«Элементы теории ошибок измерений»

1. Измерения и их ошибки
2. Арифметическое среднее
3. Оценка точности результатов непосредственных равноточных измерений
4. Оценка точности функций измеренных величин
5. Понятие об уравнивании результатов геодезических измерений

1 Измерения и их ошибки

Измерением называют процесс сравнения измеряемой величины с другой, принятой за единицу измерения известной величиной.

Всякое измерение производят при наличии следующих пяти факторов:

1. объект измерения;
2. субъект измерения – наблюдатель;
3. мерный прибор;
4. метод измерения – совокупность правил и приемов при измерениях;
5. внешняя среда, в которой производят измерения.

Измерения:
- равноточные;
- неравноточные.

Отклонение результата измерения величины от ее точного значения называют *ошибкой (погрешностью) измерения*.

Погрешности различают:
- грубые;
- систематические;
- случайные.

Грубые ошибки или промахи, появляются вследствие недостаточного внимания наблюдателя или неисправности прибора и приводят к резкому искажению результатов измерений.

Систематическими или регулярными называют ошибки, накапливающиеся по определенному закону с одним знаком. Причины их возникновения должны быть заранее изучены.

Например, заранее может быть учтено влияние кривизны Земли на точность определения вертикальных расстояний, влияние температуры воздуха и атмосферного давления и т.д.

Если не допускать грубых погрешностей и устранять систематические, то качество измерений будет определяться только *случайными* погрешностями, которые неустранимы, однако их поведение подчиняется законам больших чисел, поэтому их можно анализировать, контролировать и сводить к необходимому минимуму.

Свойства случайных погрешностей:

1) для данного вида и условий измерений случайные погрешности не могут превышать по абсолютной величине некоторого предела;
2) малые по абсолютной величине погрешности появляются чаще больших;
3) положительные погрешности появляются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные;
4) среднее арифметическое из случайных погрешностей одной и той же величины стремится к нулю при неограниченном увеличении числа измерений.

Разность между результатом измерения некоторой величины l и ее истинным значением X называют *абсолютной (истинной) погрешностью:*

$$\Delta = l - X.$$

Отношение абсолютной погрешности измеряемой величины Δ к самой этой величине l называют *относительной погрешностью:*

$$\xi = \frac{\Delta}{l}$$

2. Арифметическое среднее

$$\bar{x} = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \quad (1)$$

- среднее арифметическое результатов равноточных измерений одной и той же величины ($l_1, l_2, \ldots, l_n$)

X - истинное значение измеряемой величины. Ряд абсолютных погрешностей измерений:

$$\Delta_1 = X - l_1;\ \Delta_2 = X - l_2; \ldots;\ \Delta_n = X - l_n; \qquad (2)$$

Сложив правые и левые части уравнений (2), получим:

$$[\Delta] = nX - [l],$$

откуда $$X = \frac{[l]}{n} + \frac{[\Delta]}{n}. \qquad (3)$$

С увеличением числа измерений $\frac{[\Delta]}{n}$ будет стремиться к нулю, и, следовательно, при бесконечно большом числе измерений средняя арифметическая величина $\frac{[l]}{n}$ будет равна истинному значению X.

Поскольку на практике число измерений все же ограничено, то <u>среднее арифметическое</u> будет несколько отличаться от истинного значения измеряемой величины X, однако при всяком n <u>арифметическое среднее</u> считают более надежным значением измеряемой величины.

3. Оценка точности результатов непосредственных равноточных измерений

Под точностью измерений понимают качество измерений, определяющее близость их результатов к точному (истинному) значению измеряемой физической величины.

Для оценки точности ряда измерений существует несколько критериев.

1. *Средняя ошибка* (V).

Среднее арифметическое из абсолютных значений случайных ошибок называется средней ошибкой, т.е.

$$V = [|\Delta_i|] / n ,$$

где $[|\Delta_i|] = |\Delta_1| + |\Delta_2| + ... + |\Delta_n|$

2. *Вероятная ошибка*. Вероятной ошибкой называется такое значение случайной ошибки, больше или меньше которого по абсолютной величине ошибки равновозможны.

Если все ошибки расположить в ряд по убывающим или возрастающим значениям абсолютных величин, то вероятная ошибка будет в середине этого ряда. Поэтому вероятную ошибку часто называют срединной.

3. *Относительная ошибка* равна отношению ошибки измерения к значению измеряемой величины.

