

Лекция 9

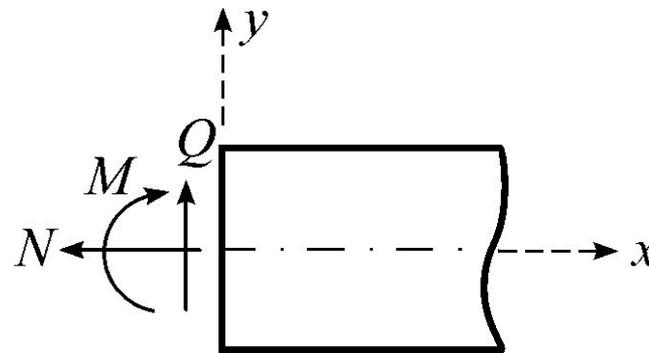
РАСЧЕТ

ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

1. Внутренние усилия пространственных систем

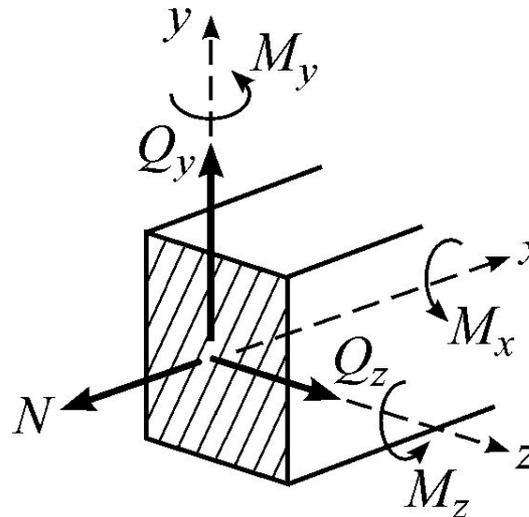
Все сооружения являются пространственными, и на них действуют нагрузки, лежащие в разных плоскостях. Поэтому и расчетные схемы сооружений должны быть пространственными.

Как мы знаем, в плоских стержневых системах определяются три внутренних усилия M, Q, N :



В пространственных стержневых системах таких усилий шесть:

- изгибающие моменты M_y и M_z
- крутящий момент $M_x = H$
- поперечные силы Q_y и Q_z
- продольная сила N



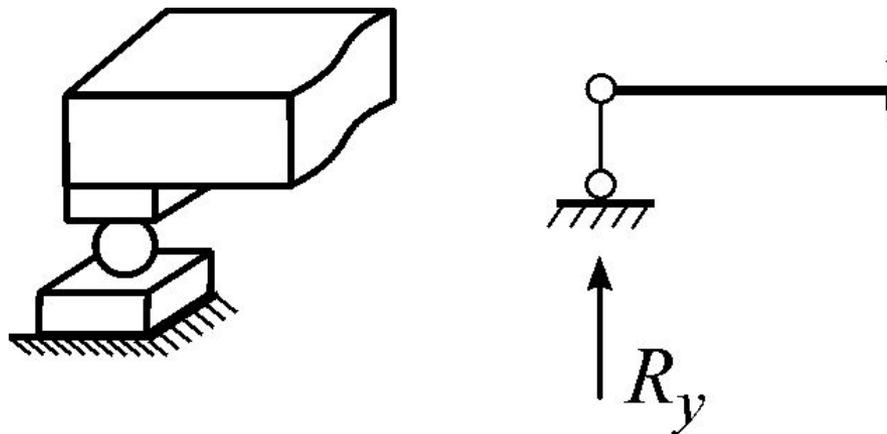
2. Опоры пространственных систем и их реакции

Пространственные системы опираются на пространственные опоры, которые имеют свои кинематические и статические особенности.

В пространственных системах могут быть 15 типов опор. Из них рассмотрим четыре опоры.

