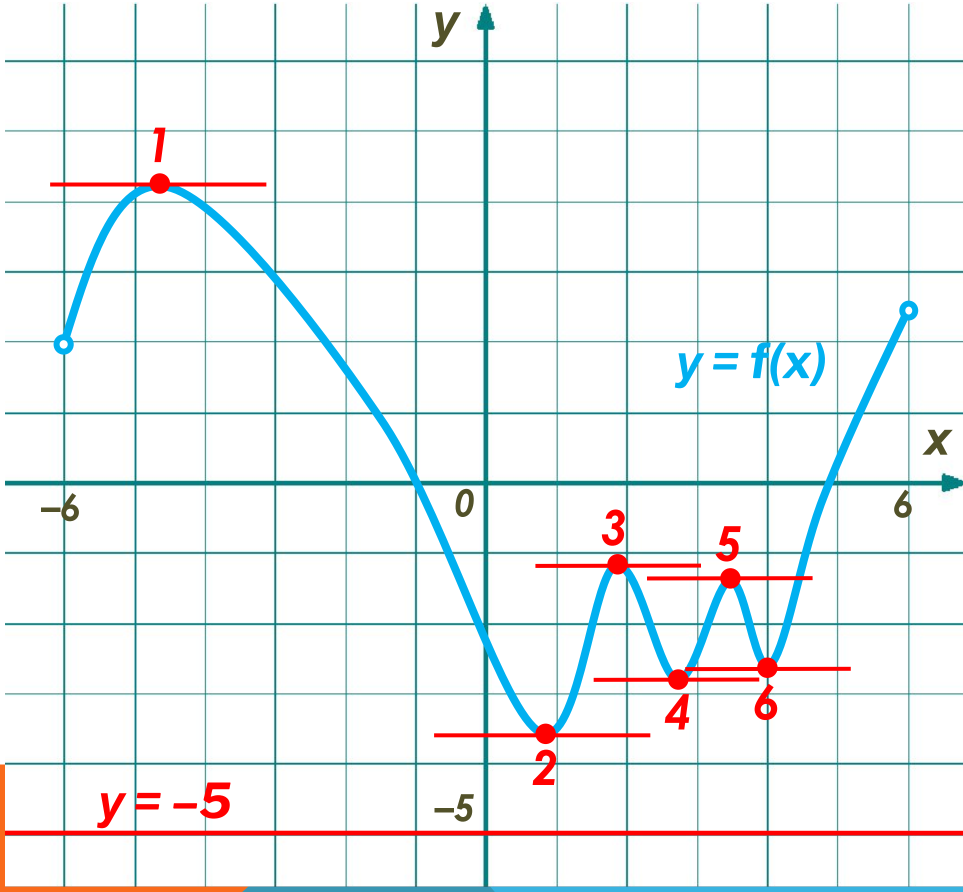
Заметим, что производная функции отрицательна, если сама функция f(x) убывает, а значит, необходимо найти количество целых точек, входящих в промежутки убывания функции.

Таких точек 6:

x = −4, x = −3, x = −2,
x = −1, x = 0, x = 3.

Ответ: 6.

