

Лекция 4

Систематические погрешности

Систематические погрешности и их классификация

Факторы, учитывающиеся при оценке систематических погрешностей:

1. Объект измерения – перед измерением он должен быть достаточно хорошо изучен с целью корректного выбора его модели.
2. Субъект измерения – его вклад в погрешность измерения необходимо уменьшать путем подбора операторов высокой квалификации и соблюдения требований эргономики при разработке СИ.
3. Метод и средство измерений – их правильный выбор чрезвычайно важен и производится на основе априорной информации об объекте измерения.
4. Условия измерения – обеспечение и стабилизация нормальных условий являются необходимыми требованиями для минимизации дополнительной погрешности, которая по своей природе является систематической.

Систематические погрешности и их классификация

От характера изменения

```
graph TD; A[От характера изменения] --> B[Постоянные]; A --> C[Переменные]; C --> D[Прогрессивные]; C --> E[Периодические]
```

Постоянные

Переменные

Прогрессивные

Периодические

Систематические погрешности и их классификация

Постоянные погрешности – погрешности, которые длительное время сохраняют свое значение, например, в течение времени выполнения всего ряда измерений.

Прогрессивные погрешности – непрерывно возрастающие или убывающие погрешности.

Периодические погрешности – погрешности, значение которых является периодической функцией времени или перемещения указателя измерительного прибора. Обычно эти погрешности встречаются в угломерных приборах с круговой шкалой.

Систематические погрешности и их классификация

От причин возникновения



Инструментальн
ые
погрешности



Погрешности
метода измерений



Погрешности
из-за изменения
условий
измерения



Субъективн
ые
погрешност
и

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Неисправленные результаты – результаты наблюдений, полученные при наличии систематической погрешности.

Способы учета и устранения систематических погрешностей:

1. Устранение источников погрешностей до начала измерений;
2. Определение поправок и внесение их в результат измерения;
3. Оценка границ неисключенных систематических погрешностей.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

$X_i = Q + \Delta_i + \Theta_i$ – результат одного измерения, где Q – истинное значение физической величины, Δ_i – i -я случайная погрешность, Θ_i – i -я систематическая погрешность.

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = Q + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Theta_i$ – результат усреднения n измерений.

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ – при большом количестве измерений случайная погрешность устраняется

$\bar{X} = Q + \Theta$ – так как в каждом измерении $\Theta_i = \Theta$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Поверка средства измерений – установление органом государственной метрологической службы пригодности средства измерения к применению на основании экспериментально определяемых метрологических характеристик и подтверждения их соответствия установленным обязательным требованиям. Поверка средства измерения производится путем сравнения показаний поверяемого прибора с показаниями образцового средства измерения. Обнаруженные постоянные инструментальные систематические погрешности могут быть исключены из результата измерения с помощью введения поправки.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Поправка – значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения с целью исключения составляющих систематической погрешности.

Значение поправки равно значению абсолютной погрешности, взятой с обратным знаком:

$$\Delta n_X = -\Delta X$$

Поправку, прибавляемую к номинальному значению меры, называют поправкой к значению меры; поправку, вводимую в показание измерительного прибора, называют поправкой к показанию прибора.

$$\Delta n_P = P \left(\frac{g}{9.8066} - 1 \right)$$

Пример задания поправки:

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Неисключенная систематическая погрешность (неисключенный остаток

систематической погрешности) – составляющая погрешности результата измерений, обусловленная погрешностями вычисления и введения поправок на влияние систематических погрешностей или систематической погрешностью, поправка на действие которой не введена вследствие ее малости.

Неисключенная систематическая погрешность характеризуется ее границами:

$$\Theta = \pm \sum_{i=1}^N |\Theta_i|, N \leq 3 \quad \Theta = \pm K \sqrt{\sum_{i=1}^N \Theta_i^2}, N \geq 4$$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Методы устранения постоянных систематических погрешностей

Метод
измерений
замещением

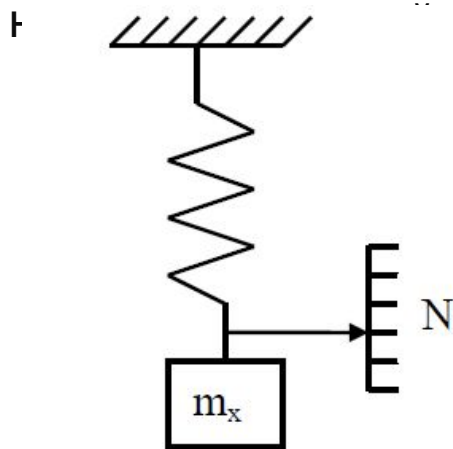
Метод
противопоставления

Метод
компенсации
погрешности по
знаку

Метод
рандомизации

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Метод измерений замещением основан на замещении измеряемой величины мерой с известным значением величины, причем так, что при этом в состоянии и действии всех используемых средств измерений не происходит

