Система сходящихся сил

Занятие №1

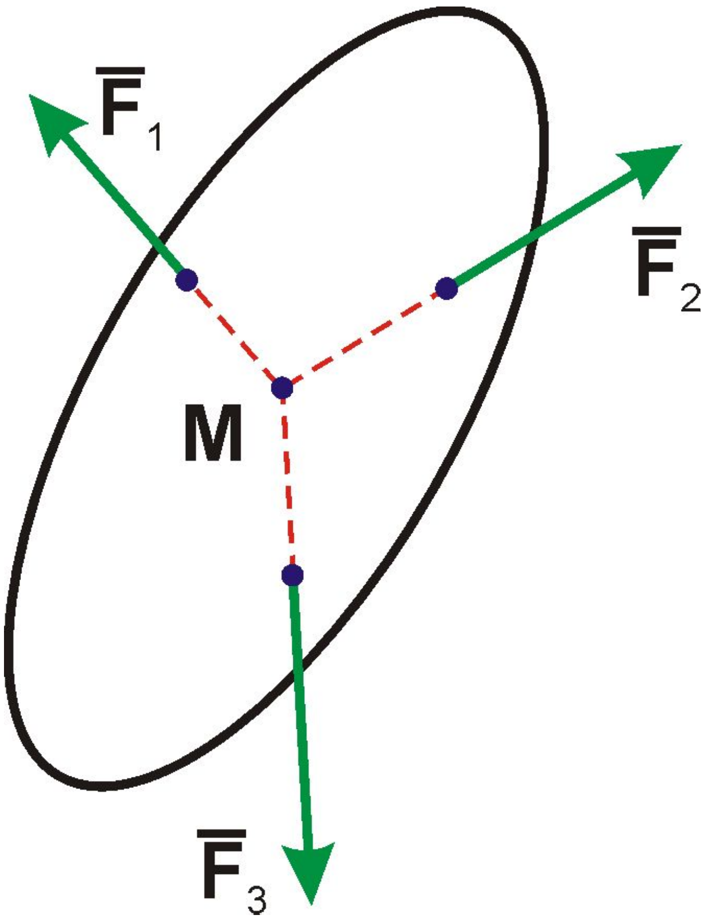
Основные понятия статики

- Совокупность сил, приложенных к какой-либо механической системе, называется системой сил.
- Две равные по модулю силы, приложенные в какой-либо одной точке тела и направленные в противоположные стороны, дают равнодействующую, равную нулю. Поэтому такая система сил называется эквивалентной нулю.
- Аксиома 1. Система двух равных по модулю сил, приложенных в двух точках абсолютно твердого тела и направленных по соединяющей эти точки прямой в противоположные стороны, находится в равновесии.
- Аксиома 2. Действие какой-либо системы сил не нарушится, если к ней прибавить или от нее отнять систему сил, эквивалентную нулю.

Аксиома отвердевания:

- *Равновесие любой механической системы не нарушается от наложения новых связей, в частности, оно не нарушается при внезапном превращении системы в абсолютно твердое тело.*

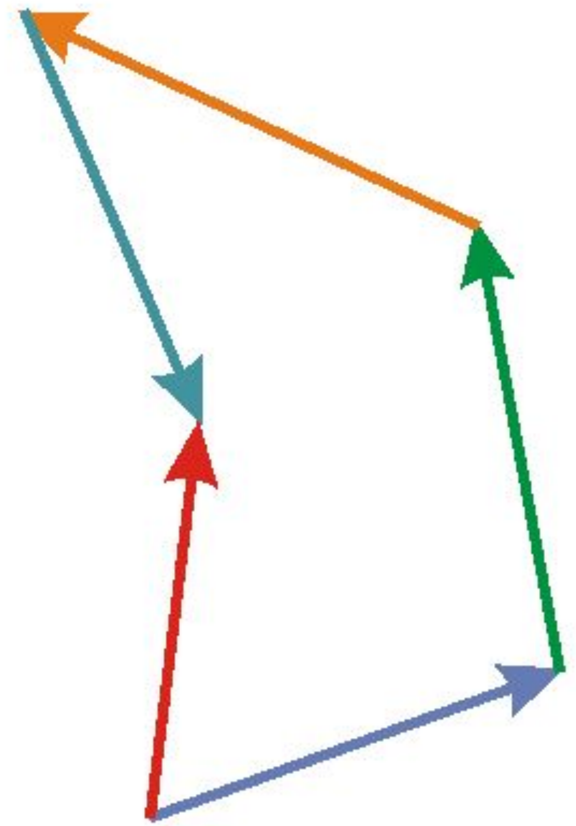
- Одной из простейших систем сил является система, все силы которой приложены в одной точке.
- Такая система сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме сил.
- К этому же случаю сводится и всякая система т.н. сходящихся сил, т.е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.



