

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ЧИСЕЛ В КОМПЬЮТЕРЕ

Одним из основных направлений применения компьютеров были и остаются разнообразные вычисления. Компьютерная обработка числовой информации ведется и при решении задач, на первый взгляд не связанных с какими-то расчетами, например, при использовании компьютерной графики или звука.

В связи с этим встает вопрос о выборе оптимального представления чисел в компьютере.

Можно было бы использовать 8-битное (байтовое) кодирование отдельных цифр как символов, а из них составлять числа. Однако такое кодирование не будет оптимальным.

Представление числа определяет не только способ записи данных (букв или чисел), но и допустимый набор операций над ними.

Представление чисел в компьютере по сравнению с формами, известными всем со школы, имеет два важных отличия:

во-первых, числа записываются в двоичной системе счисления (в отличие от привычной десятичной);

во-вторых, для записи и обработки чисел отводится конечное количество разрядов (в «некомпьютерной» арифметике такое ограничение отсутствует).

Любое число имеет значение (содержание) и форму представления.

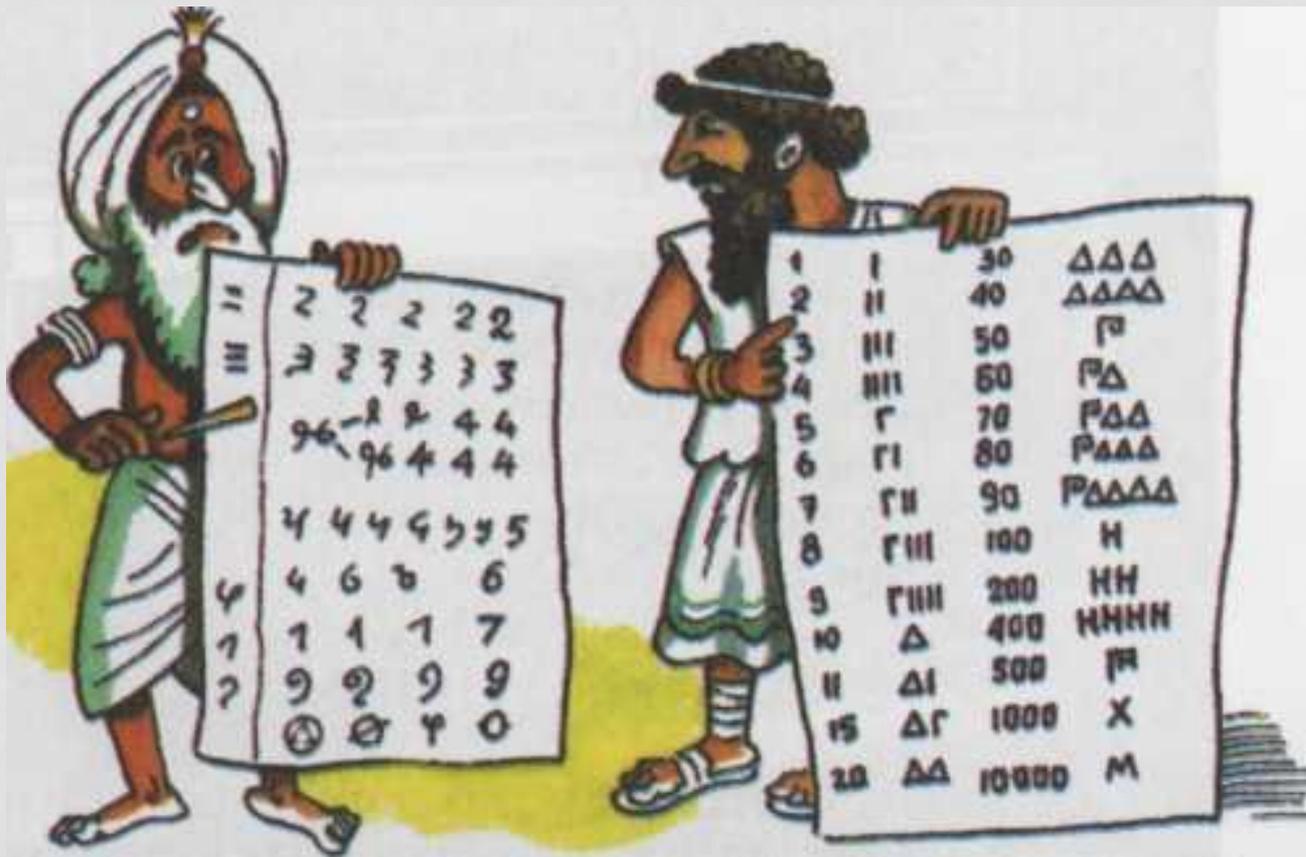
Это означает также, что число с одним и тем же значением может быть записано по-разному, т.е. отсутствует взаимно однозначное соответствие между представлением числа и его значением.

