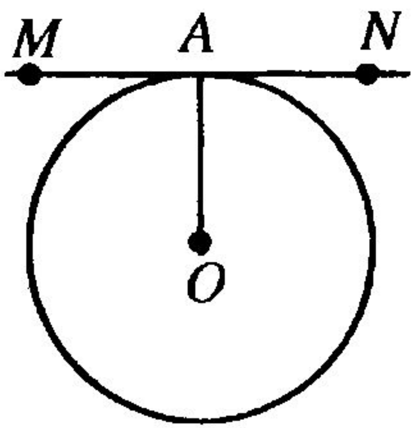
Повторение теории

1.

- Окружность.
- Касательная.
- Касательные и хорды
- Касательные и секущие

2.

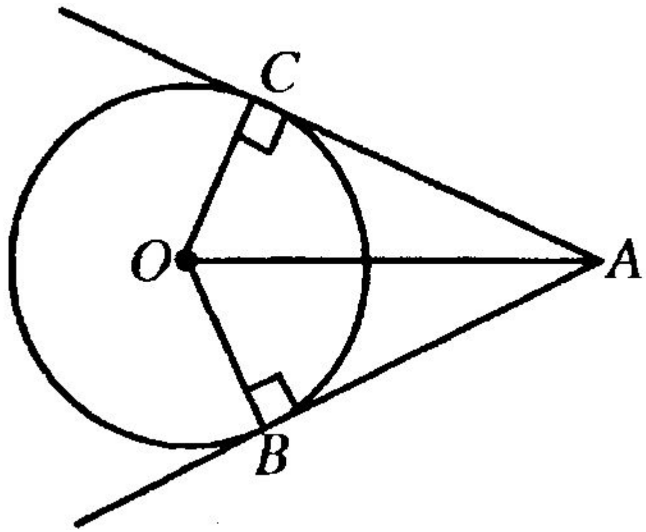
- Треугольник
- Вписанные, описанные и вневписанные окружности



если прямая MN касается окружности в точке A, то $MN \perp OA$

обратное утверждение:

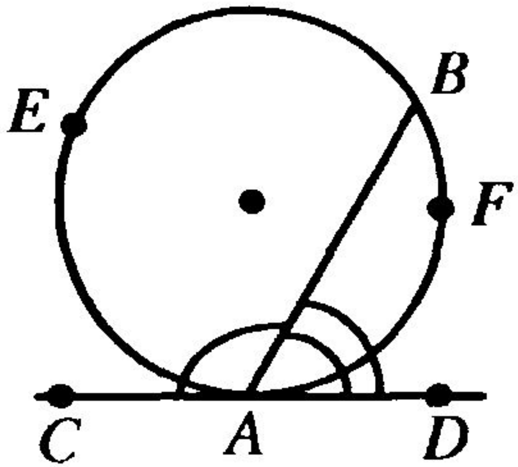
если прямая MN проходит через точку A окружности и $MN \perp OA$, то MN —касательная (O — центр окружности)



$AC = AB$,

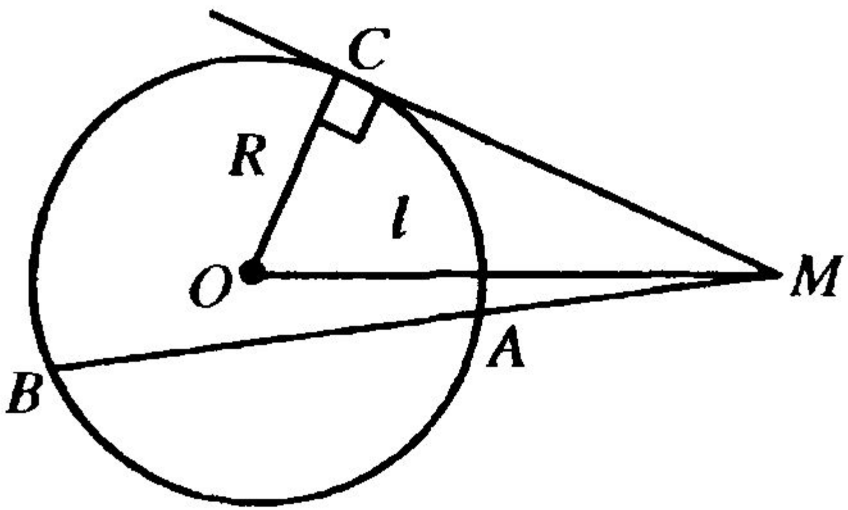
$\angle CAO = \angle BAO$

(O — центр окружности)