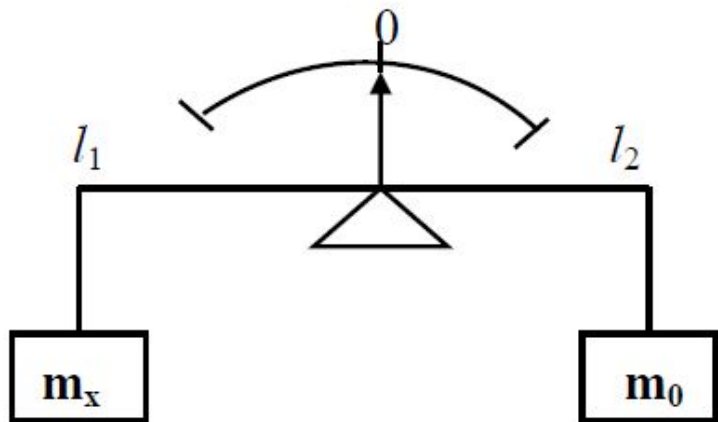


Взвешивание на пружинных
весах

1. На чашу весов помещают взвешиваемое тело массой m_x и отмечают положение указателя N ;
2. Взвешиваемое тело замещают гирями такой массы m_o чтобы вновь добиться прежнего отклонения указателя N ;
3. При одинаковых отклонениях указателя будет выполняться условие $m_x = m_o$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Метод противопоставления – измерение выполняется дважды и проводится так, чтобы в обоих случаях причина постоянной погрешности оказывала на результат наблюдений разные, но известные по закономерности



Взвешивание на равноплечных
весках

1. $m_x \cdot l_1 = m_0 \cdot l_2$ – условия равновесия весов;
2. $m_x = m_0 \frac{l_1}{l_2}$ – выражение для нахождения неизвестной массы;

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Метод противопоставления

3. Если $l_1 \neq l_2$, то при взвешивании возникает систематическая ошибка: $m_0 \left(\frac{l_2}{l_1} - 1 \right)$

4. Для исключения проводят измерения следующим образом:

А) Взвешивают груз m_x , уравнивая его гирями массой m_{01} . При этом справедливо $m_x \cdot l_1 = m_{01} \cdot l_2$;

Б) Затем груз m_x перемещают на вторую чашу весов, уравнивая его гирями массой m_{02} . При этом справедливо $m_x \cdot l_2 = m_{02} \cdot l_1$;

В) Из двух соотношений условий равновесия весов находим

$$m_x = \sqrt{m_{01} \cdot m_{02}}$$

выражение для неизвестной массы:

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Метод компенсации погрешности по знаку предусматривает измерение с двумя наблюдениями, выполняемыми так, чтобы постоянная систематическая погрешность входила в результат каждого из них с разными знаками:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{(Q + \Theta) + (Q - \Theta)}{2}$$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Метод рандомизации – наиболее универсальный способ исключения неизвестных постоянных систематических погрешностей. Суть его состоит в том, что одна и та же величина измеряется различными методами (приборами). Систематические погрешности каждого из них для всей совокупности являются разными случайными величинами. Вследствие этого, при увеличении числа используемых методов (приборов) систематические погрешности взаимно компенсируются.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Методы обнаружения переменных и монотонно изменяющихся систематических погрешностей



Графический метод



Метод
симметричных
наблюдений

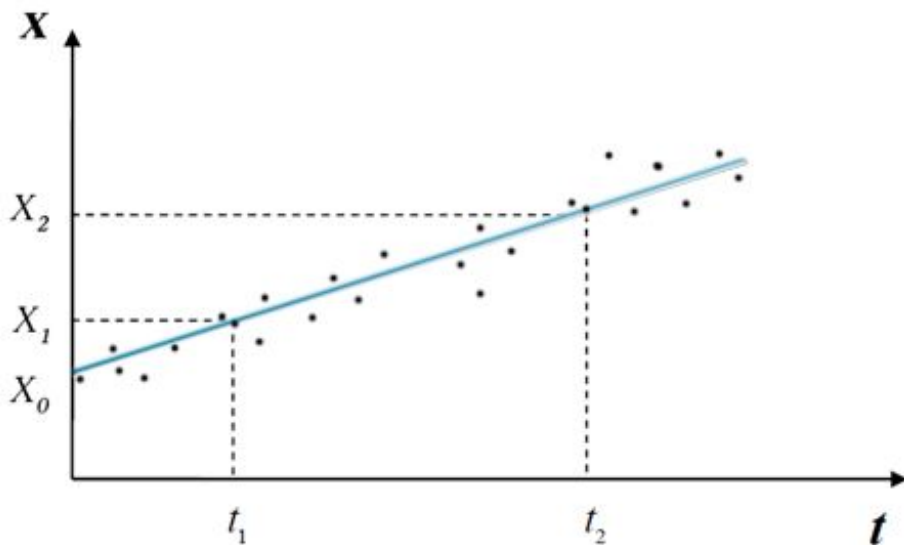


Статистические
методы

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Графический метод – заключается в графическом представлении последовательности неисправленных значений результатов наблюдений. На графике через построенные точки проводят плавную кривую, которая выражает тенденцию в изменении результата измерения, если она существует. Если тенденция не наблюдается, то переменную систематическую погрешность считают практически отсутствующей.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей



Линейное изменение систематической погрешности в графическом методе

Рассмотрим систематическую погрешность, изменяющуюся линейно со временем:
 $X_{\text{det}} = X_0 + Ct$ – результат измерения