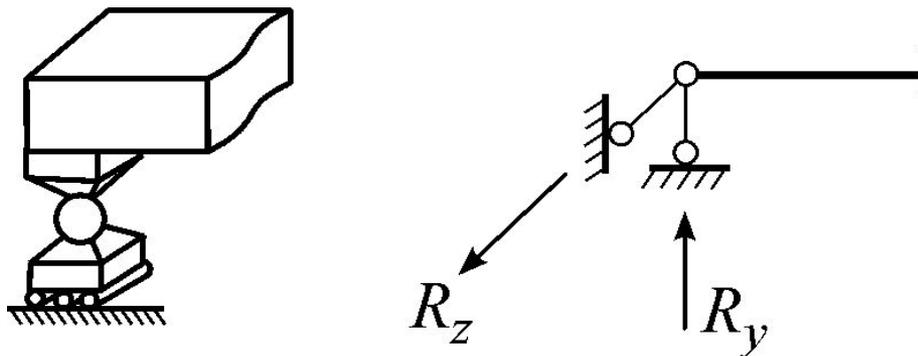
Шаровая подвижная опора

В расчетной схеме изображается как одна связь, в которой возникает опорная реакция. У этой опоры имеется пять степеней свободы, которые дают возможность поступательных перемещений в двух и поворотов в трех направлениях.



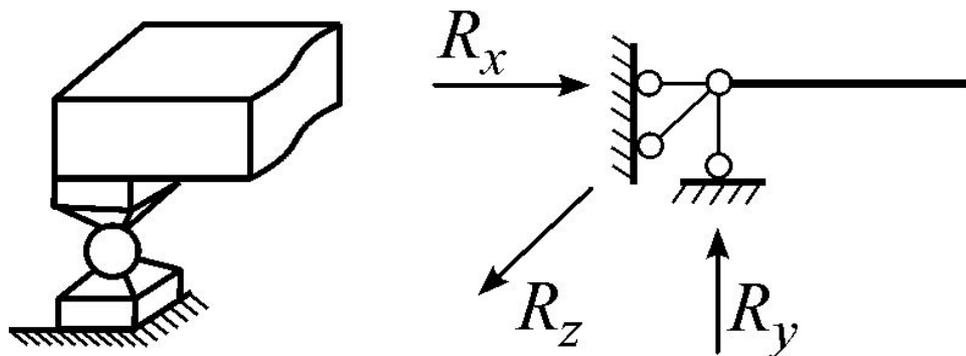
Шаровая опора на цилиндрических катках

В расчетной схеме изображается в виде двух связей с двумя опорными реакциями. У этой опоры имеется четыре степени свободы – одно поступательное перемещение и три поворота.



Шаровая неподвижная опора

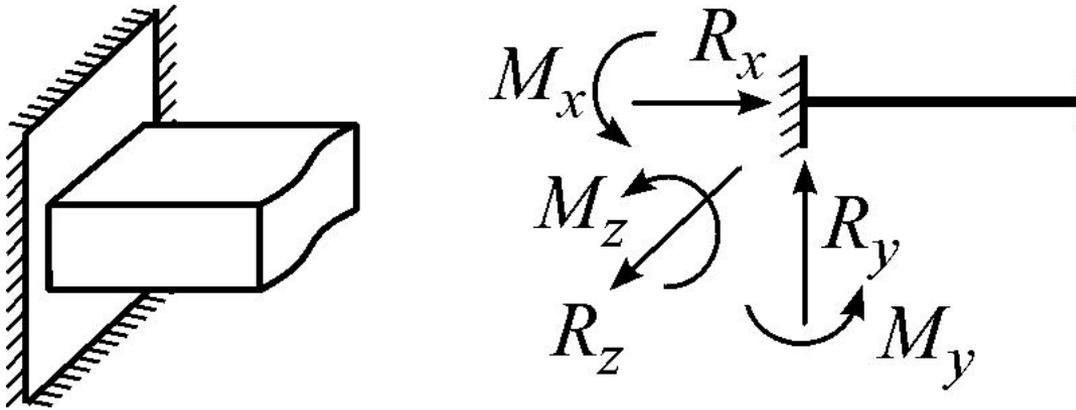
В расчетной схеме изображается в виде трех связей с тремя реакциями. У этой опоры есть три степени свободы – возможность поворота в трех направлениях.