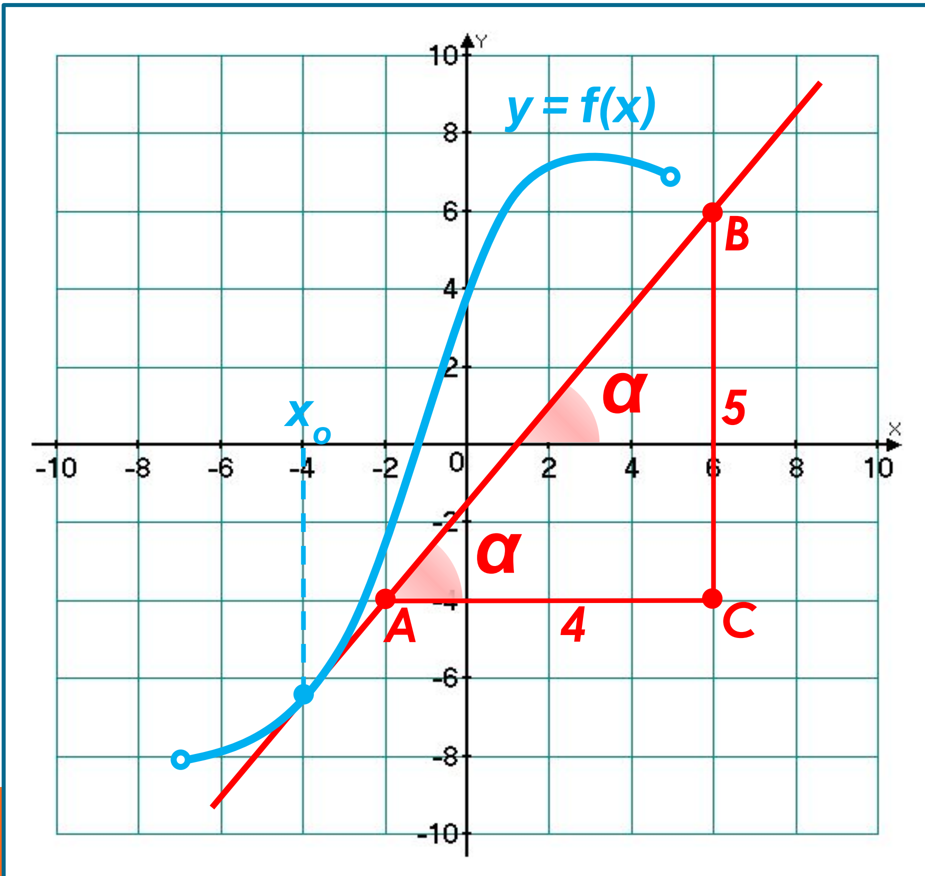
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -5$.



Решение:
Прямая $y = -5$ горизонтальная, значит, если касательная к графику функции ей параллельна, то она тоже горизонтальна. Следовательно, угловой коэффициент в искомых точках $k = f'(x) = 0$.
В нашем случае – это точки экстремума. Таких точек 6.

Ответ: 6.

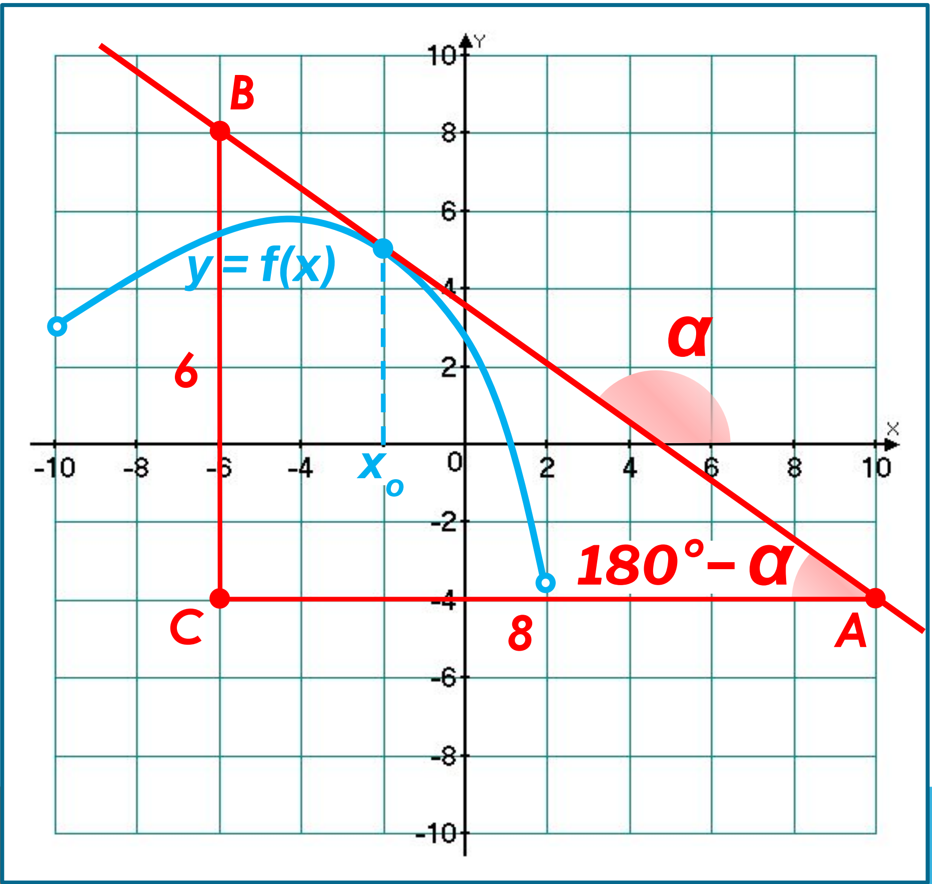
На рисунке изображен график $y = f(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(–7; 5)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_o. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_o.