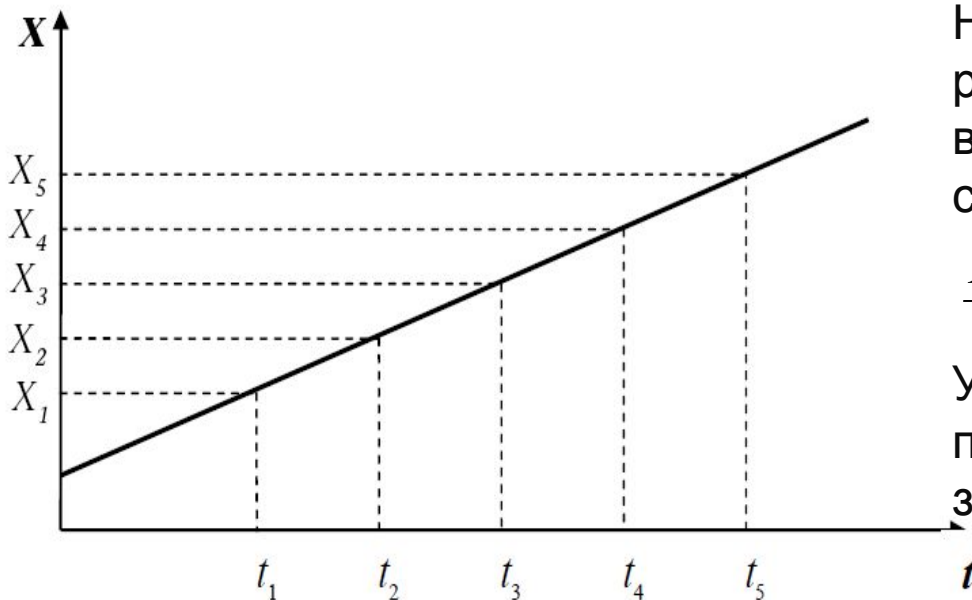
постоянной величины X_0 ;
 Выполним два наблюдения величин X_1 и X_2 в моменты времени t_1 и t_2 . Тогда искомое значение измеряемой физической величины составит:

$$X_0 = \frac{X_1 t_2 - X_2 t_1}{t_2 - t_1}$$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Метод симметричных наблюдений. Применяется для исключения прогрессирующего влияния какого-либо фактора, являющегося линейной функцией времени (например, постепенного прогрева аппаратуры, падения напряжения в цепи питания, вызванного разрядом аккумулятора и т.д.). Такая функция может быть изображена в виде графика, на котором по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат – прогрессивная погрешность. Способ симметричных наблюдений заключается в том, что в течение некоторого интервала времени выполняется несколько измерений одной и той же величины постоянного размера и за окончательный результат принимается полусумма отдельных результатов, симметричных по времени относительно середины интервала. Рекомендуется использовать данный способ, когда не очевидна возможность существования прогрессивной погрешности.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей



Линейное изменение систематической погрешности в методе симметричных

Несколько наблюдений выполняют через равные промежутки времени и затем вычисляют средние арифметические симметрично расположенных отсчетов:

$$\frac{X_1 + X_3}{2}, \frac{X_2 + X_4}{2}, \frac{X_3 + X_5}{2} \dots$$

Убедившись, что погрешность меняется по линейному закону, можно вычислить значение физической величины:

$$X_0 = \frac{X_1 t_2 - X_2 t_1}{t_2 - t_1}$$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Критерий Аббе (способ последовательных разностей)

1. Рассчитывается среднеарифметическое значение результатов измерений:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2. Рассчитывается дисперсия результатов наблюдений обычным способом:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Критерий Аббе (способ последовательных разностей)

3. Рассчитывается дисперсия результатов наблюдений методом последовательных разностей :

$$Q^2[x] = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

4. Рассчитывается значение критерия Аббе:

$$v_q = \frac{Q^2[X]}{\sigma^2}$$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Значения критерия Аббе при различном уровне значимости

n	V _q при q, равном			n	V _q при q, равном		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	0,295	0,313	0,390	13	0,295	0,431	0,578
5	0,208	0,269	0,410	14	0,311	0,447	0,591
6	0,182	0,281	0,445	15	0,327	0,461	0,603
7	0,185	0,307	0,468	16	0,341	0,474	0,614
8	0,202	0,331	0,491	17	0,355	0,487	0,624
9	0,221	0,354	0,512	18	0,368	0,499	0,633
10	0,241	0,376	0,531	19	0,381	0,510	0,642
11	0,260	0,396	0,548	20	0,393	0,520	0,650
12	0,278	0,414	0,564				

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Критерий Фишера (дисперсионный анализ)

1. Проводят многократные измерения, состоящие из достаточного числа серий, каждая из которых соответствует определенным (пусть неизвестным, но различным) значениям влияющего фактора.
2. После проведения N измерений их разбивают на s серий по n_j результатов наблюдений ($sn_j = N$) в каждой серии и затем устанавливают, имеется ли или отсутствует систематическое расхождение между результатами наблюдений в различных сериях.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Критерий Фишера (дисперсионный анализ)

3. Для серий наблюдений рассчитывается дисперсия:

$$\sigma_{ser}^2 = \frac{1}{N-s} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2, \quad \bar{X}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$$

4. Рассчитывается усредненная межсерийная дисперсия:

$$\sigma_{inter}^2 = \frac{1}{s-1} \sum_{j=1}^s n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2, \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s n_j \bar{X}_j$$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Критерий Фишера (дисперсионный анализ)

5. Критерием оценки наличия систематических погрешностей является дисперсионный критерий Фишера:

$$F = \frac{\sigma_{inter}^2}{\sigma_{ser}^2}$$

Если полученное значение критерия Фишера больше табличного значения F_q (при заданных q , N и s), то обнаруживается систематическая погрешность, вызываемая тем фактором, по которому группировались результаты наблюдений.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Таблица значений критерия Фишера при уровне значимости $\alpha=0.05$

$\frac{s-1}{N-s}$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Таблица значений критерия Фишера при уровне значимости $\alpha=0.05$

$s-1 \backslash N-s$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Таблица значений критерия Фишера при уровне значимости $\alpha=0.05$

$s-1 \backslash N-s$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

1. Имеется две группы измерений. Результаты измерений первой группы: 2, 3, 1, результаты измерения второй группы: 6, 7, 5. Определить наличие систематической погрешности.