Заделка

В расчетной схеме изображается как обычная заделка, в которой возникают три опорные реакции и три реактивных момента.

У заделки степеней свободы нет.



Кроме рассмотренных здесь, еще имеются 11 различных опор.

Реакции статически определимых пространственных систем определяются из шести уравнений равновесия.

Имеется **четыре варианта** записи уравнений равновесия.

Из них рассмотрим два варианта.

$$1. \Sigma X=0; \Sigma Y=0; \Sigma Z=0; \Sigma M_1=0; \Sigma M_2=0; \Sigma M_3=0.$$

Оси x , y , z не должны лежать в одной плоскости и быть параллельными; суммы моментов не обязательно составлять относительно тех же осей.

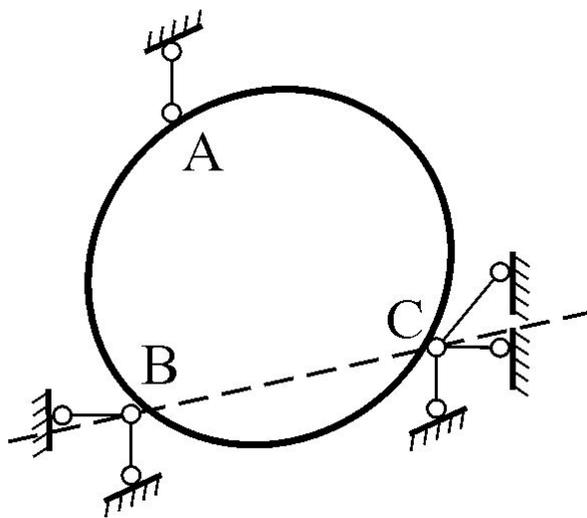
$$2. \Sigma M_1=0; \Sigma M_2=0; \Sigma M_3=0; \Sigma M_4=0; \Sigma M_5=0; \Sigma M_6=0.$$

Здесь $1, 2, \dots, 6$ – шесть любых осей в пространстве.

2. Кинематический анализ пространственных систем

Многие условия и выводы, полученные при кинематическом анализе плоских систем, применимы и при анализе пространственных систем. Но их недостаточно. Потому введем новые понятия и рассмотрим новые способы их анализа.

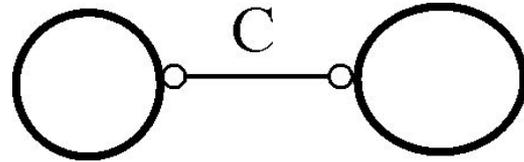
Тело (T) – это геометрически неизменяемая часть пространственной системы. Любое тело без связей имеет шесть степеней свободы – три независимых поступательных перемещения и три поворота. Для их исключения тело нужно закреплять шестью связями.



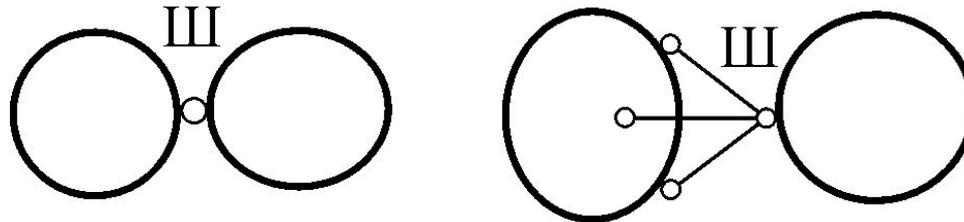
Простейший способ закрепления тела к земле показан на рис., где имеются шаровая подвижная опора A , шаровая опора на цилиндрических катках B и шаровая неподвижная опора C . Из них опора C исключает три поступательных перемещения, опора B – два поворота и опора A – один поворот. Таким образом, получаемая система является ГНС.

Связи, соединяющие два тела, могут быть различными.