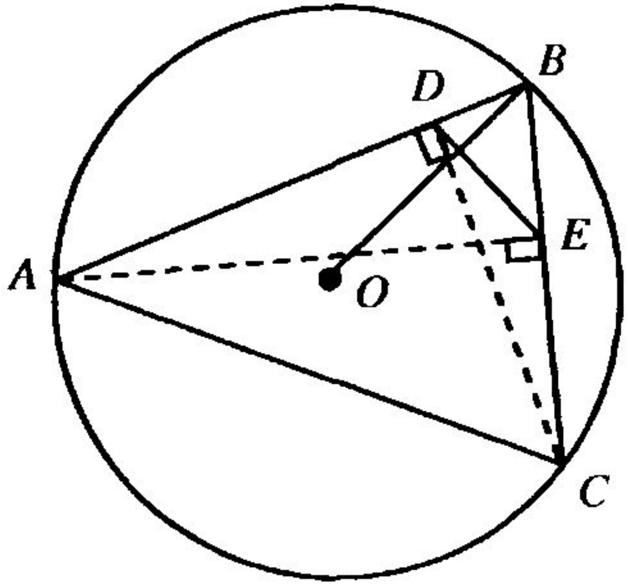


$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup AEB,$$

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \cup AFB$$

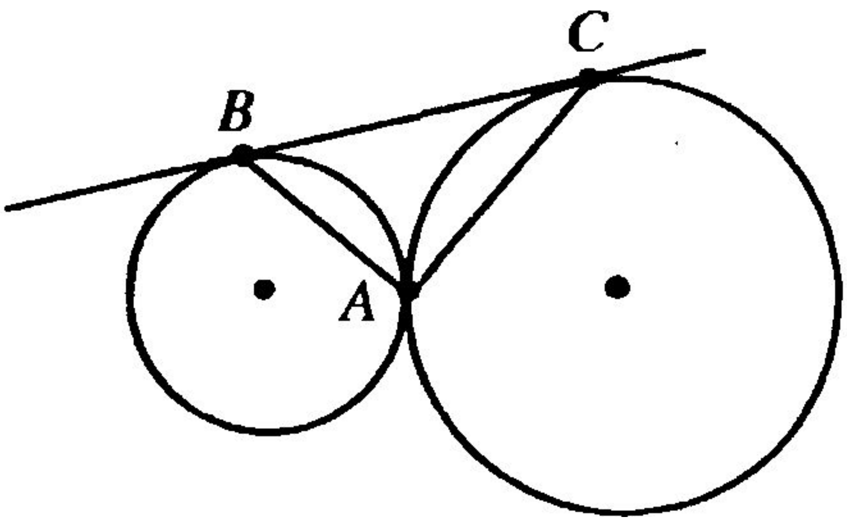


$$MA \cdot MB = MC^2,$$
$$MA \cdot MB = l^2 - R^2$$
(O — центр окружности)

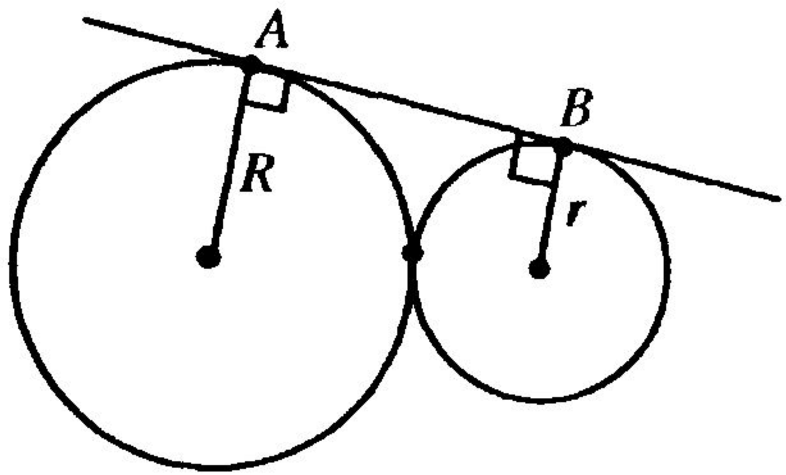


$OB \perp DE$

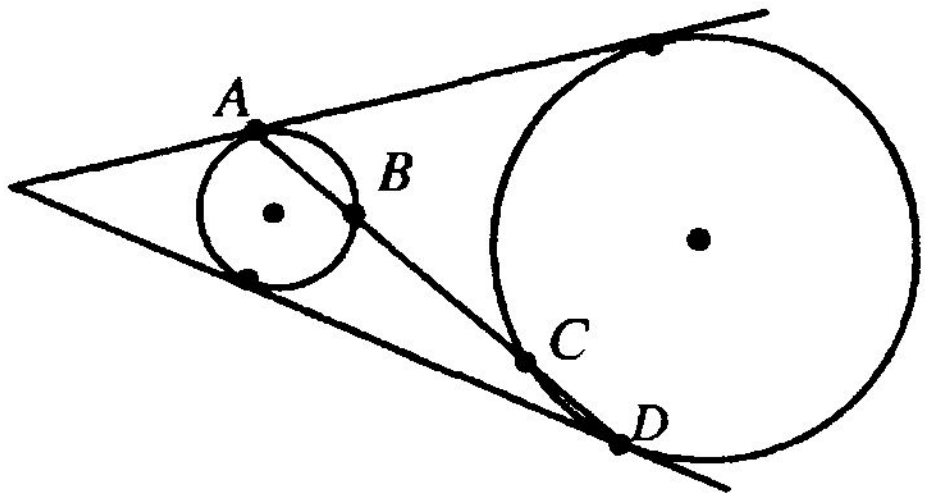
(O — центр окружности)



