

ПРОИЗВОДНАЯ В ТЕХНИКЕ, ФИЗИКЕ И ХИМИИ

*«... нет ни одной области в
математике, которая
когда-либо не окажется
применимой к явлениям
действительного мира... »*

П. Лобачевский

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ПРОИЗВОДНОЙ

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Её решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков – И. Ньютона и Г.В. Лейбница.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Лейбниц ввел термины :

1) «дифференциальное исчисление»

2) «интегральное исчисление»

$$1. (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x^n};$$

$$2. (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a;$$

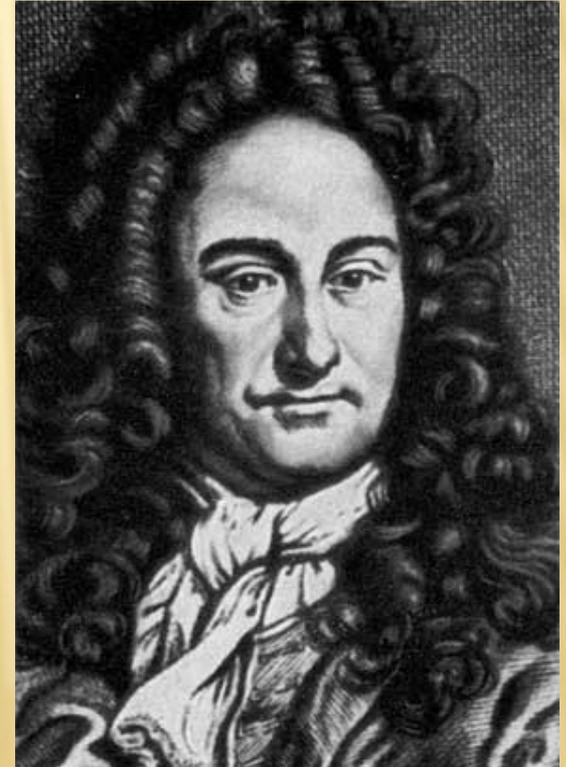
$$3. (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$4. (a^{mx})^{(n)} = m^n \ln^n a \cdot a^{mx};$$

$$5. (\sin x)^{(n)} = \sin \left[x + \frac{n\pi}{2} \right];$$

$$6. (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)};$$

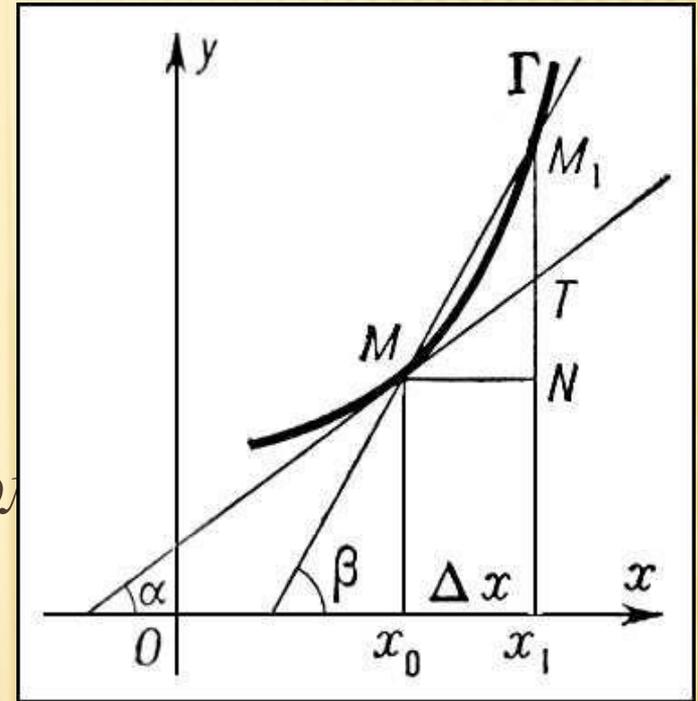
$$7. (\cos x)^{(n)} = \cos \left[\frac{n\pi}{2} + x \right].$$