Решение:
Значение производной функции $f'(x_o) = tg\,\alpha = k$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.
В нашем случае $k > 0$, так как α – острый угол ($tg\,\alpha > 0$).
Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых − целые числа.
Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC.
$tg\,\alpha = BC : AC = 5 : 4 = 1{,}25$

Ответ: 1,25.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_o.
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_o.



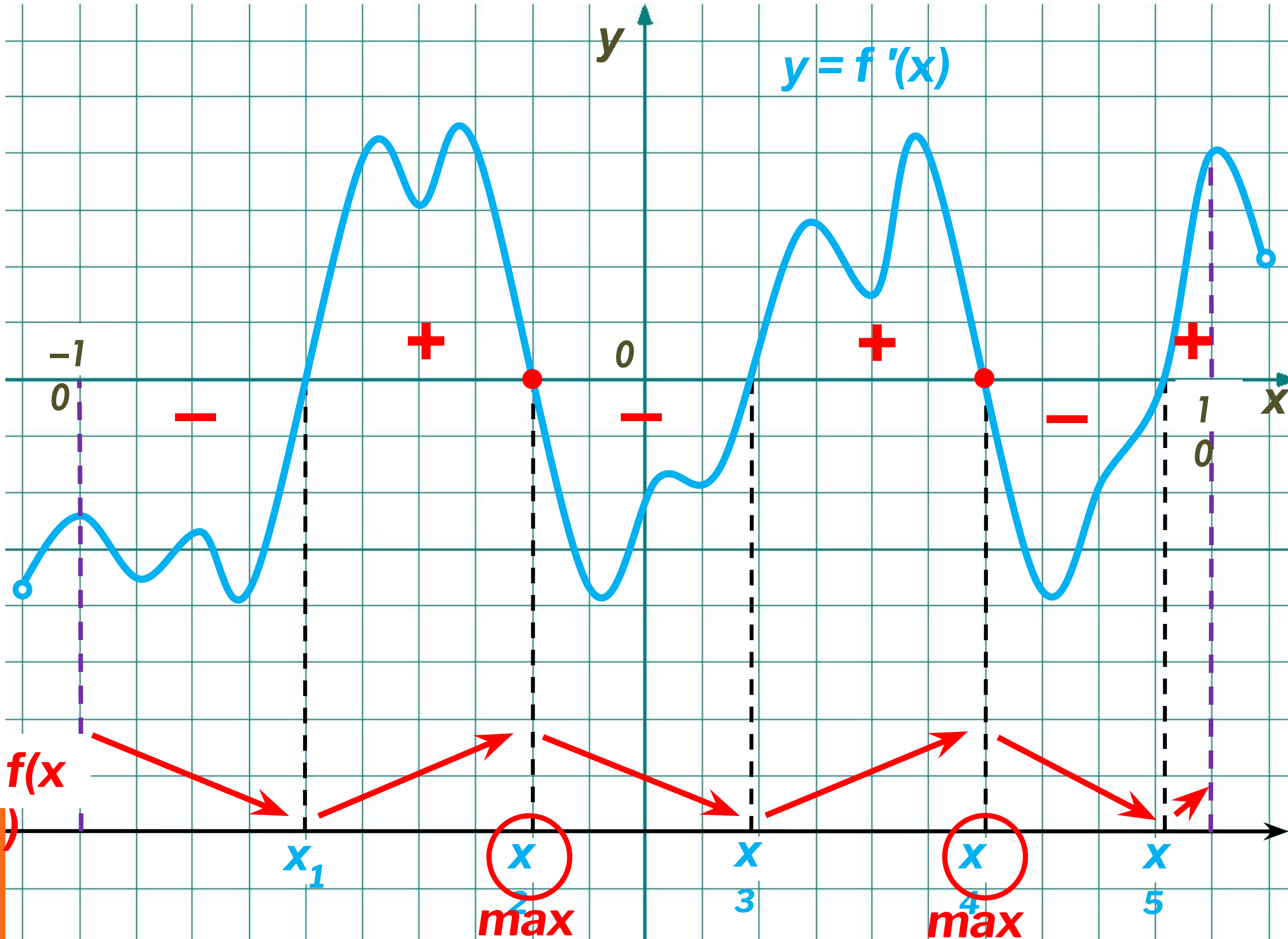
Решение:
Значение производной функции $f'(x_o) = \operatorname{tg}\alpha = k$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику этой функции в данной точке.
В нашем случае $k < 0$, так как α – тупой угол ($\operatorname{tg}\alpha < 0$).
Чтобы найти угловой коэффициент, выберем две точки A и B, лежащие на касательной, абсциссы и ординаты которых − целые числа.
Теперь определим модуль углового коэффициента. Для этого построим треугольник ABC.