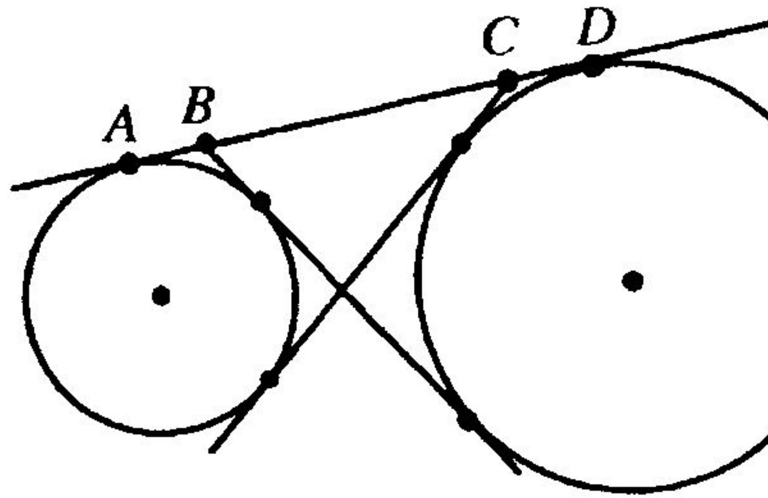
$\angle BAC = 90°$



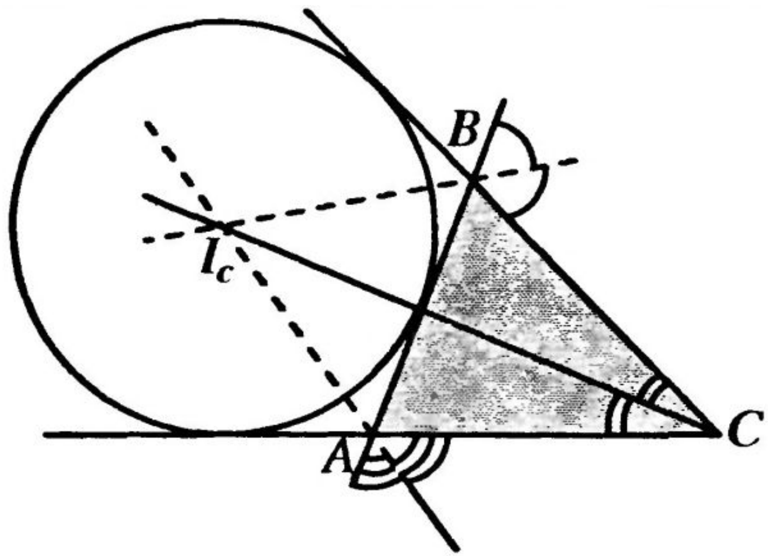
$$AB = 2\sqrt{R \cdot r}$$



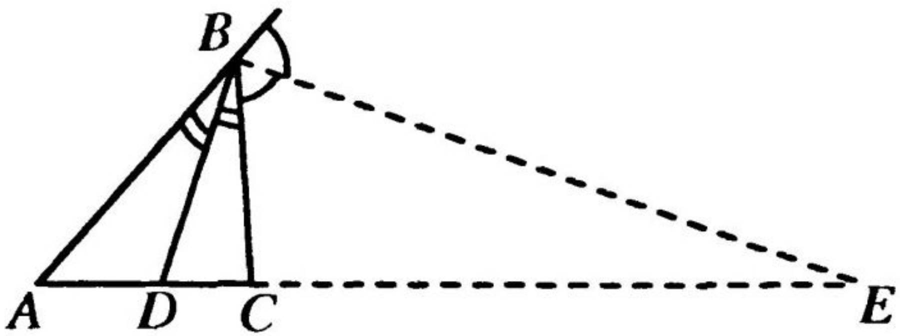
$$AB = CD$$



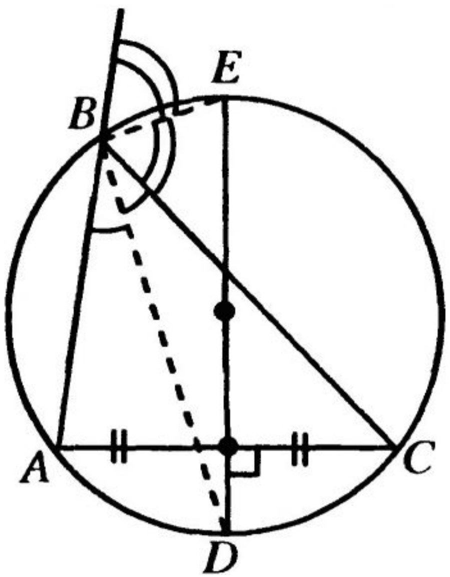
$$AB = CD$$



I_c — центр вневписанной окружности

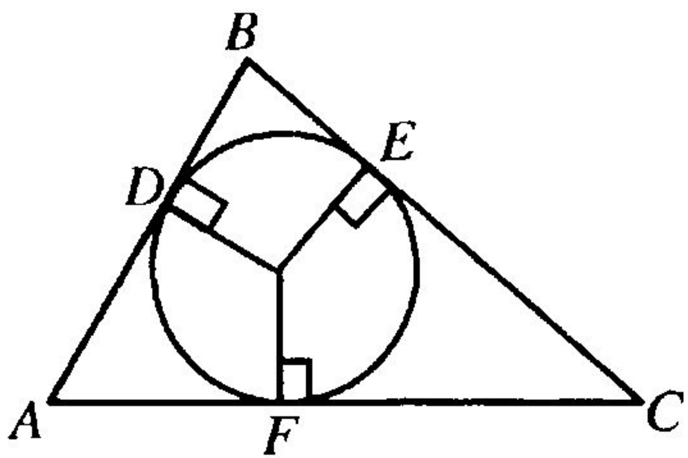


$BD \perp BE$



если D и E — точки пересечения окружности соответственно с внутренней и внешней биссектрисами вписанного треугольника ABC, выходящими из одной вершины B, то DE — диаметр окружности

$$r = \frac{S}{p}$$



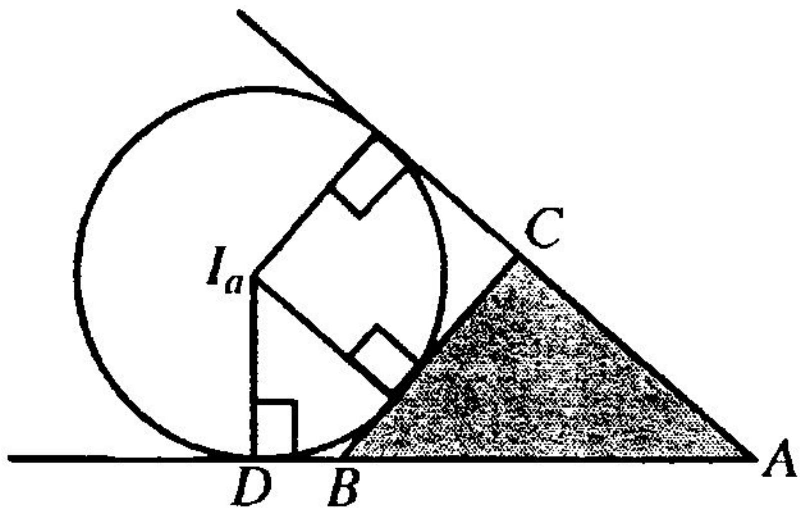
$$AF = AD = p - a,$$
$$BD = BE = p - b,$$
$$CE = CF = p - c$$

$$r = (p - a)\,\mathrm{tg}\,\alpha = (p - b)\,\mathrm{tg}\,\beta = (p - c)\,\mathrm{tg}\,\gamma$$

$$r=\frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{б}{2}+\operatorname{ctg}\frac{г}{2}}=c\frac{\sin\frac{б}{2}\sin\frac{г}{2}}{\sin\frac{б+г}{2}},\quad r=\frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{в}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=a\frac{\sin\frac{в}{2}\sin\frac{г}{2}}{\sin\frac{в+г}{2}},\quad r=\frac{b}{\operatorname{ctg}\frac{б}{2}+\operatorname{ctg}\frac{в}{2}}=b\frac{\sin\frac{б}{2}\sin\frac{в}{2}}{\sin\frac{б+в}{2}}$$