	<i>Группа 1</i>	<i>Группа 2</i>
<i>Среднее значение</i>	2	6
<i>Дисперсия</i>	2	2

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

1. Имеется две группы измерений. Результаты измерений первой группы 2, 3, 1, результаты измерения второй группы: 6, 7, 5. Определить наличие систематической погрешности.
3. Для серий наблюдений рассчитывается дисперсия: $\sigma_{ser}^2 = \frac{4}{6-2} = 1$
4. Рассчитывается усредненная межсерийная дисперсия: $\sigma_{inter}^2 = 12$
5. Критерий Фишера: $F = \frac{\sigma_{inter}^2}{\sigma_{ser}^2} = 12$
6. Расчетный критерий Фишера превышает табличное значение (7,71), следовательно, систематическая ошибка присутствует.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Критерий Вилкоксона

1. Выполняется серия измерений для двух связанных выборок:

$$\{X_1, X_2 \dots X_n\} \text{ и } \{Y_1, Y_2 \dots Y_m\}, \text{ причем } n \geq m \geq 5$$

2. Рассчитаются значения разностей пар двух выборок.

3. Ранжируются модули разностей пар в возрастающем порядке.

4. Приписываются рангам знаки соответствующих им разностей.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Критерий Вилкоксона

5. Рассчитывается сумма нетипичных рангов R .
6. Гипотеза о наличии систематической ошибки отвергается, если выполняется неравенство:

$$\sum_{j=1}^n R_j < T_{crit}$$

где T_{crit} – критическое значение критерия Вилкоксона при заданном уровне значимости.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

Таблица критических значений Вилкоксона

N	q=0,05	q=0,01	N	q=0,05	q=0,01	N	q=0,05	q=0,01	N	q=0,05	q=0,01	N	q=0,05	q=0,01
1	–	–	11	13	7	21	67	49	31	163	130	41	302	252
2	–	–	12	17	9	22	75	55	32	175	140	42	319	266
3	–	–	13	21	12	23	83	62	33	187	151	43	336	281
4	–	–	14	25	15	24	91	69	34	200	162	44	353	296
5	0	–	15	30	19	25	100	76	35	213	173	45	371	312
6	2	–	16	35	23	26	110	84	36	227	185	46	389	328
7	3	0	17	41	27	27	119	92	37	241	198	47	407	345
8	5	1	18	47	32	28	130	101	38	256	211	48	426	362
9	8	3	19	53	37	29	140	110	39	271	224	49	446	379
10	10	5	20	60	43	30	151	120	40	286	238	50	466	397

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

2. Сравнить между собой две выборки с помощью критерия Вилкоксона.

ФИО	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Замер 1	24	12	42	30	40	55	50	52	50	22	33	78	79	25	28	16	17	12	25
Замер 2	22	12	41	31	32	44	50	32	32	21	34	56	78	23	22	12	16	18	25

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

2. Сравнить между собой две выборки с помощью критерия **Вилкоксона**.
1. Вычислить разность между индивидуальными значениями во втором и первом замерах.

ФИО	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Замер 1	24	12	42	30	40	55	50	52	50	22	33	78	79	25	28	16	17	12	25
Замер 2	22	12	41	31	32	44	50	32	32	21	34	56	78	23	22	12	16	18	25
№2-№1	-2	0	-1	1	-8	-11	0	-20	-18	-1	1	-22	-1	-2	-6	-4	-1	6	0

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

- Сравнить между собой две выборки с помощью критерия **Вилкоксона**.
- Определить типичный сдвиг. В данном случае это отрицательные значения

ФИО	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Замер 1	24	12	42	30	40	55	50	52	50	22	33	78	79	25	28	16	17	12	25
Замер 2	22	12	41	31	32	44	50	32	32	21	34	56	78	23	22	12	16	18	25
№2-№1	-2	0	-1	1	-8	-11	0	-20	-18	-1	1	-22	-1	-2	-6	-4	-1	6	0

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

- Сравнить между собой две выборки с помощью критерия **Вилкоксона**.
- Ранжировать модули полученных разностей по возрастанию, присвоить каждому значению ранг от меньшего к большему значению.

№2-№1	2	0	1	1	8	11	0	20	18	1	1	22	1	2	6	4	1	6	0
№2-№1↑	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	4	6	6	8	11	18	20	22
Ранги	2	2	2	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	10,5	10,5	12	13,5	13,5	15	16	17	18	19

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

- Сравнить между собой две выборки с помощью критерия **Вилкоксона**.
- Суммируется значение рангов, соответствующих нетипичным сдвигам.