4. *Средней квадратической ошибкой* называется величина, вычисляемая по формуле – корень квадратный из арифметического среднего квадратов истинных погрешностей:

Формула Гаусса: $m = \sqrt{\left[\Delta_i^2\right]/n}$

т.е. $[\Delta_i^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2$

Поскольку истинное значение измеряемой величины X не известно, то среднюю квадратическую погрешность m вычисляют по уклонениям υ_i отдельных результатов измерений l_i от арифметического среднего $\overline{x}$:

$\upsilon_i = l_i - \overline{x}$

Через уклонения арифметического среднего среднюю квадратическую погрешность определяют по формуле Бесселя:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\left[\upsilon^2\right]}{n-1}}.$$

5. *Предельная ошибка.* Величина средней, вероятной или средней квадратической ошибки, только тогда характеризует точность измерений, если известно *max* допустимое значение этих ошибок при данных условиях измерений. Все измерения с ошибками $> \Delta_{пред}$ отбрасывают как грубые и измерения повторяются заново.

Для теоретических расчетов $\Delta_{пред} = 3m$, на практике, учитывая ограниченное число измерений, принимают $\Delta_{пред} = 2m$.

Случайные ошибки, превышающие предельную, считают грубыми, а результаты измерений, содержащие такие ошибки, бракуют.

4. Оценка точности функций измеренных величин

В практике геодезических работ нередко искомые значения получают в результате вычислений как функции измеренных величин. В этом случае результаты будут содержать ошибки, значения которых зависят от вида функции и от ошибок аргумента.

Для функций нескольких независимых величин *z =f(x, y,…, t)* определяют по формуле:

$$m_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 m_t^2 .$$

Функция	Средняя квадратическая ошибка функции
1. $U = k \cdot x$, где k – безошибочное постоянное число; x – аргумент, полученный из измерений	$m_u = k \cdot m_x$
2. $U = x + y$	$m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$
3. $U = x - y$	$m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$
4. $U = k_1 \cdot x + k_2 \cdot y + \ldots + k_n \cdot w$	$m_u = \sqrt{k_1^2 \cdot m_x^2 + k_2^2 \cdot m_y^2 + \ldots + k_n^2 \cdot m_w^2}$
5. $U = x \cdot y$	$m_u = \sqrt{m_x^2 \cdot y^2 + m_y^2 \cdot x^2}$
6. $U = x / y$	$m_u = \sqrt{\left(m_x^2 \cdot y^2 + m_y^2 \cdot x^2 \right) \big/ y^4}$

Например, если площадь треугольника была вычислена по формуле: $P = \frac{1}{2}ah$, то средняя квадратическая ошибка определения площади будет вычисляться по формуле:

$$m_P = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 \cdot m_a^2 + a^2 m_h^2}$$

5. Понятие об уравнивании результатов геодезических измерений

Уравниванием называется совместная математическая обработка измерений, при которой выполняют контроль и оценку их качества, находят наиболее вероятные значения измеренных величин (углов, линий, превышений) и их функций (дирекционных углов, координат, высот).

Перед уравниванием измеренных величин выполняется оценка точности выполненных измерений в следующем порядке:

1. Определяют невязку по правилу: практическое значение измеренной величины минус теоретическое (истинное).
2. Сравнивают полученную невязку с предельно допустимым значением.
3. Если полученная невязка меньше допустимого, то значит, что измерения выполнены с удовлетворительной точностью, находят поправки и распределяют их в измеренные величины, т. е. выполняют уравнивание.
4. Если полученная невязка больше допустимого, то измерения содержат грубые ошибки, такие измерения устраняют.

Рассмотрим процедуру уравнивания на примере оценки точности угловых измерений в теодолитном ходе.

1. Находят угловую невязку теодолитного хода по формулам:

$$f_\beta = \Sigma\beta_{пр.} - \Sigma\beta_{теор.},$$

где $\Sigma\beta_{пр.}$ – сумма практическая (сумма измеренных углов в ходе);

$\Sigma\beta_{теор.} = 180^\circ (n-2)$ – для замкнутого хода;

$\Sigma\beta_{теор..} = \alpha_{нач.} - \alpha_{кон.} + 180^\circ n$ – для разомкнутого хода;

n – количество горизонтальных углов.

2. Определяют допустимость вычисленной угловой невязки.

$$f_\beta \leq f_{\beta доп.}$$

$$f_{\beta доп.} = 1' \sqrt{n}$$

3. Распределяют невязку поровну на все углы введением поправок δ_β. Поправки v_i вычисляют по формуле

$$\delta_\beta = f_\beta / n$$

и вводят с обратным знаком в значения измеренных углов, получая уравненные углы.

4. **Сумма уравненных углов должна быть равна теоретической.**

$$\boldsymbol{\Sigma\beta_{\text{уравн.}} = \Sigma\beta_{\text{теор.}}}$$

Пример: $\Sigma\beta_{\text{пр}} = 540°01{,}5'$, чему будут равны поправки, если количество углов в ходе равно 5? Находится ли величина невязки в допуске?

Спасибо за внимание!