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = BC : AC = 6 : 8 = 0{,}75$

$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -0{,}75$

Ответ: −0,75.

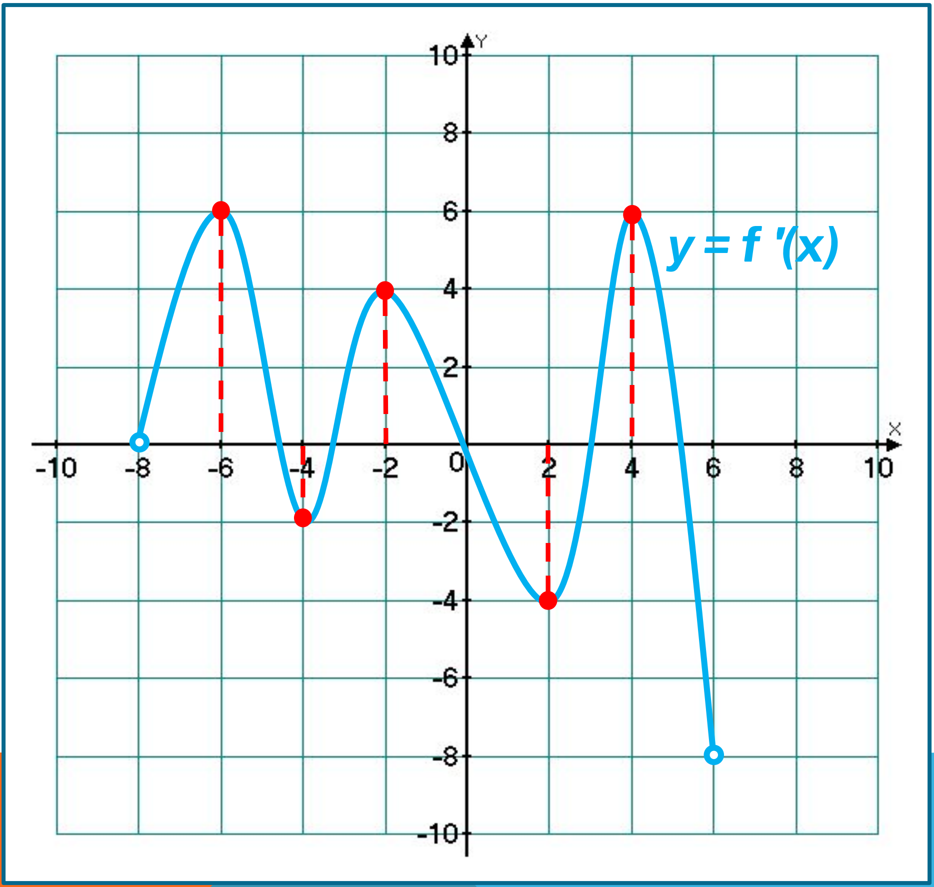
На рисунке изображен график производной y = f '(x) –функции f(x), определенной на интервале (–11; 11).
Найдите количество точек максимума функции f(x) на отрезке [–10; 10].