$R=26,5$

ФИО	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Замер 1	24	12	42	30	40	55	50	52	50	22	33	78	79	25	28	16	17	12	25
Замер 2	22	12	41	31	32	44	50	32	32	21	34	56	78	23	22	12	16	18	25
№2-№1	-2	0	-1	1	-8	-11	0	-20	-18	-1	1	-22	-1	-2	-6	-4	-1	6	0
Ранги	10,5	2	6,5	6,5	15	16	2	18	17	6,5	6,5	19	6,5	10,5	13,5	12	6,5	13,5	2

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Статистические методы

- Сравнить между собой две выборки с помощью критерия **Вилкоксона**.
- Определяется значение значения T_{crit} для $n=19$ при заданном уровне значимости:
 $T_{crit} = 53$ при $q=0,05$;
 $T_{crit} = 37$ при $q=0,01$.
- $R = 26,5 < T_{crit} = 37$ при $q=0,01$
- Вывод: можно утверждать, что зафиксированные в эксперименте изменения неслучайны и значимы (уровень значимости 1%).

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Исключение систематических погрешностей путем введения поправки

Поправка – значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения

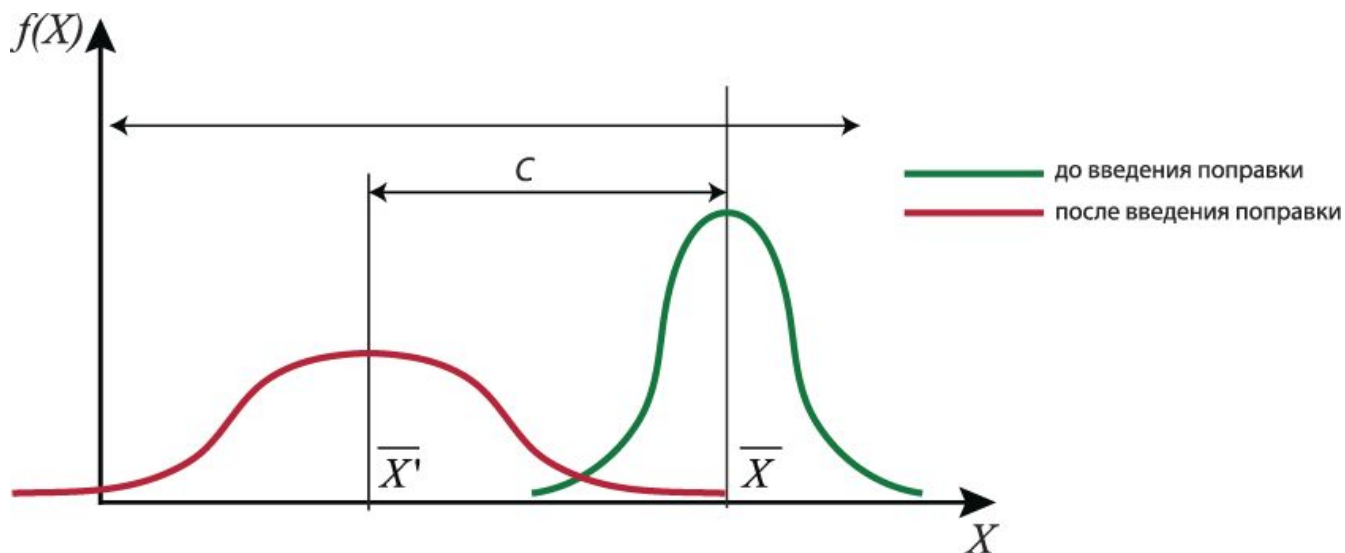
с целью исключения составляющих систематической погрешности. Численно равно абсолютной погрешности, взятой с обратным знаком.

$X'_i = X_i + \sum_{j=1}^m C_j$ – результат i -ого измерения с учетом поправок.

$D[X'] = D[X] + \sum_{j=1}^m D[C_j]$ – дисперсия результата измерения с учетом поправок.

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Исключение систематических погрешностей путем введения поправки



Устранение систематической погрешности путем введения поправки

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Исключение систематических погрешностей путем введения поправки

Пусть при измерении постоянной величины Q получено значение $Q = \bar{X} \pm tS_{\bar{X}}$

После введения поправки $C \pm tS_{\bar{C}}$ результат измерения:

$$Q' = (\bar{X} + C \pm tS_{\bar{C}}) \pm tS_{\bar{X}} = \bar{X}' \pm tS_s, \quad S_s = \sqrt{S_C^2 + S_{\bar{X}}^2}$$

Максимальные доверительные значения погрешности результата измерения до и после введения поправки равны соответственно:

$$D_1 = \Theta_1 + tS_{\bar{X}}, \quad D_2 = \Theta_2 + tS_C = \Theta_1 - C + t\sqrt{S_C^2 + S_{\bar{X}}^2}$$

Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Исключение систематических погрешностей путем введения поправки