Система может быть заменена равнодействующей:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

- Простейший способ нахождения векторной суммы – сложение векторов по правилу многоугольника
- Полученная таким образом ломаная линия в случае сложения сил называется силовым многоугольником.
- Сумма представляет собой вектор, начало которого находится в начале первого вектора, а конец – в конце последнего.



- Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая равнялась нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

- При равновесии системы сходящихся сил **силовой многоугольник должен быть замкнутым.**

- В проекциях на оси координат условие равновесия дает три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

- Если сходящиеся силы расположены в одной плоскости, то число уравнений равновесия сокращается до двух.
- Задачи статики, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, называются <u>статически определимыми</u>. В противном случае задачи являются <u>статически неопределимыми</u> и для их решения необходимо привлекать дополнительные соотношения

- Для того, чтобы задачи на равновесие тел, находящихся под действием сходящихся сил, были статически определимыми, число неизвестных в общем случае не должно превышать трех, а когда силы лежат в одной плоскости - двух.

- Для решения задач крайне полезной оказывается <u>теорема о трех силах</u>:

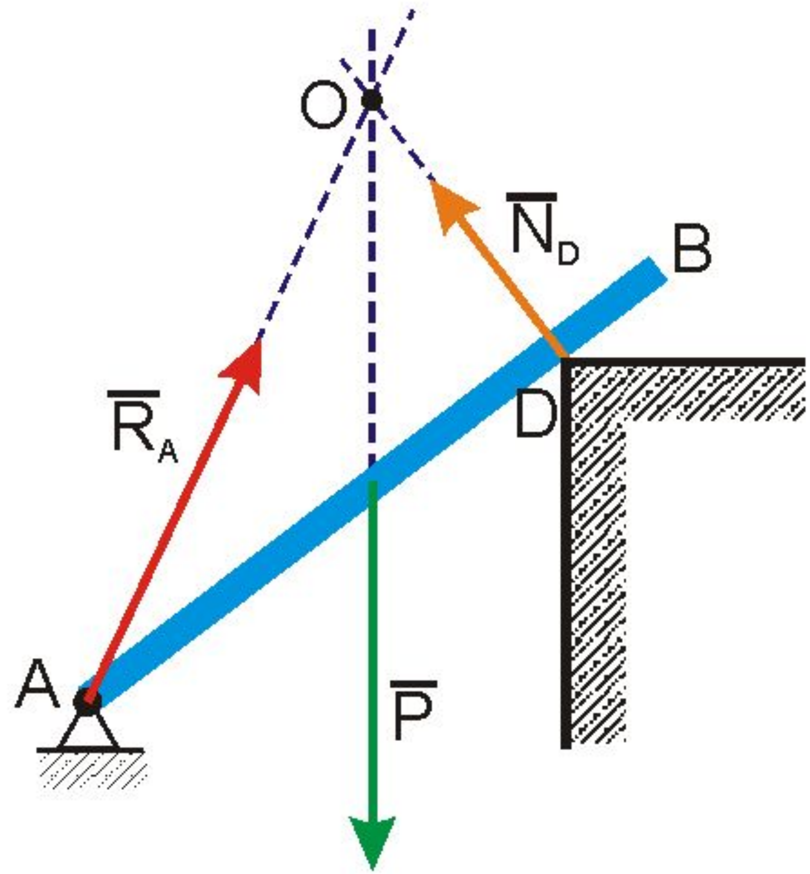
Если под действием трех сил твердое тело находится в равновесии, то

1. ***Вектора сил лежат в одной плоскости***
2. ***Линии действия этих сил пересекаются в одной точке.***

Данная теорема часто используется в случаях, когда какое-либо тело находится под действием плоской системы трех сил, и надо найти направление одной из них.

Пример

- Однородный брус AB весом **P**. Конец A закреплен шарниром, в точке D подставлен уступ.
- Брус находится под действием трех сил:
- силы тяжести **P**, приложенной в его центре и направленной вертикально вниз
- реакции опоры D $\mathbf{N}_D$, направленной перпендикулярно брусу
- реакции шарнира $\mathbf{R}_A$



Чтобы найти направление реакции $\mathbf{R}_A$, строят точку пересечения сил **P** и $\mathbf{N}_D$ – это точка O.