В связи с этим возникают вопросы,

- во-первых, о формах представления чисел, и,
- во-вторых, о возможности и способах перехода от одной формы к другой.

Способ представления числа определяется системой счисления.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ



СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ



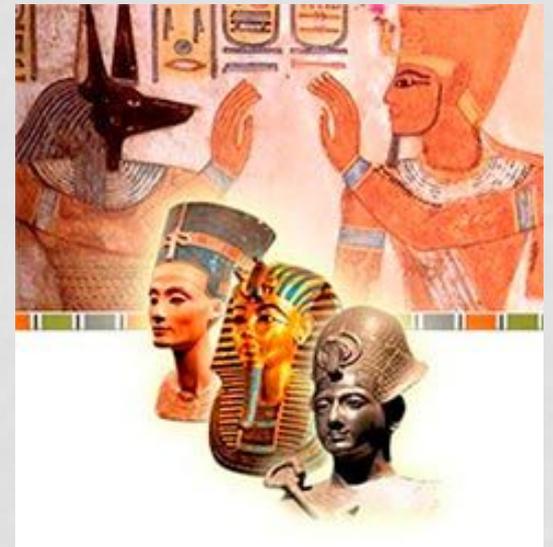
В непозиционной с/с значение каждой цифры постоянно, независимо от расположения в числе

В позиционной с/с значение каждой цифры определяется занимаемой ею позицией (местом) в числе. При смене позиции (места) цифры в числе меняется ее значение

Система счисления — это правила записи чисел с помощью специальных знаков — *цифр*, а также соответствующие правила выполнения операций с этими числами.

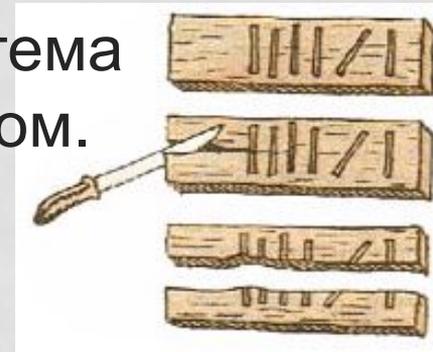
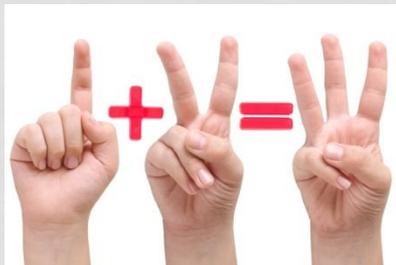
НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

- Унарная система счисления
- египетская десятичная
- римская
- славянская
- и другие...



Унарная система счисления (лат. *unus* – один)
непозиционная система счисления с единственной цифрой, обозначающей 1 (например, чёрточка (|), камешек, костяшка, узелок, зарубка и др.

По-видимому, это хронологически первая система счисления каждого народа, овладевшего счётом.



- только натуральные числа
- запись больших чисел – длинная (как записать, например, 1 000 000?)

ЕГИПЕТСКАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА

черта	– 1	лотос	 – 1000	 – 1000000
хомут	∩ – 10	палец	 – 10000	человек
верёвка	⊙ – 100	лягушка	 – 100000	

$$\downarrow \odot \odot \cap \cap \cap \cap \parallel \parallel \parallel \parallel = 1235$$

$$2014 = \downarrow \downarrow \cap \parallel \parallel \parallel \parallel$$

Египетская система счисления — непозиционная система счисления, которая употреблялась в Древнем Египте вплоть до начала X века н.э. В этой системе цифрами являлись иероглифические символы; они обозначали числа 1, 10, 100 и т. д. до миллиона.

Числа, не кратные 10, записывались путем повторения этих цифр. Каждая цифра могла повторяться от 1 до 9 раз.

Например, число 4622 обозначалось следующим образом:



Нумерация на барельефе с египетскими письменами

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

I – 1 (палец),

V – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),

X – 10 (две ладони),

L – 50,

C – 100 (*Centum*),

D – 500 (*Demimille*),

M – 1000 (*Mille*)



Спасская башня
Московского Кремля

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Примером непозиционной системы счисления, которая сохранилась до наших дней, может служить система счисления, применявшаяся более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме.

