Дискретный анализ

Лекция 4

Комбинаторика.

Размещения и сочетания

Размещения и сочетания

- Перестановки (permutations) были первым классическим объектом комбинаторики. Сейчас мы рассмотрим два остальных – размещения (allocations) и сочетания (combinations).
- Важность этих двух определений различна. Сочетания используются повсеместно. Размещения же нужны почти исключительно для того, чтобы сочетания было удобно определять, они служат удобным переходом от перестановок к сочетаниям.

Размещения

- Пусть задано множество из n элементов. Упорядоченный набор m из этих элементов называется размещением из n элементов по m.
- Обозначим множество размещений из n элементов через $\mathcal{A}_n^m$, а его мощность через A_n^m.
- И опять те же три вопроса: чему равно A_n^m, как перебрать элементы $\mathcal{A}_n^m$, как их перенумеровать.
- Легко видеть, что
- $A_n^m = n(n\text{-}1)...(n\text{-}m+1) = n!/(n\text{-}m)!$
- имеем n возможностей выбора первого элемента, n-1 возможностей выбора второго и т.д. Получаем m сомножителей, начиная с n и уменьшая каждый раз на 1.

Пример размещений

- Перечислим размещения из 5 элементов по 3. Их число должно быть равно $5 \cdot 4 \cdot 3=60$. Имеем
- abc bac cab dab eab
- abd bad cad dac eac
- abe bae cae dae ead
- acb bca cba dba eba
- acd bcd cbd dbc ebc
- ace bce cbe dbe ebd
- adb bda cda dca eca
- adc bdc cdb dcb ecb
- ade bde cde dce ecd
- aeb bea cea dea eda
- aec bec ceb deb edb
- aed bed ced dec edc

Пример размещений - 2

- Если сгруппировать эти размещения в группы с одинаковым составом, мы получим 10 строк по 6 элементов (это скоро понадобится)
- abc acb bac bca cab cba
- abd adb bad bda dab dba
- abe aeb bae bea eab eba
- acd adc cad cda dac dca
- ace aec cae cea eac eca
- ade aed dae dea ead eda
- bcd bdc cbd cdb dbc dcb
- bce bec cbe ceb ebc ecb
- bde bed dbe deb ebd edb
- cde ced dce dec ecd edc

Нумерация размещений

- Чтобы нумеровать перестановки, мы отобразим множество A_n^m взаимнооднозначно в другое множество T_{nm}, на котором ввести нумерацию будет гораздо проще, а затем для любого элемента $a \in A_n^m$ в качестве его номера возьмем номер его образа в T_{nm}.
- Множество T_{nm} – это прямое произведение нескольких числовых отрезков
- $T_n = (0:(n-1)) \times (0:(n-2) \times \ldots \times (0:n-m)$.
- Т.е. каждый элемент T_{nm} – это набор неотрицательных чисел i_1, i_2, …,, i_m, причем $i_k \le n-k$.
- Обратите внимание, насколько малы отклонения этого текста от текста для перестановок.

Сочетания

- Пусть задано множество из n элементов. Неупорядоченный набор m из этих элементов называется сочетанием из n элементов по m.
- Определение отличается от определения для размещений всего одним словом: неупорядоченный.
- Обозначим множество сочетаний из n элементов через $\mathcal{C}_n^m$, а его мощность через C_n^m.
- И еще раз три вопроса: чему равно C_n^m, как перебрать элементы $\mathcal{C}_n^m$, как их перенумеровать.
- Легко видеть связь между A_n^m и $\mathcal{C}_n^m$
- $C_n^m = A_n^m/m!= n!/(m!(n-m)!)$
- Вспомним вторую таблицу в примере: в каждой строке $m!$ элементов-размещений, и каждая строка – одно сочетание.

Перебор сочетаний

- Для упрощения перебора сочетаний полезно их представить в другом виде. Каждое сочетание – это подмножество мощности m в множестве из n элементов. Если вспомнить о представлении подмножества характеристическим вектором, мы придем к тому, что сочетание задается набором, в котором ровно m единиц и $n-m$ нулей.
- Значит нужно научиться перебирать такие наборы. В лексикографическом порядке!
- Самый младший набор – тот, в котором идут сначала все нули, а потом все единицы. Самое выгодное увеличение набора – это сдвиг на одну позицию вправо, самого правого из нулей, которые еще можно сдвигать, и «подтаскивание» к нему, всех находящихся справа нулей. Полезен пример.