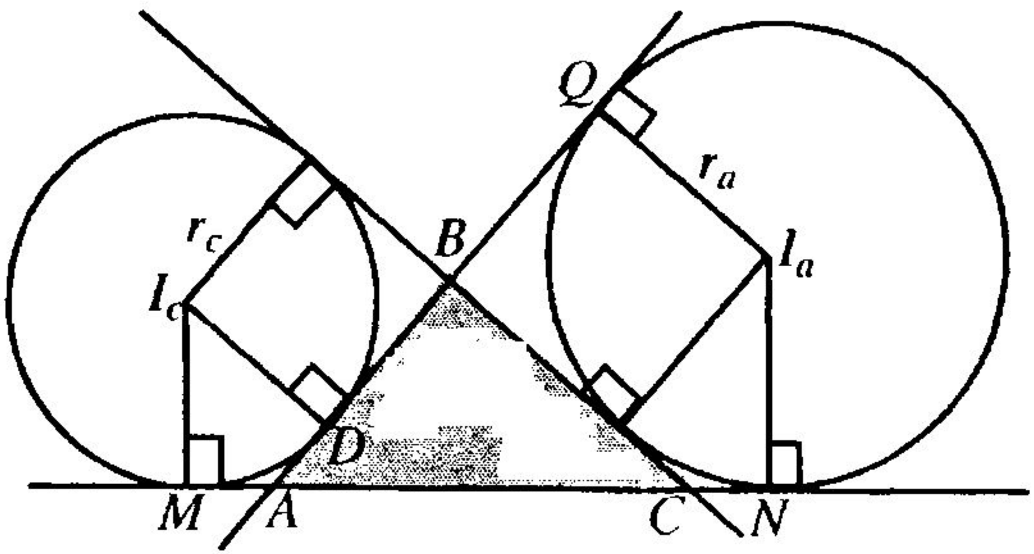
$$R = \frac{abc}{4S}$$



$$AD = p$$

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \; r_c = \frac{S}{p-c}$$

$$r_a = p \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},\ \ r_b = p \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2},\ \ r_c = p \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}$$



$$MN = a + c,$$
$$DQ = b$$

Опорные задачи

Опорная задача 1. Прямые *AB* и *AC* – касательные в точках *B* и *C* к окружности с центром в точке О. Через произвольную точку *X* дуги *BC* проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки *AB* и *AC* в точках *M* и *P* соответственно. Докажите, что периметр треугольника *AMP* и величина угла *MOP* не зависят от выбора точки X.

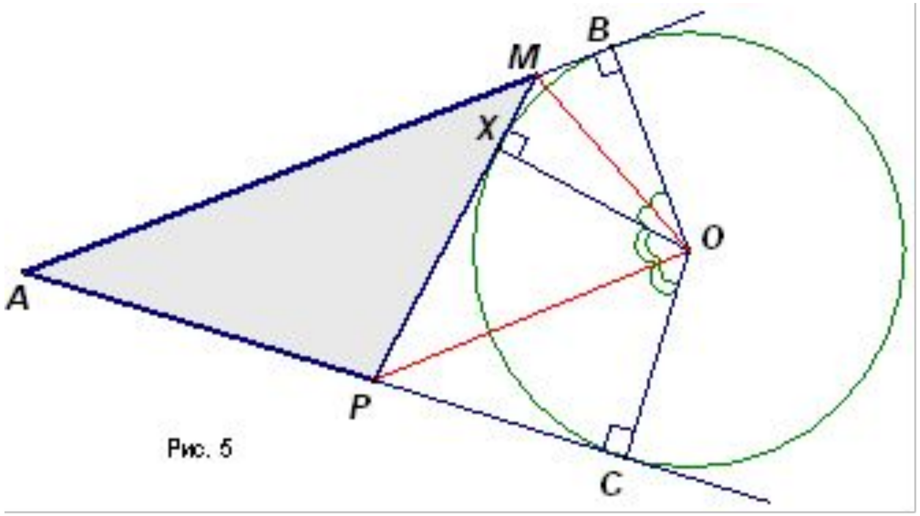


Рис. 5

Опорная задача *2а.* В треугольник со сторонами *a, b* и *c* вписана окружность, касающаяся стороны *AB* и точке *К.* Найти длину отрезка *АК.*

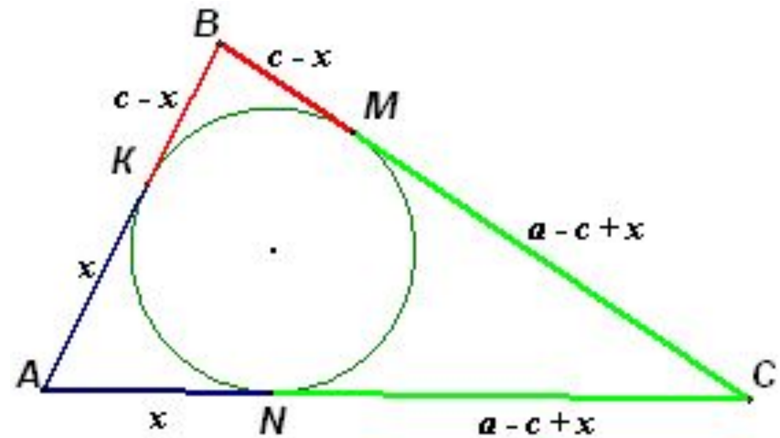


Рис. 6

Решение (рис. 6). Способ первый (алгебраический).

Пусть АК = AN = x, тогда BK = BM = c – x, CM = CN = a – c + x. AC = AN + NC, тогда можем составить уравнение относительно x: b = x + (a – c + x).