В основе римской системы счисления лежат знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для 10, а также специальные знаки для обозначения чисел 50, 100, 500 и 1000.



Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$

The diagram shows the decomposition of the number 2389 into its place values: 2000, 300, 80, and 9. Below each value is a red oval containing its Roman numeral representation: MM for 2000, CCC for 300, LXXX for 80, and IX for 9. Red arrows point from each oval to its corresponding value in the equation above.

$$2389 = \text{M M C C C L X X X I X}$$

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Запись чисел в такой системе громоздка и неудобна, но еще более неудобным оказывается выполнение в ней даже самых простых арифметических операций.

Отсутствие нуля и знаков для чисел больше М не позволяют римскими цифрами записать любое число (хотя бы натуральное).

По этим причинам теперь римская система используется лишь для нумерации.



- только натуральные числа (*дробные?*
отрицательные?)
- для записи больших чисел нужно вводить новые цифры
- СЛОЖНО ВЫПОЛНЯТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Римскими цифрами пользовались очень долго. Еще 200 лет назад в деловых бумагах числа должны были обозначаться римскими цифрами (считалось, что обычные арабские цифры легко подделать).

Римская система счисления сегодня используется в основном для наименования знаменательных дат, томов, разделов и глав в книгах.

ГЛАВА V.

Исследование истоковъ Желтой рѣки. (прод.).

Свѣдѣнія о тангутахъ камъ и голмыкъ. — Нашъ обратный путь. — Олово за горными баранами. — Опасная случайность. — Вновь на тибетскомъ плато. — Мѣстность по р. Джагмыкъ-голь. — Развѣдочныя

«Пираты XX века»

Жеманъ / Ф. Елбачкин /
10/11-88г.



СЛАВЯНСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Алфавитная система была принята в древней Руси.

Числа от 1 до 10 записывались так:

Над буквами, обозначающими числа, ставился специальный знак – титло. Это делалось для того, чтобы отличить числа от обычных слов.

[˘] А	[˘] В	[˘] Г	[˘] Д	[˘] Е	[˘] З	[˘] И	[˘] Й	[˘] Ѡ
<i>аз</i>	<i>веди</i>	<i>глаголь</i>	<i>добро</i>	<i>есть</i>	<i>зело</i>	<i>земля</i>	<i>иже</i>	<i>фита</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
[˘] І	[˘] К	[˘] Л	[˘] М	[˘] Н	[˘] Ѣ	[˘] О	[˘] П	[˘] Ч
<i>и</i>	<i>како</i>	<i>люди</i>	<i>мыслете</i>	<i>наш</i>	<i>кси</i>	<i>он</i>	<i>покой</i>	<i>червь</i>
10	20	30	40	50	60	70	80	90
[˘] Р	[˘] С	[˘] Т	[˘] У	[˘] Ф	[˘] Х	[˘] Ѩ	[˘] Ѧ	[˘] Ц
<i>рцы</i>	<i>слово</i>	<i>твердь</i>	<i>ук</i>	<i>ферт</i>	<i>ха</i>	<i>пси</i>	<i>о</i>	<i>цы</i>
100	200	300	400	500	600	700	800	900



Часы
Суздальского
Кремля

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Алфавит системы счисления — это используемый в ней набор цифр.

Основание системы счисления — это количество цифр в алфавите (мощность алфавита).

Разряд — это позиция цифры в записи числа. Разряды в записи целых чисел нумеруются с нуля справа налево.

Название	Основание	Цифры
Двоичная	2	0,1
Восьмеричная	8	0,1,2,3,4,5,6,7
Шестнадцатеричная	16	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E,F
Десятичная	10	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

ФОРМЫ ЗАПИСИ ЧИСЕЛ

тысячи сотни десятки единицы

3 2 1 0 разряды

6 3 7 5

$$= 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

6000 300 70 5

развёрнутая форма
записи числа

ПЕРЕВОД В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМУ

Через развёрнутую запись:

разряды: 3 2 1 0

$$\overline{1234}_5 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 =$$

194

(Note: A yellow callout bubble with "=1" points to the 5^0 term, and a red box highlights the coefficient 4.)