На основании теоремы о трех силах, вектор $\mathbf{R}_A$ должен лежать на прямой AO.

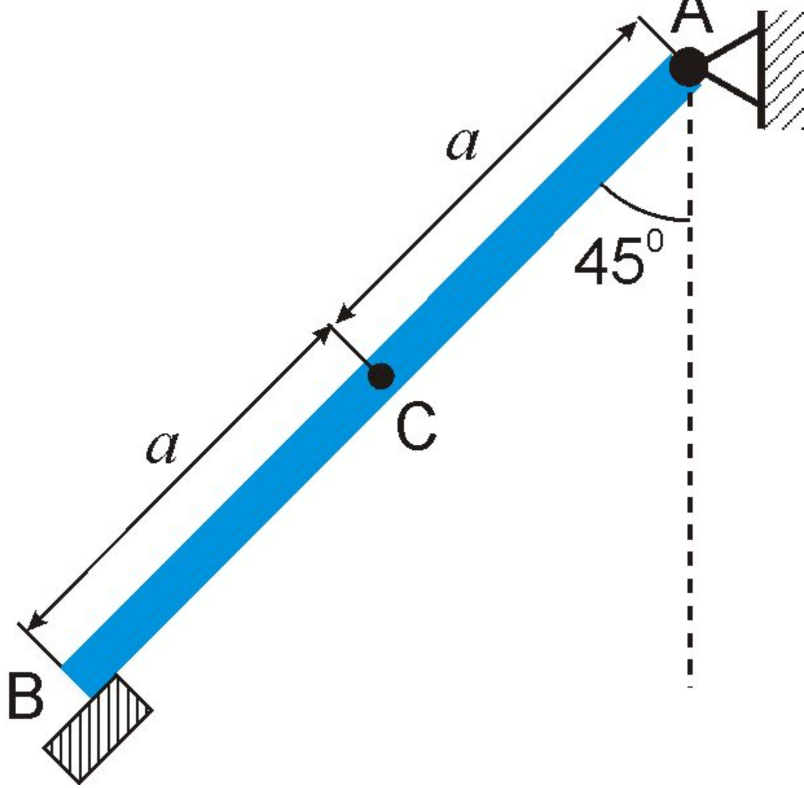
Порядок решения задач на равновесие плоской системы сходящихся сил

- изобразить все силы, действующие на тело, включая реакции опор и связей;
- если число сил равно трем – изобразить их в виде замкнутого треугольника, из которого чисто геометрическими соображениями найти неизвестные величины;
- если число сил больше трех – составить систему уравнений равновесия (через проекции сил) и решить ее. При этом систему координат следует выбирать таким образом, чтобы получившаяся система была как можно проще.

Примеры решения задач

Задача №2

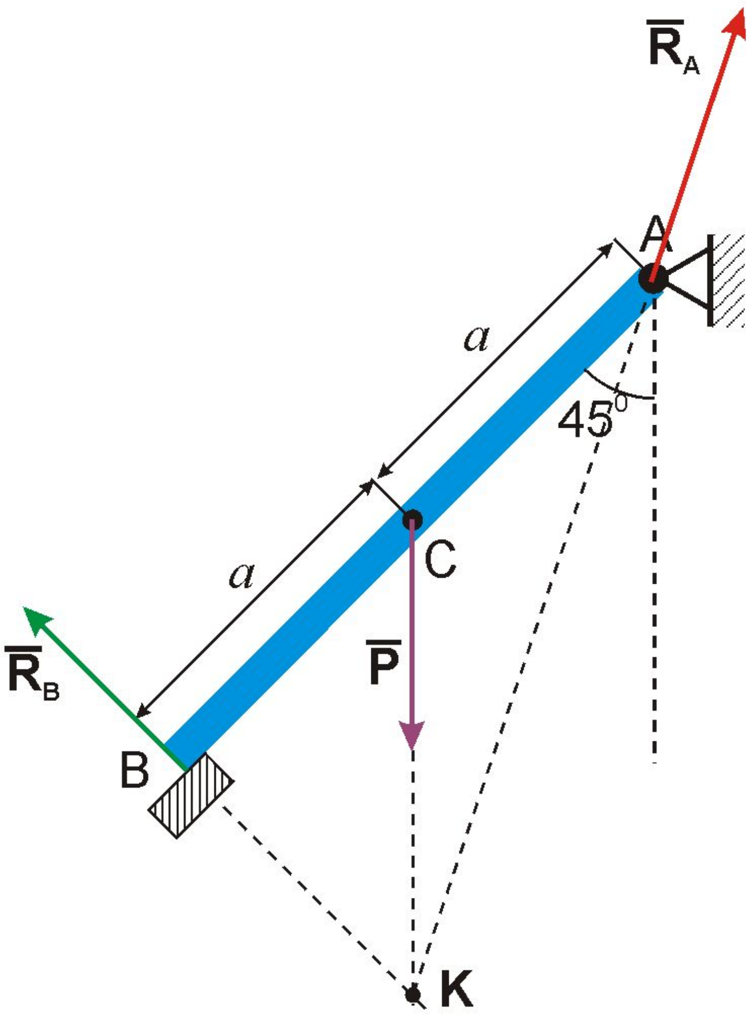
Оконная рама AB, изображенная в разрезе, может вращаться вокруг горизонтальной оси шарнира A и своим нижним краем B свободно опирается на уступ паза. Найти реакции опор, если дано, что вес рамы, равный 89 Н, приложен к середине C рамы, и угол между рамой и вертикалью равен 45°