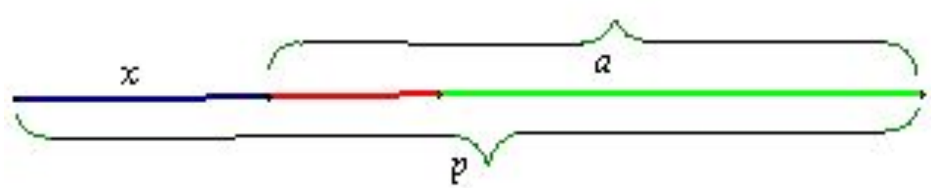
Откуда .

$$x = AK = \frac{b + c - a}{2} \quad (1)$$

Способ второй (геометрический).

Обратимся к схеме. Отрезки равных касательных, взятые по одному, в сумме дают полупериметр треугольника. Красный и зелёный составляют сторону а. Тогда интересующий нас отрезок x = p – a.

Безусловно, полученные результаты совпадают.

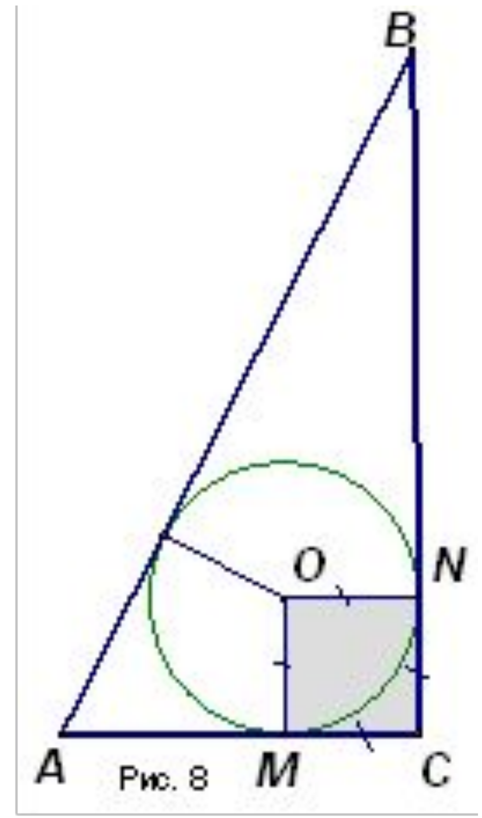


4. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c.

Решение (рис. 8).

Так как OMCN – квадрат, то радиус вписанной окружности равен отрезку касательной CN.

$$r = CN = \frac{a+b-c}{2}$$



5. Докажите, что точки касания вписанной и вневписанной окружности со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.

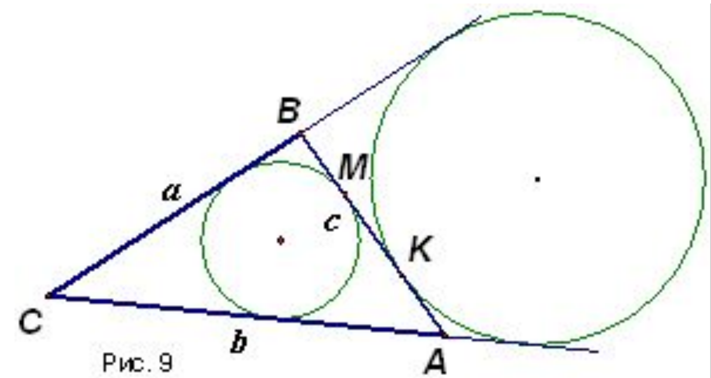


Рис. 9

Решение (рис. 9).

Заметим, AK – отрезок касательной вневписанной окружности для треугольника ABC. По формуле

$$AA_1 = \frac{AB + BC - AC}{2}$$

BM – отрезок касательной вписанной окружности для треугольника ABC. По формуле

$$BB_1 = \frac{AB + BC - AC}{2}$$

AK = BM,

а это и означает, что точки K и M равноудалены от середины стороны AB, что и требовалось доказать.

К двум окружностям проведены две общие внешние касательные и одна внутренняя. Внутренняя касательная пересекает внешние в точках A, B и касается окружностей в точках A1 и B1. Докажите, что AA1 = BB1.

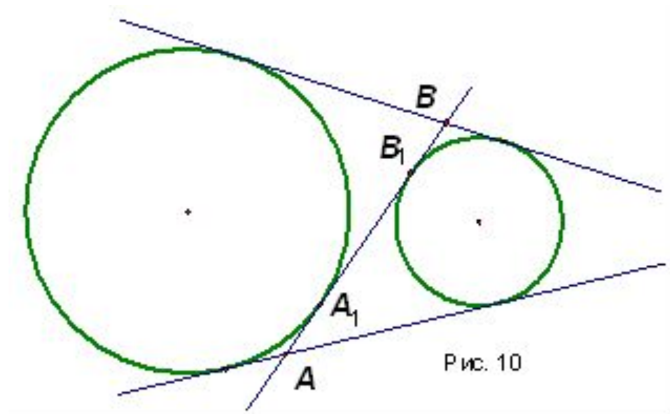


Рис. 10

Решение (рис. 10).