основание системы счисления

разряды: 3 2 1 0

$$a_3 a_2 a_1 a_0 = a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p$$

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

$$0,6375 = 6 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,01 + 7 \cdot 0,001 + 5 \cdot 0,0001$$

Развёрнутая форма записи:

разряды: -1 -2 -3 -4

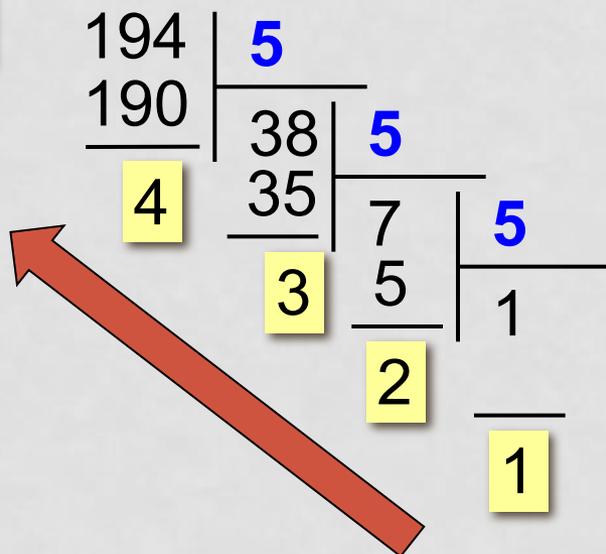
$$0, \overset{-1}{6} \overset{-2}{3} \overset{-3}{7} \overset{-4}{5} = 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$$

$$0, \overset{-1}{1} \overset{-2}{2} \overset{-3}{3} \overset{-4}{4}_5 = 1 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-3} + 4 \cdot 5^{-4}$$

перевод в десятичную систему

ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ В ЛЮБУЮ

10 → 5



$$194 = 1234_5$$

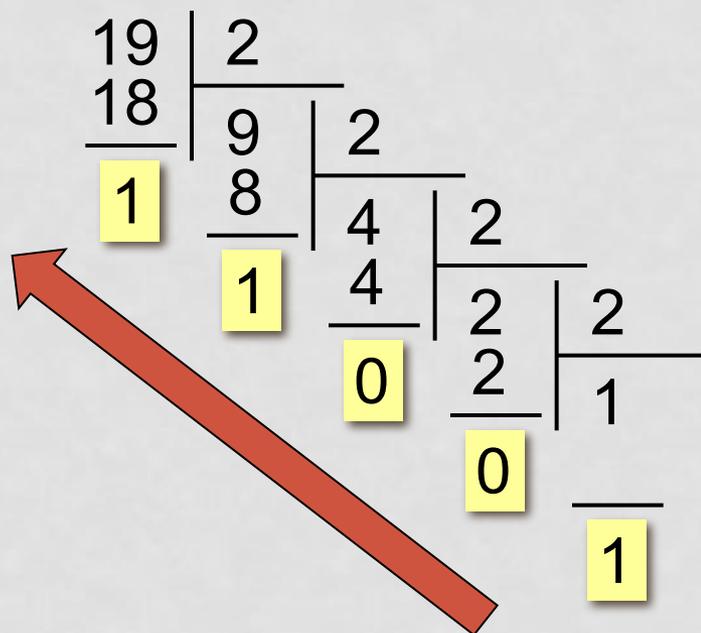
Делим число на p , отбрасывая остаток на каждом шаге, пока не получится 0. Затем надо выписать найденные остатки в обратном порядке.

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА

Основание (количество цифр): 2

Алфавит: 0, 1

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система
счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 **разряды**

$$\begin{aligned} 10011_2 &= 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + \\ &\quad 1 \cdot 2^0 \\ &= 16 + 2 + 1 = 19 \end{aligned}$$

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

10 → 2

0,8125

Вычисления	Целая часть	Дробная часть
$0,8125 \cdot 2 = 1,625$	1	0,625
$0,625 \cdot 2 = 1,25$	1	0,25
$0,25 \cdot 2 = 0,5$	0	0,5
$0,5 \cdot 2 = 1$	1	0

$0,8125 = 0,1101_2$

10 → 2

$0,6 = 0,100110011001\dots = 0,(1001)_2$



Бесконечное число разрядов!

ПЕРЕВОД ИЗ ДВОИЧНОЙ В ДЕСЯТИЧНУЮ

разряды 6 5 4 3 2 1 0

$$\begin{aligned} 1001101_2 &= 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 \\ &= 64 + 8 + 4 + 1 = 77 \end{aligned}$$