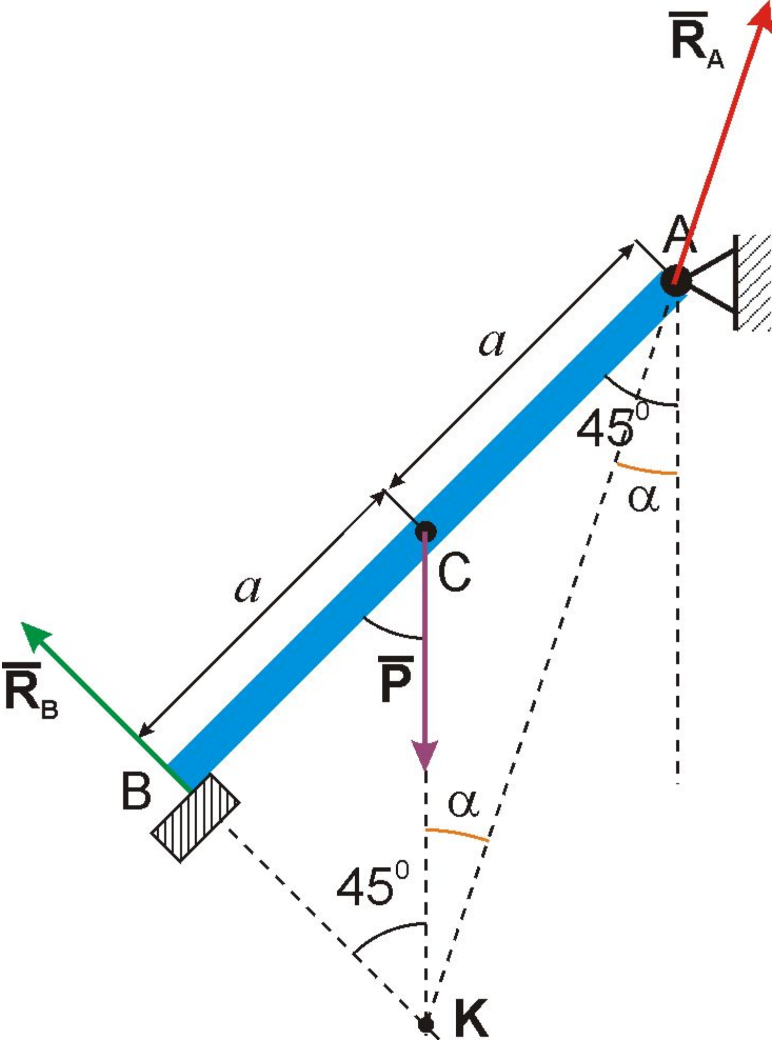


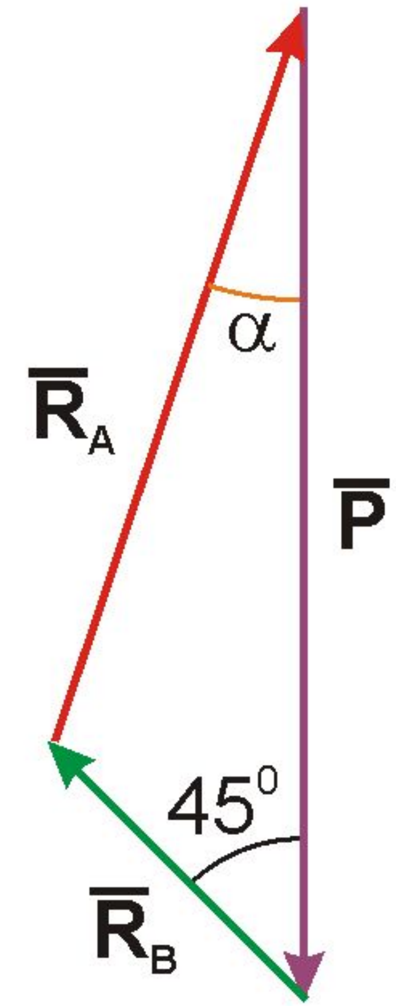
Силы, действующие на раму:

- вес рамы **P**, приложенный в точку С и направленный вертикально вниз,
- реакция уступа В **R**$_B$, направленная вверх перпендикулярно раме АВ,
- реакция шарнира А **R**$_A$, направленная вверх по направлению, которое необходимо определить.

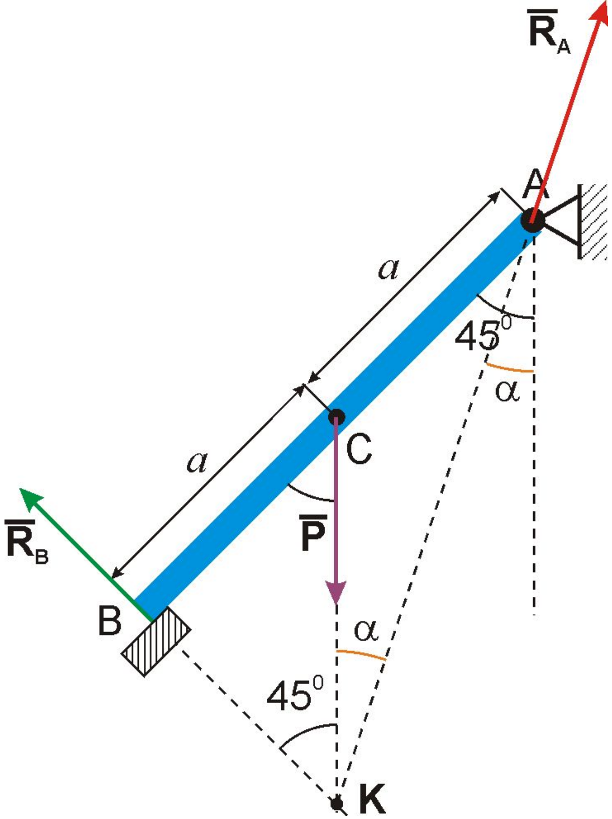
Для определения направления реакции шарнира А используется теорема о трех силах, согласно которой линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке

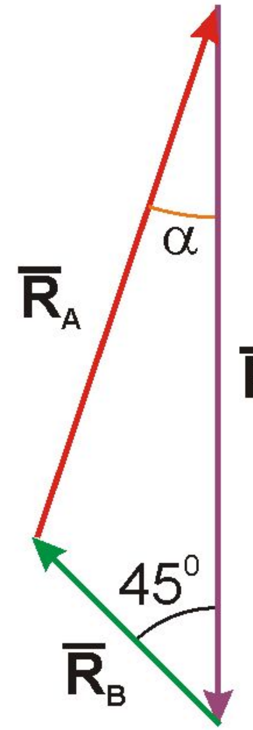






- После определения направления сил строится силовой треугольник с соблюдением углов между силами.