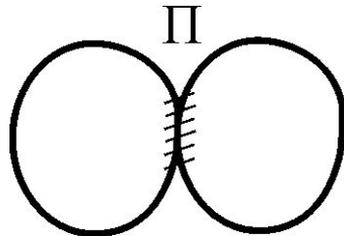
Простейшая связь в виде стержня **С** имеет вид:



Если два тела соединяются шаровым шарниром **Ш**, то это соединение эквивалентно трем связям:



Припайка **П**, жестко связывающая два тела, эквивалентна шести связям.



Если в пространственной системе имеется n_T тел, $n_{\text{ш}}$ шаровых шарниров, n_C стержней, n_{C_0} опорных связей и $n_{\text{п}}$ припаяк, то число степеней свободы такой системы определяется по формуле

$$W = 6n_T - 3n_{\text{ш}} - n_C - n_{C_0} - 6n_{\text{п}}.$$

Для геометрической неизменяемости пространственной системы необходимо выполнение условия $W \leq 0$.

Расчет пространственных систем намного сложнее расчета плоских систем.

Поэтому изучим только основы расчета ферм.

4. Расчет пространственных ферм

Кинематический анализ пространственной фермы проводится по формуле $W = 3n_y - n_C - n_{C_0}$, где n_y – число узлов фермы.

$W \leq 0$ – необходимое условие геометрической неизменяемости,

$W = 0$ – необходимое условие статической определимости фермы.

Качественный анализ ферм проводится с использованием принципов образования геометрически неизменяемых пространственных систем.

Одним из простейших принципов является присоединение к телу триады (шарового шарнира с тремя связями). При его использовании вначале в ферме выделяют простейшее геометрически неизменяемое тело – треугольную пирамиду. Затем к нему последовательно присоединяют отдельные триады.

Геометрическую неизменяемость пространственной системы можно проверять **методом нулевой нагрузки**: если при расчете без нагрузки усилия во всех стержнях и опорные реакции окажутся равными нулю, то система неизменяема, если же возникает неопределенность типа $0/0$, система мгновенно изменяема.

Изучим два метода расчета пространственных ферм.

1. Метод сечений

Применяется при расчете ферм с простейшим образованием.

Имеются два его варианта.

- **Метод вырезания узлов.** Основан на последовательном вырезании узлов фермы, в которых число неизвестных усилий не больше трех. Составляются три уравнения проекций $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=0$ на три оси. Эти оси не должны быть параллельными одной плоскости.

На этом методе основан **признак определения нулевых стержней**: если узел с тремя пересекающимися стержнями не нагружен, то усилия во всех трех стержнях равны нулю.

- **Метод моментной оси.** Через ферму проводится сквозное сечение, затем составляется и решается уравнение момента относительно некоторой оси.

Моментной осью называется ось, относительно которой составляется уравнение момента. Эта ось выбирается так, чтобы в уравнение вошла только одна неизвестная.

