!Здравствуйте

Лекция №20

**Преобразование Фурье**

Кроме преобразования Лапласа, широкое применение находит также еще одно интегральное преобразование, которое носит название преобразования Фурье.

Пусть $f(x)$ есть функция вещественной переменной $x$, определенная на всей прямой $-\infty<x<+\infty$. Основное ограничение, накладываемое на эту функцию, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < +\infty,$$

то есть эта функция абсолютно интегрируема на всей вещественной оси. Кроме этого, мы будем требовать, чтобы $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. В некоторых случаях будет требоваться также, чтобы при некоторых $n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)|dx < +\infty.$$

Преобразованием Фурье от функции $f(x)$ называется функция

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx. \tag{8}$$

Она существует при любых $\omega$, так как

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < +\infty.$$

Как и в случае преобразования Лапласа оказывается, что не только $F(\omega)$ однозначно определяется $f(x)$, но и наоборот, $f(x)$ однозначно определяется $F(\omega)$, то есть имеет место взаимно-однозначное соответствие $f(x) \leftrightarrow F(\omega)$.

**Теорема.** Пусть $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < +\infty$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x$. Тогда имеет место формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega, \tag{9}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Эта формула носит название обратного преобразования Фурье.

*Доказательство* этой теоремы мы приводить не будем.

**Свойства преобразования Фурье**

Пусть $F(\omega)$ и $G(\omega)$ будут преобразованиями Фурье от функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то есть $f(x) \leftrightarrow F(\omega)$, $g(x) \leftrightarrow G(\omega)$.

1. **Линейность.**

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega).$$

Действительно,

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) e^{i\omega x} dx =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega).$$

2. **Формула подобия.**

$$f(\alpha x) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Имеем

$$f(\alpha x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\frac{z}{\alpha}\omega} dz = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),$$

где в интеграле сделана замена переменных $\alpha x = z$.

3. **Теорема о сдвиге.**

$$f(x-\tau) \leftrightarrow e^{i\omega\tau} F(\omega).$$

Действительно, делая замену переменных $x - \tau = z$, получим

$$f(x-\tau) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau) e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\omega z} \cdot e^{i\omega\tau} dz = e^{i\omega\tau} F(\omega).$$

4. **Формула смещения.**

$$f(x)e^{i\alpha x} \leftrightarrow F(\omega+\alpha).$$

Имеем

$$f(x)e^{i\alpha x} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}e^{i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(\omega+\alpha)x}dx = F(\omega+\alpha).$$

*Следствия.*

А) Так как $\sin\alpha x = \left(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}\right)/2i$, то

$$f(x)\sin\alpha x = \frac{1}{2i}\left[f(x)e^{i\alpha x} - f(x)e^{-i\alpha x}\right] \leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[F(\omega+\alpha) - F(\omega-\alpha)\right].$$

Б) Так как $\cos\alpha x = \left(e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}\right)/2$, то

$$f(x)\cos\alpha x = \frac{1}{2}\left[f(x)e^{i\alpha x} + f(x)e^{-i\alpha x}\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F(\omega+\alpha) + F(\omega-\alpha)\right].$$

5. **Дифференцирование функции.**

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow (-i\omega)^n F(\omega).$$

Действительно,

$$f'(x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} df(x) =$$

$$= f(x)e^{i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = (-i\omega) F(\omega),$$

так как $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Аналогично

$$f''(x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} df'(x) =$$

$$= f'(x)e^{i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\omega x} dx = (-i\omega)^2 F(\omega),$$

если $f'(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

6. **Дифференцирование преобразования Фурье.**

Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)| dx < +\infty$, то

$$x^n f(x) \leftrightarrow (-i)^n F^{(n)}(\omega).$$

Имеем

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \leftrightarrow f(x). \tag{10}$$

Дифференцируя по ω, получим

$$F'(\omega) = i \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{i\omega x} dx \leftrightarrow (ix) f(x),$$

и интеграл сходится, если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| dx < +\infty$.

Дифференцируя еще раз, получим

$$F''(\omega) = i^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) e^{i\omega x} dx \leftrightarrow (ix)^2 f(x),$$

и интеграл сходится, если $\int_{-\infty}^{\infty} |x^2 f(x)| dx < +\infty$.

В общем случае, если $\int_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)| dx < +\infty$, то, дифференцируя (10) $n$ раз, получим

$$F^{(n)}(\omega) \leftrightarrow (ix)^n f(x),$$

$$x^n f(x) \leftrightarrow (-i)^n F^{(n)}(\omega).$$

7. **Свертка функций.**

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены для $x \in (-\infty, +\infty)$. Сверткой этих двух функций называется

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy,$$

которая обозначается как $f(x) * g(x)$.

Формула имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \leftrightarrow F(\omega) G(\omega).$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} e^{i\omega(x-y)} f(y)g(x-y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-y)} g(x-y)d$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega z} g(z)dz = F(\omega)G(\omega),$$

где в последнем интеграле сделана замена переменных $x-y=z$.

Конец четвертой части