- Угол α определяется из ΔACK по теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = \dfrac{CK}{\sin\angle CAK}$
- Из рисунка видно: $AC = a; CK = a\sqrt{2}; \angle CAK = 45^0 - \alpha$
- После подстановки в теорему синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sin(45^0 - \alpha)}$ откуда

$$\sqrt{2}\cdot\sin\alpha = \sin(45^0 - \alpha)$$

Решение уравнения

$$\sqrt{2}\sin\alpha = \sin(45^0 - \alpha)$$

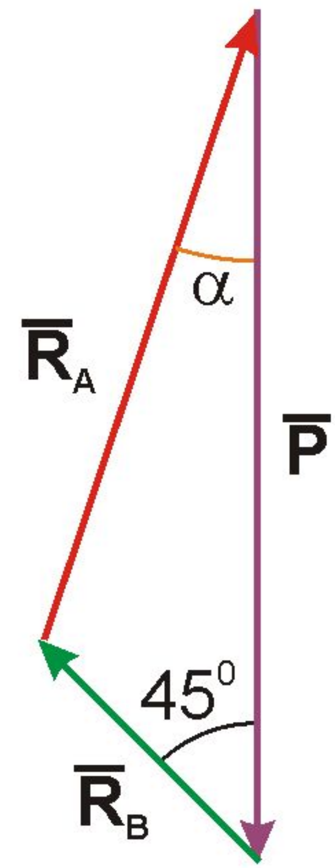
$$\sqrt{2}\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$$

$$2\sin\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha$$

$$3\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{1}{3}; \qquad \alpha \approx 18,5^0$$