Перебор сочетаний - 2

- Пусть $n=7$ и $m=5$.
- 0011111 1010111 1101110
- 0101111 1011011 1110011
- 0110111 1011101 1110101
- 0111011 1011110 1110110
- 0111101 1100111 1111001
- 0111110 1101011 1111010
- 1001111 1101101 1111100
- Красным выделены нули, сдвигаемые на позицию вправо.
- Опишите этот алгоритм в терминах позиций, занятых единицами, и в терминах позиций, занятых нулями.

Сочетания и пути

- Итак, каждое сочетание из n по m – это набор из m единиц и n-m нулей. А, как уже говорилось, каждый такой набор изображается путем на прямоугольной решетки из точки (0,0) в точку (m,n-m). Так что число таких путей равно C_n^m.
- Вместе с тем, все пути, приходящие в точку (m,n-m), идут через (m-1,n-m) или через (m,n-m -1). Отсюда следует, что
- $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$
- Эту формулу можно получить и непосредственным вычислением. Попробуйте.
- Обычно формулу для C_n^m доопределяют для отрицательных m, полагая $C_n^m = 0$.

Нумерация сочетаний

- Перенумеровать сочетания – это значит перенумеровать пути, о которых говорилось только что. Будем нумеровать сначала пути, идущие через точку (0,1), а затем пути, идущие через точку (1,0).
- Пути из (0,1) в $(m,n-m)$ нумеруются как пути из (0,0) в $(m,n-m-1)$. Пути из (1,0) в $(m,n-m)$ нумеруются как пути из (0,0) в $(m-1,n-m)$ с добавлением смещения на C_{n-1}^{m} уже использованных номеров.
- Пример.
- $\#(0,1,1,0,1,1,1)=\#(1,1,0,1,1,1)=C_5^4+\#(1,0,1,1,1)$
- $=C_5^4+C_4^3+\#(0,1,1,1)=C_5^4+C_4^3+C_3^3+C_2^2+C_1^1$
- $=5+4+1+1+1=12$.

Теорема о биноме Ньютона

- При любом n справедлива формула
- $(a+b)^n=\sum_{k\in 0:n} C_n^k a^k b^{n-k}$.
- Доказательство. По индукции. При n=1 формула очевидна. Предположим, что она доказана для n-1 и докажем ее для n. Имеем
- $(a+b)^n=(a+b)(a+b)^{n-1}=(a+b)(\sum_{k\in 0:n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k})=$
- $= \sum_{k\in 0:n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-k}+\sum_{k\in 0:n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k}=$
- $= \sum_{k\in 0:n}(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k)a^k b^{n-k}= \sum_{k\in 0:n} C_n^k)a^k b^{n-k}$
- Эта формула так важна, что часто числа называются биномиальными коэффициентами.

Sir Isaac Newton (1643-1727)

Треугольник Паскаля

- Биномиальные коэффициенты очень красиво располагаются треугольником, в котором каждое число (кроме первого) является суммой двух предшествующих. Этот треугольник называется треугольником Паскаля.
- 1
- 1 1
- 1 2 1
- 1 3 3 1
- 1 4 6 4 1
- 1 5 10 10 5 1
- 1 6 15 20 15 6 1
- 1 7 21 35 35 21 7 1

Blaise Pascal (1623-1662)

Бином Ньютона и комбинаторные формулы

- 1. При $a=b=1$ формула бинома превращается в формулу $2^n=\Sigma_{k\in 0:n}\, C_n^{\,k}$.
- 2. При $a=1$, $b=-1$ формула бинома превращается в формулу $0=C_n^{\,0}-C_n^{\,1}+C_n^{\,2}-C_n^{\,3}+. . . .$
- Некоторые другие замечательные формулы можно получить, используя формулу де Муавра, французского ученого, жившего в Лондоне и близко знавшего Ньютона.

Abraham De Moivre
(1667-1754)

Экзаменационные вопросы

13. Размещения. Их перебор и нумерация.
14. Сочетания. Их перебор и нумерация.
15. Свойства сочетаний. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля.
16. Комбинаторные формулы, получающиеся из формулы бинома Ньютона.

Задание

- 1. Найти число сочетаний из 10 элементов по 3 (входной замок).
- 2. Нарисовать треугольник Паскаля и убедиться, что числа в нем – биномиальные коэффициенты.
- 3. Используя формулу бинома, доказать, что знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов равна 0.