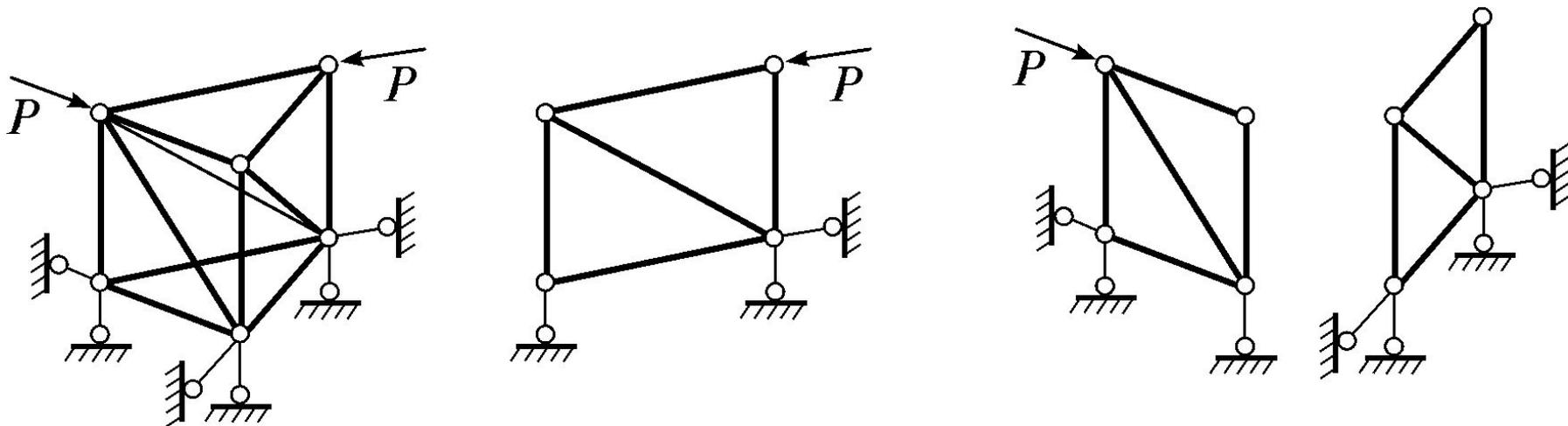
2. Метод разложения на плоские фермы

Когда стержни фермы располагаются группами на нескольких плоскостях, этот метод дает большой выигрыш в расчетах.

Метод разложения на плоские фермы основан на **теореме**:
если силы, действующие на пространственную ферму, лежат в одной плоскости, то усилия во всех стержнях фермы, лежащих вне этой плоскости, равны нулю.

- Порядок расчета** фермы по этому методу состоит в следующем:
- внешняя нагрузка разлагается на несколько плоскостей;
 - части фермы, лежащие на разных плоскостях, рассчитываются только на нагрузку в своей плоскости;
 - применяется принцип суперпозиции.

Например, на следующую ферму нагрузка действует только в двух плоскостях. Следовательно, ее расчет можно свести к расчету только двух плоских ферм. В стержнях фермы, лежащих на третьей плоскости, все усилия равны нулю.



5. Определение перемещений пространственной стержневой системы

В пространственных стержневых системах в общем случае могут возникать шесть внутренних усилий. Поэтому формула вычисления перемещений содержит шесть компонент:

$$\Delta_P = \sum \int \left(\frac{M_{Py} \bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_{Pz} \bar{M}_z}{EI_z} + \frac{H_P \bar{H}}{EI_\kappa} + \mu_y \frac{Q_{Py} \bar{Q}_y}{GF} + \mu_z \frac{Q_{Pz} \bar{Q}_z}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx.$$

Здесь: индексом P обозначены усилия грузового состояния:

надчеркиванием обозначены усилия единичного состояния;

M_y, M_z, H – два изгибающих момента и крутящий момент,

Q_y, Q_z, N – две поперечные силы и продольная сила;

I_κ, I_z, I_y – моменты инерции относительно осей y, z и полярный момент инерции;

μ_y, μ_z – коэффициенты формы сечения;

F – площадь сечения.

Вычисление перемещений по этой формуле проводится как обычно для плоских стержневых систем.

В пространственных рамах влиянием продольных и поперечных сил обычно пренебрегают и учитывают только первые три члена этой формулы, а в фермах учитывается только последний член.

6. Расчет пространственных рам методом сил

Степень статической неопределимости пространственной рамы определяется по формуле

$$n = 6n_k - n_{y\partial},$$

где n_k – число замкнутых контуров, $n_{y\partial}$ – число удаленных связей.

Для ферм используется другая формула:

$$n = n_C + n_{C_0} - 3n_y,$$

где n_C – число стержней, n_{C_0} – число опорных связей, n_y – число узлов.

Основная система и канонические уравнения метода сил имеют тот же смысл и вид, как и для плоских рам. Но входящие в них коэффициенты определяются с учетом изгибающих моментов в двух плоскостях и крутящего момента в каждом элементе рамы.

Построение промежуточных и окончательных эпюр внутренних усилий и их проверка такие же, как и при расчете плоских рам.