Применяем теорему синусов к силовому треугольнику:



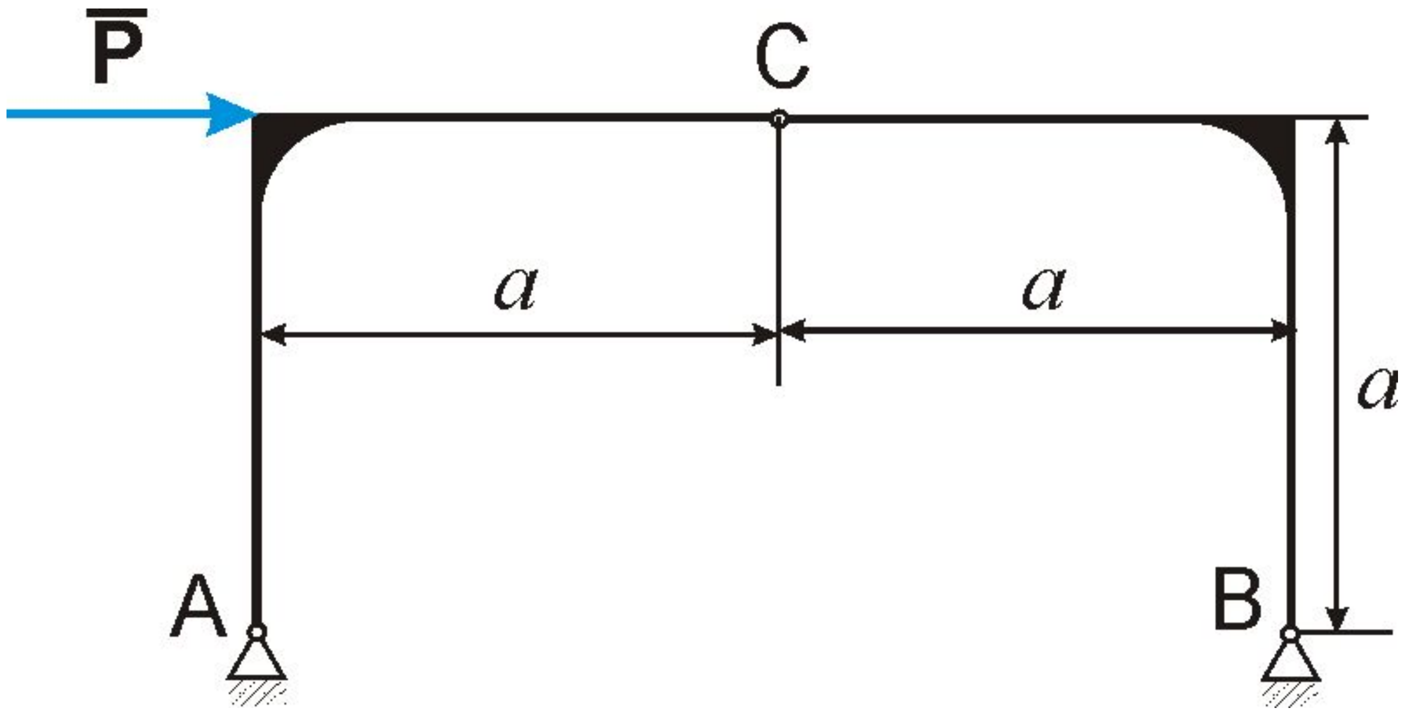
$$\frac{R_A}{\sin 45^0} = \frac{R_B}{\sin 18{,}5^0} = \frac{P}{\sin 116{,}5^0}$$

откуда

$$\frac{R_A}{\sin 45^0} = \frac{89}{\sin 116{,}5^0}; R_A = 89 \cdot \frac{\sin 45^0}{\sin 116{,}5^0} \approx 70{,}4 \text{ Н}$$