<u>Решение:</u>
В точке экстремума производная функции равна 0 либо не существует. Видно, что таких точек принадлежащих отрезку [–10; 10] пять.
В точках x_2 и x_4 производная меняет знак с «+» на «–» – это точки максимума.

Ответ: 2.

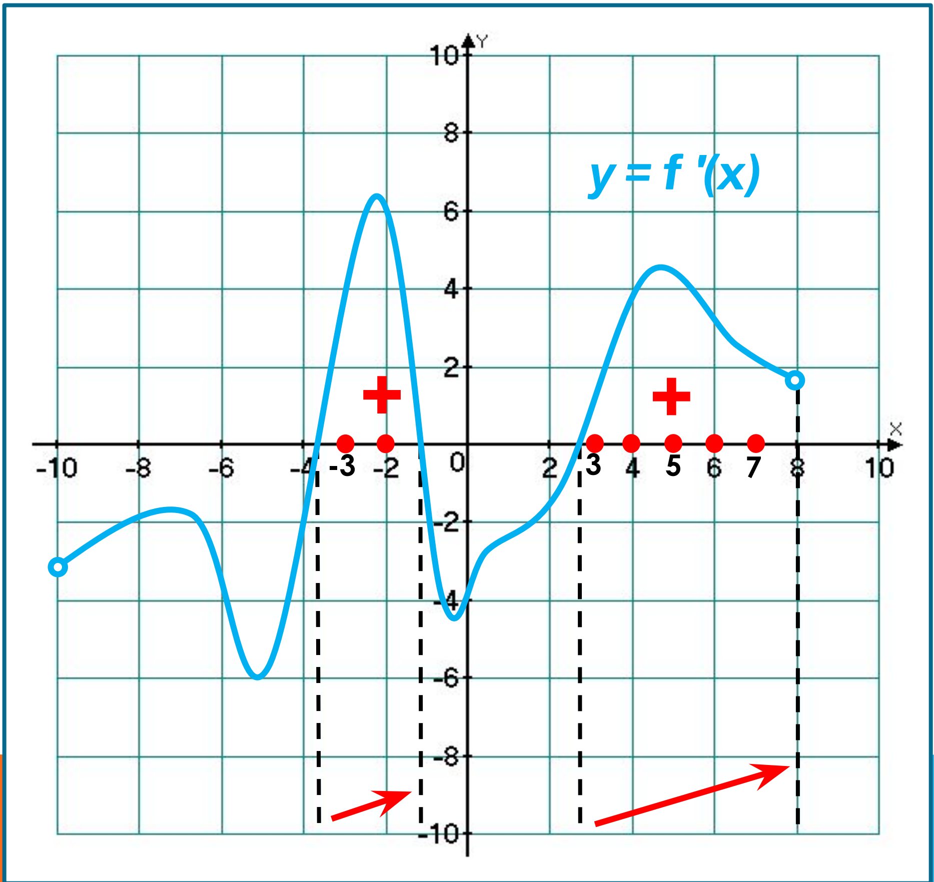
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 6)$.
Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



<u>Решение:</u>
Точки экстремума – это точки минимума и максимума.
Видно, что таких точек принадлежащих промежутку $(-8; 6)$ пять.
Найдем сумму их абсцисс:
$-6 + (-4) + (-2) + 2 + 4 = 6$.

Ответ: 6.

На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$ – функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$.
Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Ответ: 20.

Решение:

Заметим, что функция $f(x)$ возрастает, если производная функции положительна; а значит, необходимо найти сумму целых точек, входящих в промежутки возрастания функции.

Таких точек 7:

$x = -3, x = -2, x = 3,$
$x = 4, x = 5, x = 6, x = 7.$

Их сумма:

$-3+(-2)+3+4+5+6+7 = 20$

Прямая $y = 4x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

<u>Решение:</u>

Если прямая параллельна касательной к графику функции в какой-то точке (назовем ее x_o), то ее угловой коэффициент (в нашем случае $k = 4$ из уравнения $y = 4x + 11$) равен значению производной функции в точке x_o:

$k = f'(x_o) = 4$

Производная функции

$f'(x) = (x^2 + 8x + 6)' = 2x + 8$.

Значит, для нахождения искомой точки касания необходимо, чтобы $2x_o + 8 = 4$,

откуда $x_o = -2$.