Стоп… Да что тут решать? Это же просто другая формулировка предыдущей задачи. Очевидно, что одна из окружностей является вписанной, а другая вневписанной для некоего треугольника ABC.
A отрезки AA1 и BB1соответствуют отрезкам AK и BM задачи 5.

Примечательно, что задача, предлагавшаяся на Всероссийской олимпиаде школьников по математике, решается столь очевидным образом.

Типовые задачи

Вневписанной окружностью треугольника называется окружность,
касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы вневписанных окружностей прямоугольного треугольника
равны 3 и 15. Найдите площадь треугольника

Предположим, что $r_c = 15$ и $r_a = 3$ (рис. 1). Тогда $p = r_c = 15$ и $p - b = r_a = 3$, откуда находим, что $b = 12$, $a + c = 2p - b = 30 - 12 = 18$. По теореме Пифагора $c^2 - a^2 = b^2$, или $(c - a)(c + a) = 144$, откуда $c - a = \frac{144}{c + a} = \frac{144}{18} = 8$. Из системы

$$\begin{cases} a + c = 18, \\ c - a = 8 \end{cases}$$

находим, что $a = 5$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

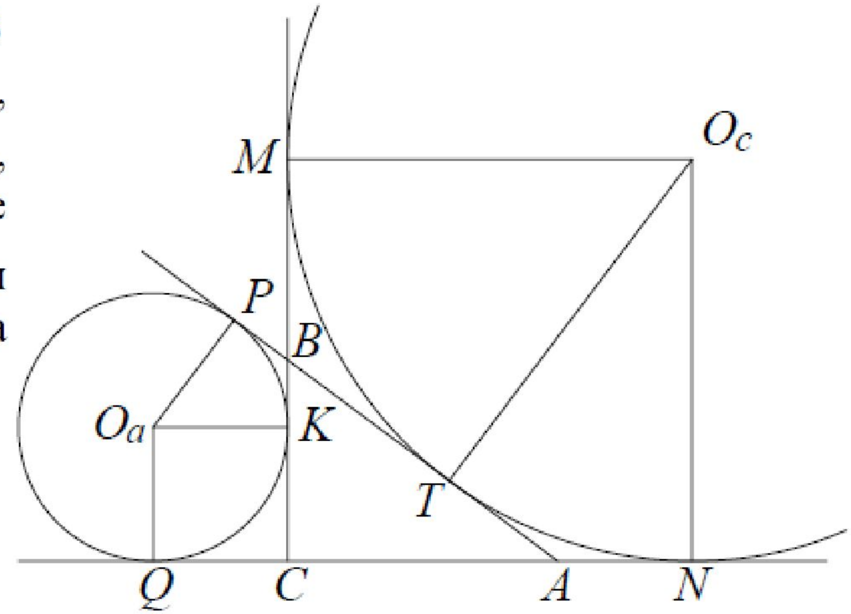


Рис. 1

Пусть теперь $r_b = 15$ и $r_a = 3$ (Рис 2)

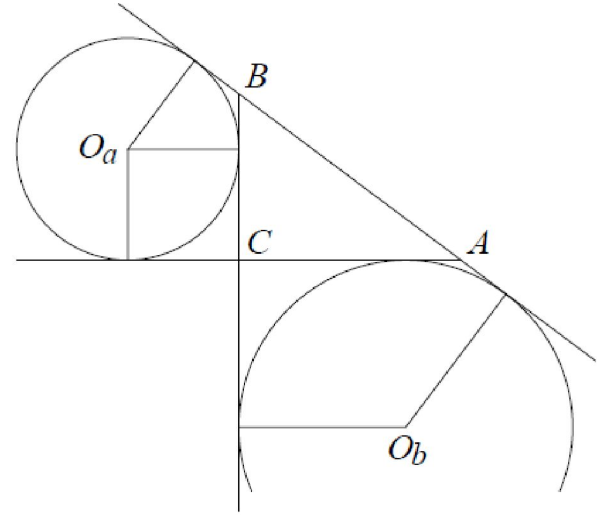


Рис. 2

Аналогично предыдущему Получаем, что

$$p - 15 = a,\ p - 3 = b,\ b - a = 12,\ 2p - 18 = a + b,\ a + b + c - 18 = a + b,$$

$$c = 18,\ a^2 + b^2 = 324.$$

Возведём в квадрат обе части первого уравнения системы $\begin{cases} b - a = 12, \\ a^2 + b^2 = 324 \end{cases}$

И вычтем почленно, результат из второго Получим, что $2ab = 324 - 144 = 180$.

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{180}{2} = 45.$

Точка O — центр правильного шестиугольника ABCDEF, в котором AC=10.5. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB, COD, EOF.