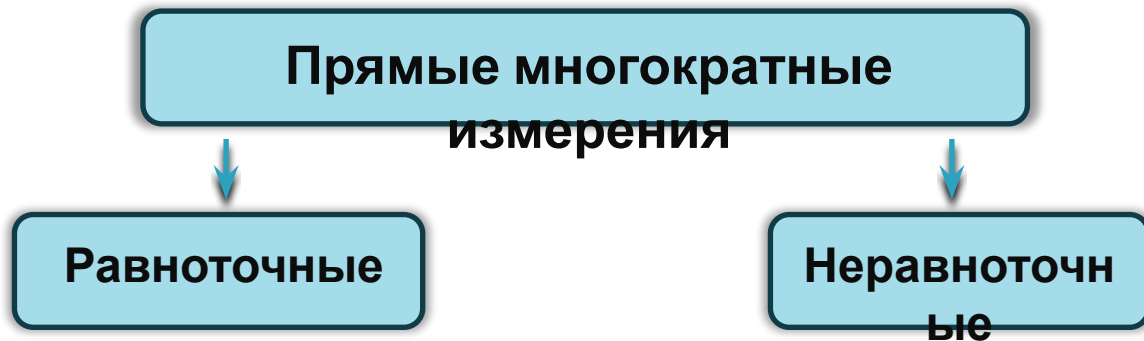
Поправку имеет смысл вводить до тех пор, пока $D_1 < D_2$. Отсюда следует, что

$$\Theta_1 + tS_{\bar{X}} < \Theta_1 - C + t\sqrt{S_C^2 + S_{\bar{X}}^2}, \quad C > tS_{\bar{X}} \left(\sqrt{1 + \frac{S_C^2}{S_{\bar{X}}^2}} - 1 \right)$$

За редким исключением $S_C \ll S_{\bar{X}}$, т.е. $C > 0,5 \frac{S_C^2}{S_{\bar{X}}}$

Вывод: если $S_C \rightarrow 0$, то поправку имеет смысл вводить всегда.

Обработка результатов прямых многократных измерений



Равноточными называются измерения, которые проводятся средствами измерений одинаковой точности по одной и той же методике при неизменных внешних условиях.

ГОСТ Р 8.736-2011 Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения

Обработка результатов прямых многократных измерений

1. Определение точечных оценок закона распределения результатов измерений.

- Расчет среднего арифметического значения, оценка СКО результата измерения, оценка СКО среднего арифметического значения по формулам:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2};$$

- Исключение промахов в соответствии с рассмотренными критериями;
- Повторный расчет среднего арифметического значения, оценка СКО результата измерения, оценка СКО среднего арифметического значения.

Обработка результатов прямых многократных измерений

2. Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений

- Построение вариационного ряда, в котором все значения X_i ранжированы от минимального значения к максимальному:

$$Y_1 \dots Y_n : Y_1 = \min \{X_i\}, Y_n = \max \{X_i\}$$

- Разбиение полученного ряда на равные интервалы длиной h . Для определения оптимального числа интервалов используется эмпирическая формула Стерджесса:

$$m = 1 + [3.3 \lg n]$$

Обработка результатов прямых многократных измерений

2. Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений

— Определяются интервалы группирования экспериментальных данных в виде:

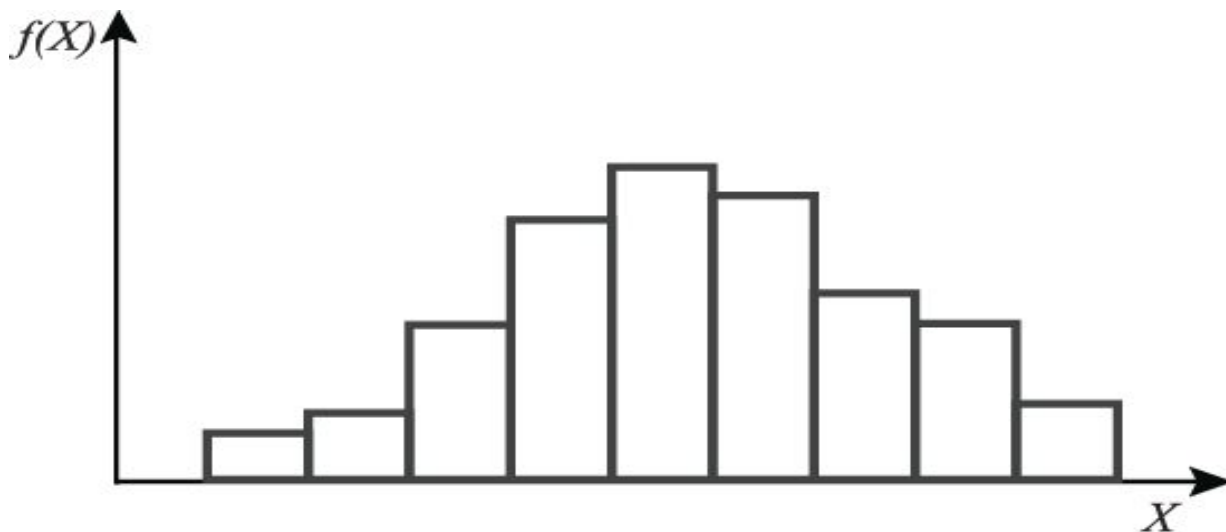
$$\Delta_1 = (Y_1, Y_1 + h), \quad \Delta_2 = (Y_1 + h, Y_1 + 2h), \dots, \quad \Delta_m = (Y_n - h, Y_n)$$

— Рассчитывается число попаданий n_k (*частоты*) результатов измерений в каждый интервал группирования. Сумма частот должна равняться числу измерений. По полученным значениям рассчитываются вероятности попадания результатов измерений в каждый из интервалов группирования по формуле $p_k = n_k/n$, где $k = 1, 2, \dots, m$.