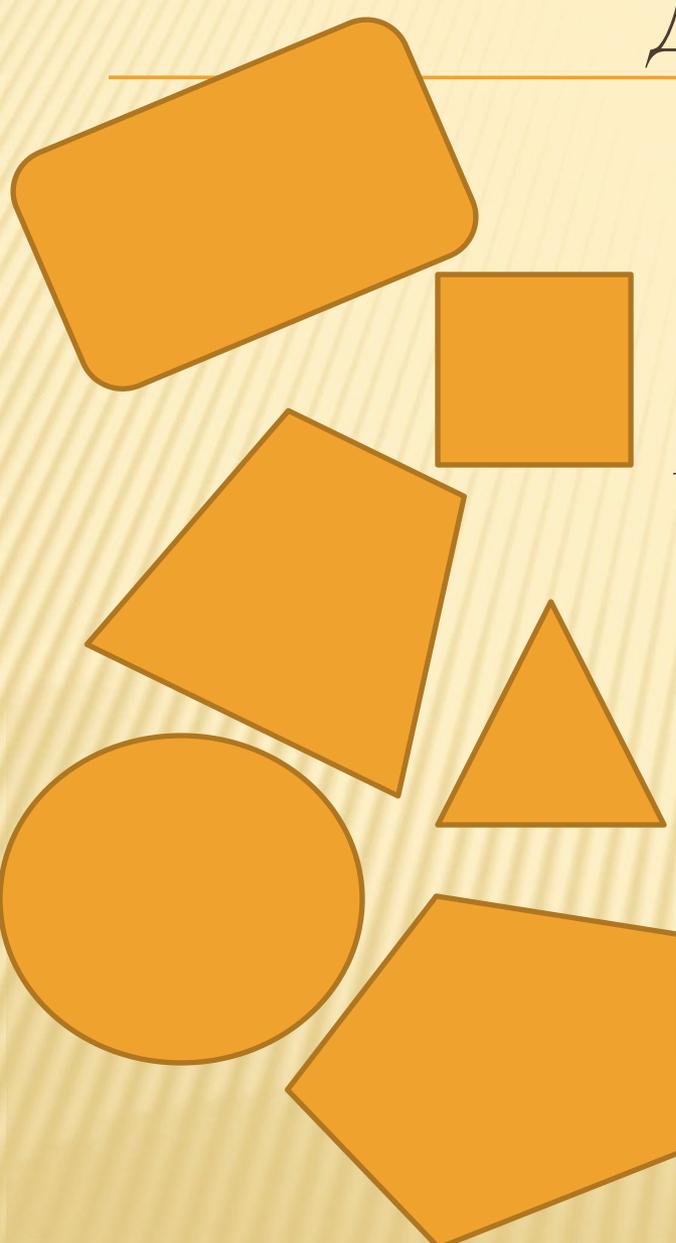


Процесс дифференцирования

Differentia по-латыни — «разделение», «раздробление». Процесс дифференцирования состоит в замене функции на малом участке ее дифференциалом, т. е. кусочком ее касательной.

Участок, на котором производится замена, Лейбниц дал название «бесконечно малый».