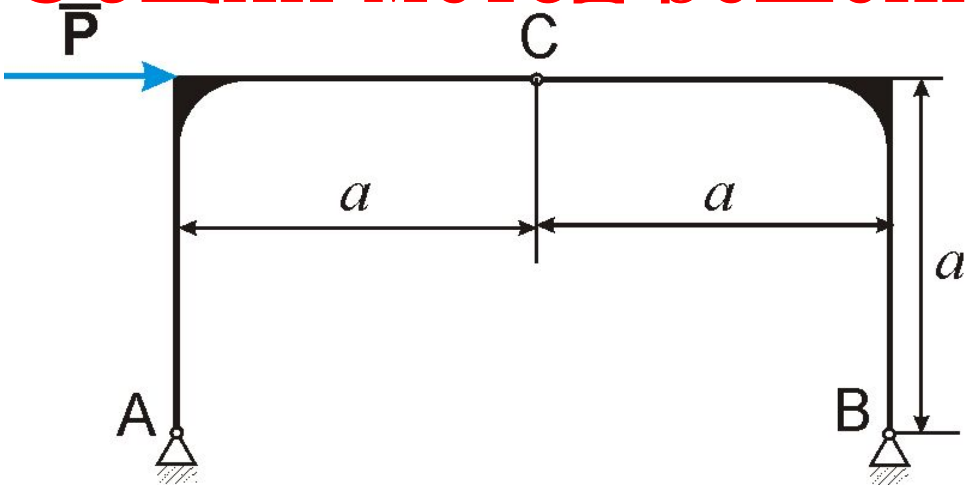
$$\frac{R_B}{\sin 18{,}5^0} = \frac{89}{\sin 116{,}5^0}; R_B = 89 \cdot \frac{\sin 18{,}5^0}{\sin 116{,}5^0} \approx 31{,}5 \text{ Н}$$

Задача №3



Для трехшарнирной арки, показанной на рисунке, определить реакции опор A и B, возникающие при действии горизонтальной силы ***P****. Весом арки пренебречь.*

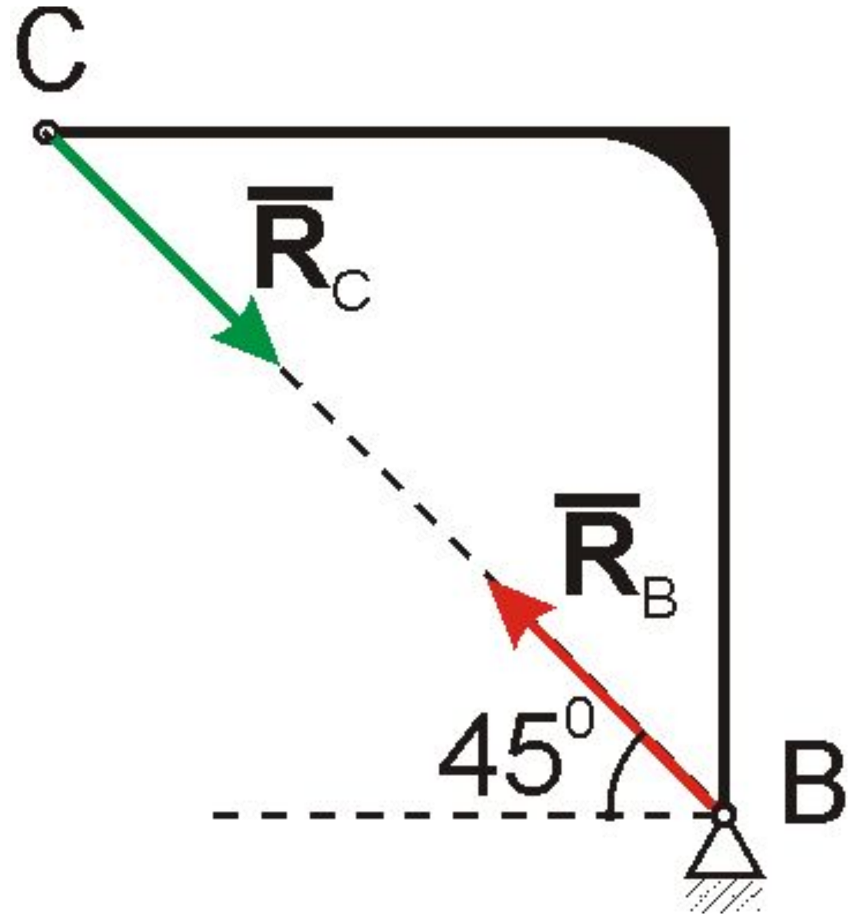
Общий метод решения подобных задач



•Систему тел разделяют на отдельные элементы (тела) и для каждого составляют уравнения равновесия. При этом влияние тел друг на друга учитывают через силы, действующие в местах разделения системы.