— На основании полученных результатов строится гистограмма, полигон и кумулятивная кривая.

Обработка результатов прямых многократных измерений

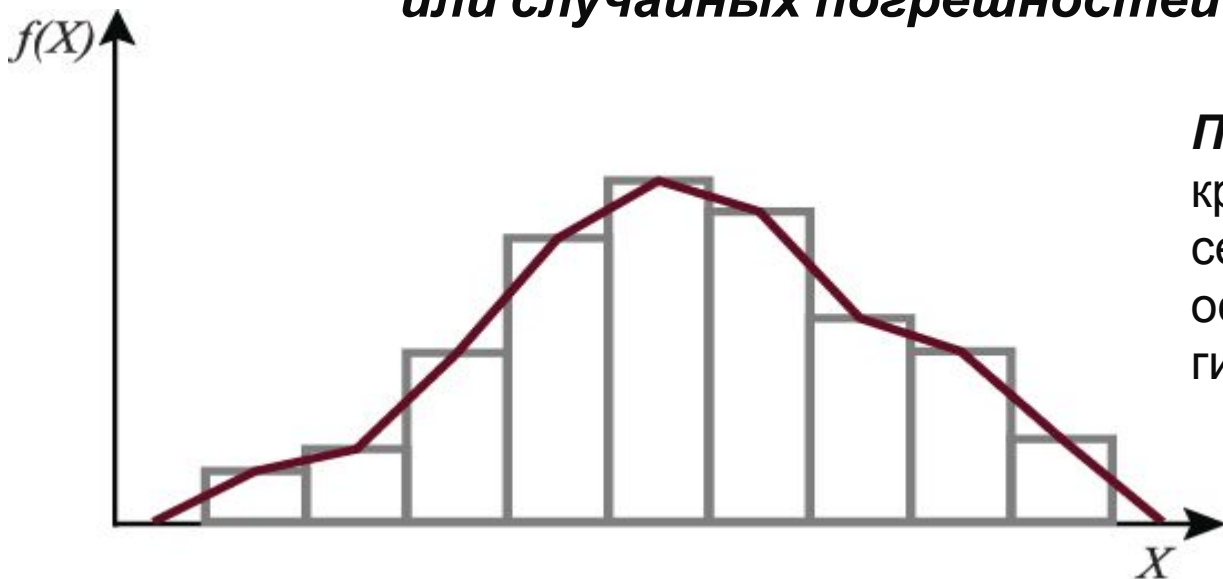
2. Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений



Построение гистограммы по результатам наблюдений

Обработка результатов прямых многократных измерений

2. Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений

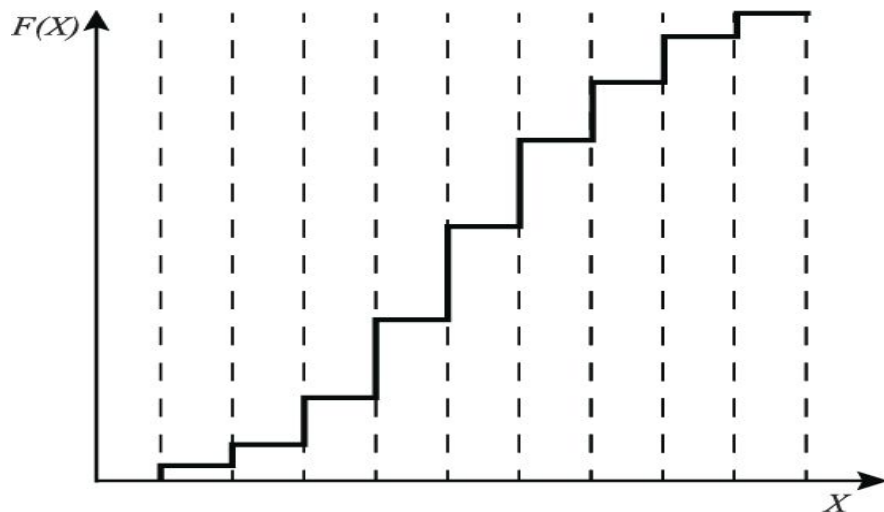


Полигон — ломаная кривая, соединяющая середины верхних оснований каждого столбца гистограммы.

Построение полигона по результатам наблюдений

Обработка результатов прямых многократных измерений

2. Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений



Кумулятивная кривая – график статистической функции распределения

$$F_k = \sum_{k=1}^k p_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^k n_k$$

F_k – кумулятивная частота.

Обработка результатов прямых многократных измерений

3. Оценка закона распределения по статистическим критериям

- При числе наблюдений $n > 50$ для идентификации закона распределения используется критерий Пирсона χ^2 (хи-квадрат) или критерий Мизеса-Смирнова (ω^2);
- При $50 > n > 15$ для проверки нормальности закона распределения применяется составной критерий (d-критерий);
- При $n < 15$ принадлежность экспериментального распределения к одному из стандартных не проверяется. Решение принимается на основании анализа априорной информации

Обработка результатов прямых многократных измерений

3. Оценка закона распределения по статистическим критериям

Критерий согласия Пирсона χ^2 (хи-квадрат)

- Разбиение размаха варьирования выборки на интервалы равной длины и определение числа наблюдений (частоты) n_j для каждого из e интервалов. Число интервалов зависит от объема выборки: при $n = 50$ $e = 5 \div 8$, при $n = 100$ $e = 10 \div 15$, при $n = 200$ $e = 15 \div 20$, при $n = 400$ $e = 25 \div 30$, при $n = 1000$ $e = 35 \div 40$;
- Интервалы, содержащие менее пяти наблюдений, объединяют с соседними. Однако, если число таких интервалов составляет менее 20% от их общего количества, допускаются интервалы с частотой $n_j \geq 2$.