Ответ: – 2.

Прямая $y = 3x + 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$.
Найдите абсциссу точки касания.

<u>Решение:</u>
Заметим, что если прямая является касательной к графику, то ее угловой коэффициент ($k = 3$) должен быть равен производной функции в точке касания, откуда имеем $3x^2 - 6x - 6 = 3$, то есть $3x^2 - 6x - 9 = 0$ или $x^2 - 2x - 3 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: -1 и 3. Таким образом есть две точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$ имеет угловой коэффициент, равный 3. Для того чтобы определить, в какой из этих двух точек прямая $y = 3x + 11$ касается графика функции, вычислим значения функции в этих точках и проверим, удовлетворяют ли они уравнению касательной.
Значение функции в точке -1 равно $y(-1) = -1 - 3 + 6 + 6 = 8$, а значение в точке 3 равно $y(3) = 27 - 27 - 18 + 6 = -12$. Заметим, что точка с координатами $(-1; 8)$ удовлетворяет уравнению касательной, так как $8 = -3 + 11$. А вот точка $(3; -12)$ уравнению касательной не удовлетворяет, так как $-12 \neq 9 + 11$.
Значит, искомая абсцисса точки касания равна -1.

Ответ: -1.

Прямая $y = 4x - 4$ является касательной к графику функции $ax^2 + 34x + 11$. Найдите a.

Решение:
Производная функции в точке касания должна совпадать с угловым коэффициентом прямой. Откуда, если за x_o принять абсциссу точки касания, имеем: $2ax_o + 34 = 4$. То есть $ax_o = -15$.
Найдем значение исходной функции в точке касания:
$ax_o^2 + 34x_o + 11 = -15x_o + 34x_o + 11 = 19x_o + 11$.
Так как прямая $y = 4x - 4$ – касательная, имеем:
$19x_o + 11 = 4x_o - 4$, откуда $x_o = -1$.
А значит $a = 15$.

Ответ: 15.

Прямая $y = -4x - 5$ является касательной к графику функции $9x^2 + bx + 20$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.

Если x_o – абсцисса точки касания, то $18x_o + b = -4$, откуда $b = -4 - 18x_o$.

Аналогично задаче №12 найдем x_o:

$9x_o^2 + (-4 - 18x_o)\,x_o + 20 = -4x_o - 5$,

$9x_o^2 - 4x_o - 18x_o^2 + 20 + 4x_o + 5 = 0$,

$-9x_o^2 + 25 = 0$,

$x_o^2 = 25/9$.

Откуда $x_o = 5/3$ или $x_o = -5/3$.

Условию задачи соответствует только положительный корень, значит $x_o = 5/3$, следовательно $b = -4 - 18 \cdot 5/3$, имеем $b = -34$.

Ответ: -34.

Прямая $y = 2x - 6$ является касательной к графику функции $x^2 + 12x + c$. Найдите c.

Решение.

Аналогично предыдущим задачам обозначим абсциссу точки касания x_o и приравняем значение производной функции в точке x_o угловому коэффициенту касательной.

$2x_o + 12 = 2$, откуда $x_o = -5$.

Значение исходной функции в точке -5 равно:

$25 - 60 + c = c - 35$, значит $c - 35 = 2\cdot(-5) - 6$,

откуда $c = 19$.

Ответ: 19.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0,5t^2 - 2t - 6$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах,
t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6c$.

Решение.

Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_o, прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = x(t)$, равна значению производной функции x при $t = t_o$, искомая скорость будет равна

$x'(t) = 0,5 \cdot 2t - 2 = t - 2$,

$x'(6) = 6 - 2 = 4$ м/с.

Ответ: 4.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0{,}5t^2 - 2t - 22$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?

Решение.

Так как мгновенная скорость точки в момент времени t_o, прямолинейного движения, совершаемого по закону $x = x(t)$, равна значению производной функции x при $t = t_o$, искомая скорость будет равна

$x'(t_o) = 0{,}5 \cdot 2t_o - 2 = t_o - 2$,

Т.к. по условию, $x'(t_o) = 4$, то $t_o - 2 = 4$, откуда

$t_o = 4 + 2 = 6$ м/с.

Ответ: 6.