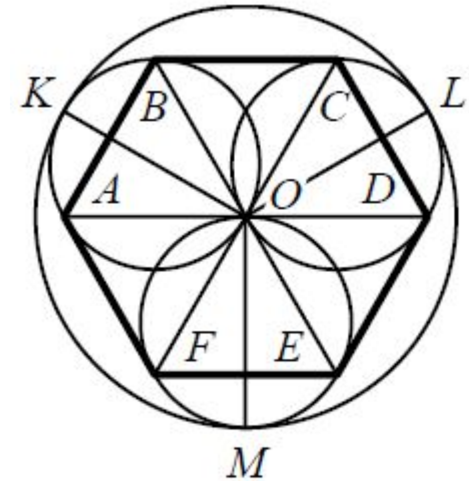


Рис.1

Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 1200, а основание AC=10.5, значит,

$$AB = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{21}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

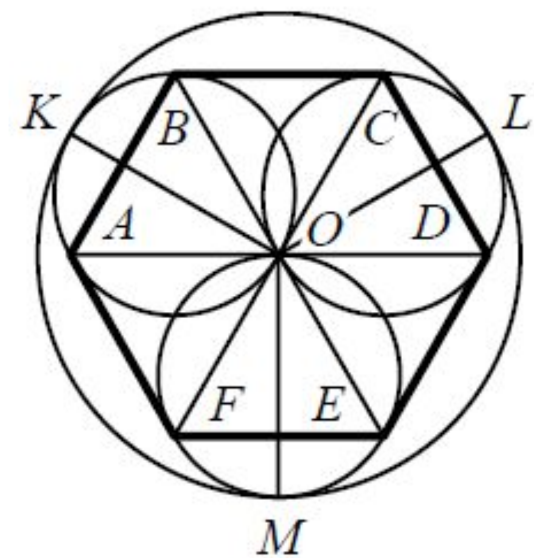
Треугольники AOB, COD, EOF - равносторонние со стороной $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

поэтому радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны

$$\frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7}{2}$$

Возможны два случая: либо искомая окружность касается всех трех данных внутренним образом (рис. 1), либо одной из данных — внутренним образом, а двух других — внешним (рис. 2).

Рассмотрим первый случай.
Пусть OK, OL, OM - диаметры описанных окружностей треугольников AOB, COD, EOF соответственно, OK=OL=OM =7.
Окружность S с центром O, проходящая через точки K,L,M касается внутренним образом окружностей, описанных около треугольников AOB, COD и EOF,
так как расстояние между центрами этих окружностей равно разности их радиусов.



Рассмотрим второй случай. ПустьQ — центр окружности радиуса x, касающейся внутренним образом описанной окружности треугольника COD и внешним образом — описанных окружностей треугольников AOB и EOF. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из центра N описанной окружности треугольника AOB на прямую OL. Тогда

$$NP = \frac{1}{2}OB = \frac{7\sqrt{3}}{4}, \quad OP = ON \cdot \sin\angle ONP = ON\sin 30 = \frac{1}{2}ON = \frac{7}{4},$$

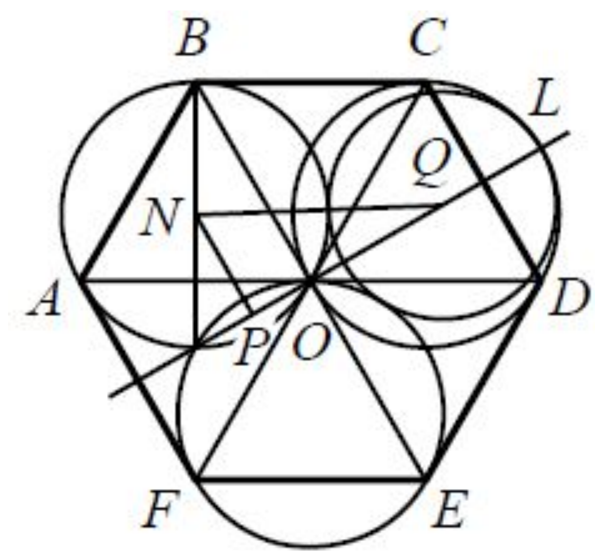
$$OQ = OL - QL = 7 - x, \quad PQ = OP + OQ = \frac{7}{4} + 7 - x = \frac{35}{4} - x.$$

Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому . $QN = x + \frac{7}{2}$ По теореме Пифагора $QN^2 = PQ^2 + NP^2,$ или

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{35}{4}-x\right)^2 + \frac{49\cdot 3}{16}, \quad \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{35}{4}-x\right)^2 = \frac{49\cdot 3}{16}$$

$$\left(x+\frac{7}{2}-\frac{35}{4}+x\right)\left(x+\frac{7}{2}+\frac{35}{4}-x\right) = \frac{49\cdot 3}{16}, \quad 2x - \frac{21}{4} = \frac{3}{4},$$

Откуда находим x=3.



Критерии оценивания

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины или рассмотрены обе конфигурации, для которых получены значения искомой величины, неправильные из-за арифметических ошибок	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3