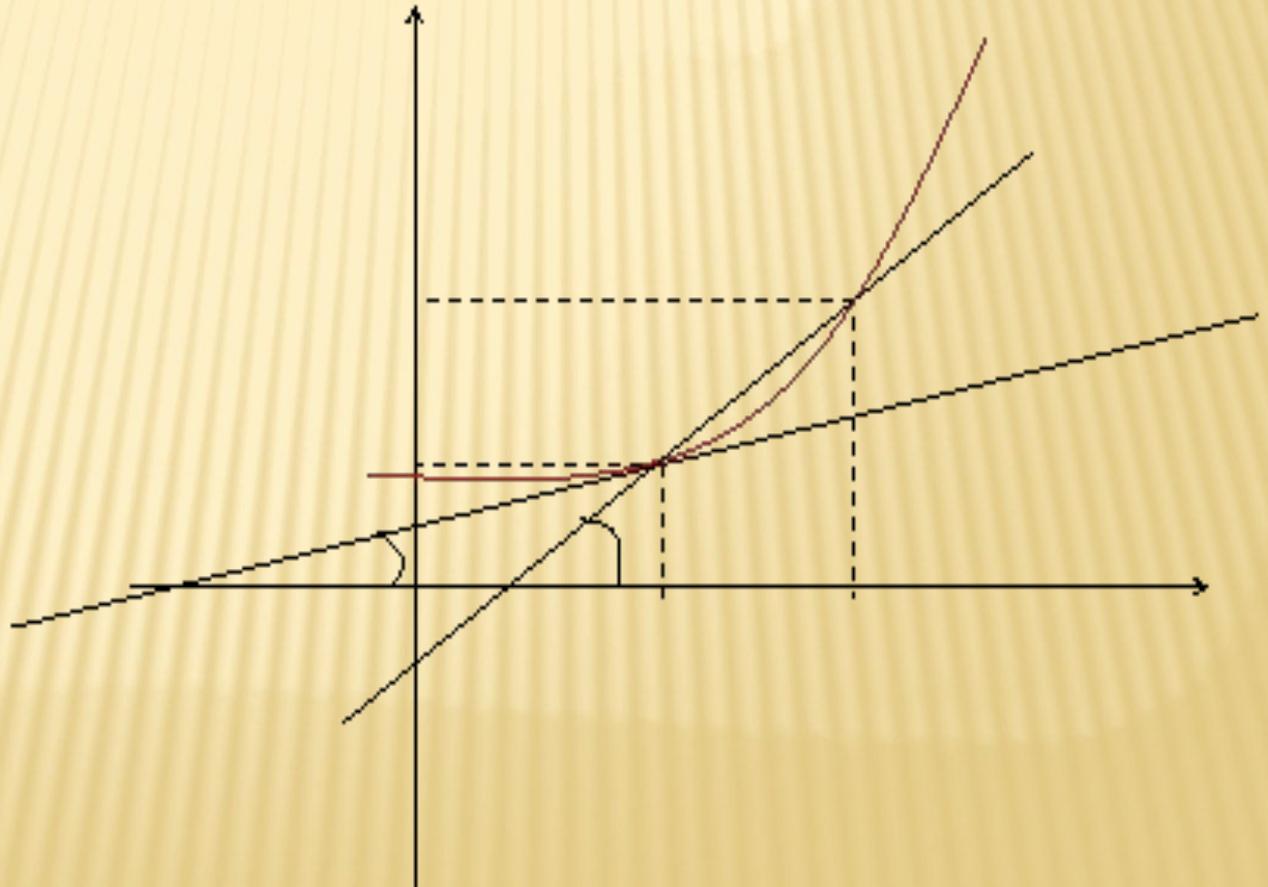


Дифференцирование, по

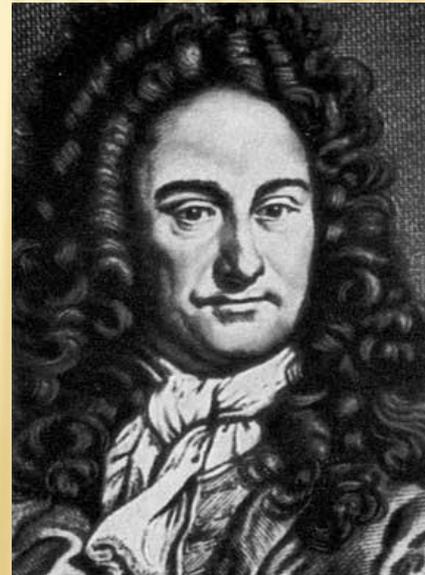
Лейбницу, — это расчленение функции на бесконечно малые элементы.

Integer по-латыни — «целый»; интегрирование — процесс объединения в целое малых элементов, из которых составлена фигура (нахождение площади, объема и т.п.).

Подход Лейбница был геометрическим: он стремился дать общий метод определения касательных к кривым и способ вычисления площадей фигур, ограниченных графиками функций.