- В рассматриваемой задаче арка разделяется на две полуарки: левая АС и правая ВС.
- На левую часть действуют три силы: горизонтальная сила **Р**, реакция шарнира А и сила, с которой на эту часть действует полуарка ВС.
- На правую часть (полуарку ВС) действуют всего две силы: сила реакции в шарнире В и сила, с которой на нее действует левая полуарка АС.

- На основании первой аксиомы силы, действующие на правую полуарку, должны быть направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны и равны друг другу

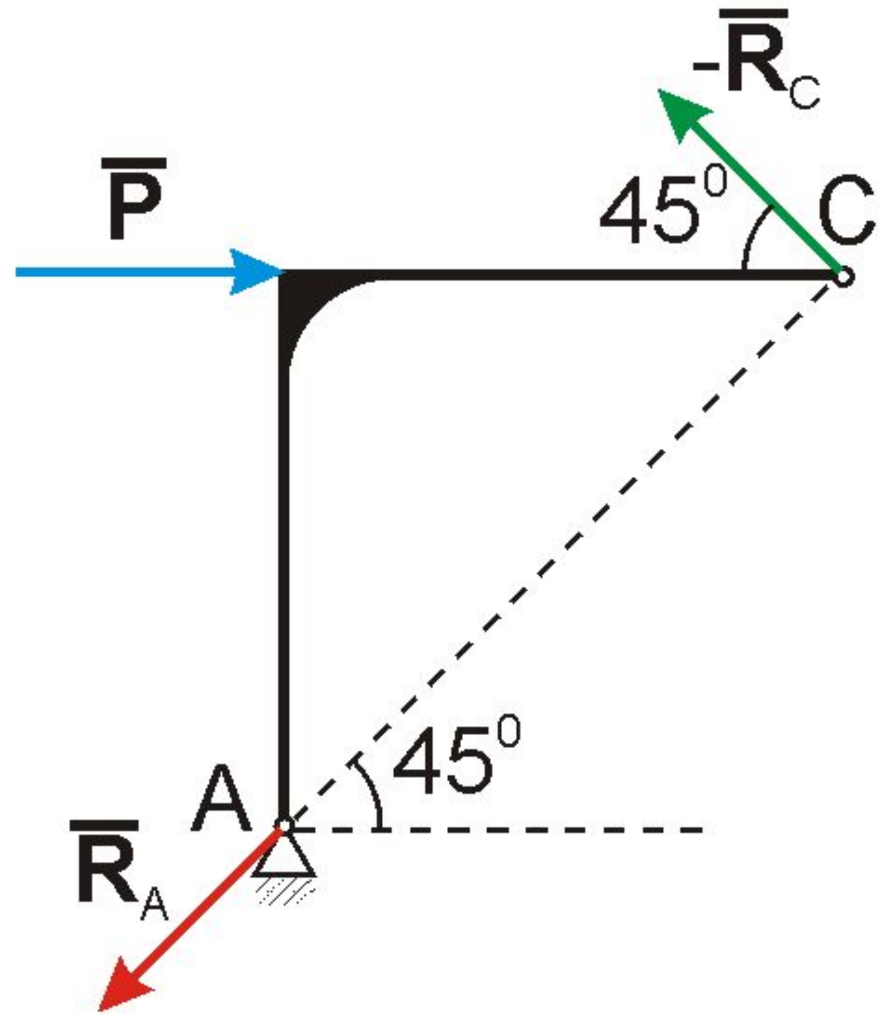


- $R_C = R_B$;

- Угол, под которым они направлены к горизонту, равен 45°.

Силы, действующие на левую полуарку

- Сила **P**
- Сила со стороны правой полуарки
- Согласно третьему закону Ньютона, эта сила равна по модулю и противоположна по направлению силе $\mathbf{R}_C$
- Сила $\mathbf{R}_A$
- Направление силы $\mathbf{R}_A$ определяется по теореме о трех силах.



- Для определения величин сил составляется силовой треугольник

- Из него видно. что

$$R_A = R_C = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

- Возвращаясь к правой полуарке, определяем R_B:

$$R_B = R_C = \frac{P}{\sqrt{2}}$$