- Ньютон пришел к анализу, исходя из необходимости описывать движение тел и развитие различных процессов.
- Суть дифференцирования, по Ньютону,— нахождение скорости тела по пройденному пути, интегрирование — обратная операция, а именно восстановление пути по скорости.



Механический смысл производной

Механический смысл производной заключается в том, что производная от координаты по времени есть скорость, а производная от скорости по времени - ускорение

$$v(t) = x'(t)$$

x - перемещение

v - скорость

$$a(t) = v'(t)$$

a - ускорение

t - время

примеры в физике

Материальная точка движется прямолинейно по закону $X(t)=t^3-4t^2$. Найдите скорость и ускорение в момент $t=5c$ (Перемещение измеряется в метрах)

Решение:

$$X(t)=t^3-4t^2, \quad t=5c$$

$$v=x'(t)=3t^2-8t$$

$$v(5)=3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 75 - 40 = 35 \text{ м/с};$$

$$a(t)=v'(t)=6t-8;$$

$$a(5)=6 \cdot 5 - 8 = 30 - 8 = 22 \text{ м/с}^2$$

Ответ: 35м/с, 22м/с²

ПРИМЕНЕНИЕ:

- 1) Охлаждение тела.**
- 2) Радиоактивный распад.**
- 3) Гармонические колебания.**
- 4) Нахождение закона движения тела по его ускорению(скорости).**

ОХЛАЖДЕНИЕ ТЕЛА.

Из курса физики известно, что скорость охлаждения тела $\frac{dT}{dt}$ пропорциональна разности $T - T_1$ температур тела и окружающей среды. Учитывая, что функция $T(t)$ убывающая, получим

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1),$$

где k — коэффициент пропорциональности.

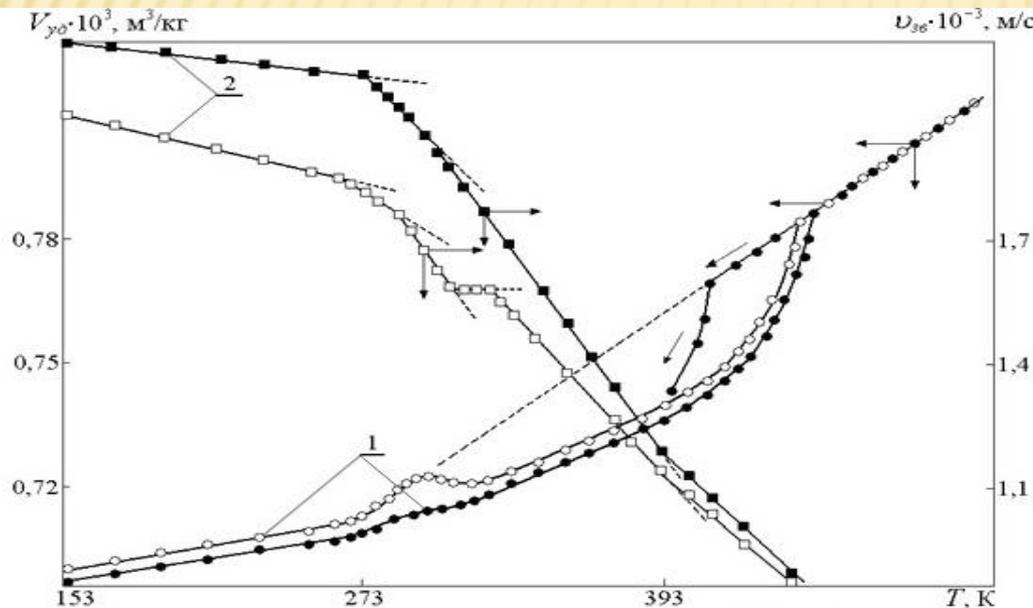


Рис. 6.5. Температурные зависимости удельного объема (1), скорости ультразвука (2) пентапласта закаленного (○, □) и нормализованного (●, ■)

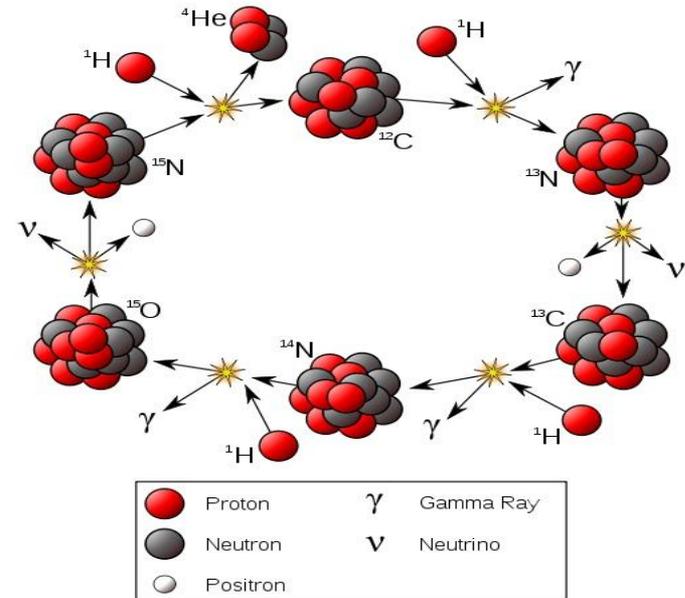
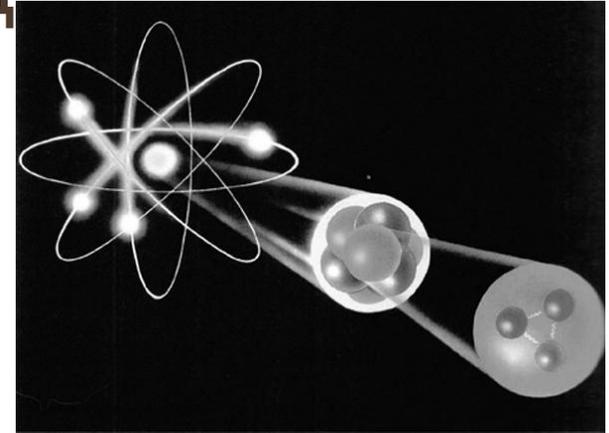
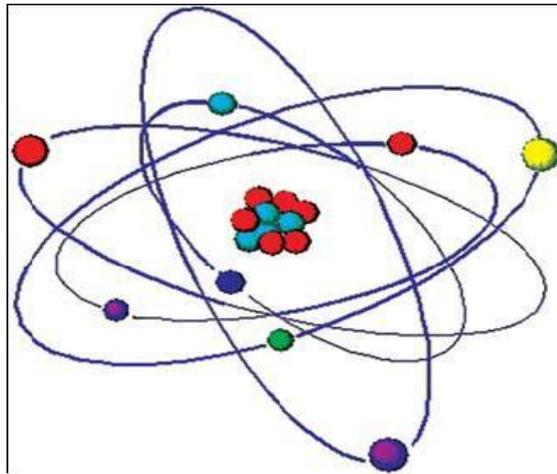


...быстрое охлаждением расплава в жидком азоте

РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД

4. Радиоактивный распад. Радиоактивное вещество в момент времени $t = 0$ имеет массу m_0 . Требуется найти закон $m = m(t)$ изменения массы этого вещества от времени t .

Из курса физики известно, что скорость радиоактивного распада $\frac{dm}{dt}$ пропорциональна имеющейся в данный момент массе вещества. Учитывая, что функция $m(t)$ убывающая, получим равенство $\frac{dm}{dt} = -km$, где k — коэффициент, зависящий от свойств взятого радиоактивного вещества.



ГРАНДИОЗНЫЕ УСПЕХИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И МАТЕМАТИКИ
В ПОСЛЕДУЮЩИЕ ТРИ СТОЛЕТИЯ
ВО МНОГОМ БЫЛИ ОПРЕДЕЛЕННЫ
ВЕЛИКИМ ОТКРЫТИЕМ НЬЮТОНА
И ЛЕЙБНИЦА.