Обработка результатов прямых многократных измерений

3. Оценка закона распределения по статистическим критериям

Критерий согласия Пирсона χ^2 (хи-квадрат)

— Статистикой критерия Пирсона служит величина $\chi^2 = \sum_{j=1}^e \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$,

где p_j — вероятность попадания изучаемой случайной величины в j -ий интервал, вычисляемая в соответствии с гипотетическим законом распределением $f(x)$.

— Если выполняется неравенство $\chi^2 \leq \chi_{tab}^2$ при заданном уровне значимости и числу степеней свободы $k = e_1 - m - 1$ (e_1 — число интервалов после объединения; m — число параметров, оцениваемых по рассматриваемой выборке), то гипотеза о принадлежности выборки гипотетическому закону распределения $F(x)$ верна

Обработка результатов прямых многократных измерений

3. Оценка закона распределения по статистическим критериям

Критерий Мизеса-Смирнова (ω^2)

- Результаты наблюдений X_i располагают в вариационном ряду от минимального к максимальному;
- Статистикой критерия Мизеса-Смирнова служит величина:

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n (F(X_i) - W)^2 - \frac{0,4}{n} + \frac{0,6}{n^2} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

где $F(X_i)$ — значения предполагаемой теоретической функции распределения,

$W = \frac{2i-1}{2n}$ — накопленная частота;

Обработка результатов прямых многократных измерений

3. Оценка закона распределения по статистическим критериям

Критерий Мизеса-Смирнова (ω^2)

- Если выполняется неравенство $\omega^2 \leq \omega_{tab}^2$ при заданном уровне значимости, то гипотеза о принадлежности выборки гипотетическому закону распределения $F(x)$ верна.

Статистика критерия для нормального распределения, расположив результаты в вариационном ряду, рассчитывается следующим образом:

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n (F(X_i) - W)^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2n} \right)$$

Обработка результатов прямых многократных измерений

3. Оценка закона распределения по статистическим критериям

Составной критерий (*d*-критерий)

— Находят коэффициент $d := \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{S^*}$,

где $S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ — смещенная оценка среднего квадратического отклонения

— Проверяется выполнение условия $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$

Значения величин d_{\min} и d_{\max} при заданном уровне значимости являются табличными.

Обработка результатов прямых многократных измерений

3. Оценка закона распределения по статистическим критериям

Составной критерий (*d*-критерий)

1. Если условие $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$ не выполняется, гипотеза о принадлежности выборки к нормальному распределению отвергается;
 2. Проверяются все разности $|X_i - \bar{X}| \leq z_{p/2} S_X$, где $z_{p/2}$ — верхний квантиль распределения нормированной функции Лапласа при заданном уровне значимости.
- Если критерий выполняется для $(n - m)$ разностей, то гипотеза о принадлежности выборки к нормальному распределению принимается.

При $10 < n < 20$ $m = 1$;

При $20 < n < 50$ $m = 2$;

Обработка результатов прямых многократных измерений

4. Определение доверительных интервалов случайной погрешности

- При числе наблюдений $n \geq 15-20$ и нормальном распределении границы доверительных интервалов определяют с помощью Z-распределения при заданному уровне доверительной вероятности;

$$\Delta = \pm z_p S_{\bar{X}}$$

- При числе наблюдений $n < 10-15$ и нормальном распределении границы доверительных интервалов определяют с помощью t-распределения при заданному уровне доверительной вероятности;

$$\Delta = \pm t S_{\bar{X}}$$

Обработка результатов прямых многократных измерений

5. Определение границ неисключенной систематической погрешности Θ результата измерений

Неисключенная систематическая погрешность характеризуется ее границами:

$$\Theta = \pm \sum_{i=1}^N |\Theta_i|, \quad N \leq 3 \quad \Theta = \pm K \sqrt{\sum_{i=1}^N \Theta_i}, \quad N > 4$$

K — коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью, числом составляющих неисключенных систематических погрешностей и их соотношением между собой.

Обработка результатов прямых многократных измерений

5. Определение границ неисключенной систематической погрешности Θ результата измерений

Для доверительной вероятности 0,95 коэффициент принимают равным 1,1.
Для доверительной вероятности 0,99 коэффициент принимают равным 1,4.

Доверительную вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принимают той же, что при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

Обработка результатов прямых многократных измерений

Определение доверительной границы погрешности результата измерений

- При $\Theta / S_{\bar{X}} < 0,8$ неисключенной систематической погрешностью можно пренебречь и принять границы погрешности результата измерения равным $\Delta = \pm t S_{\bar{X}}$
- При $\Theta / S_{\bar{X}} > 8$ случайной погрешностью можно пренебречь и принять границы погрешности результата измерения равным $\Delta = \pm \Theta$
- При $0,8 < \Theta / S_{\bar{X}} < 8$ вычисляют СКО результата как сумму неисключенной систематической погрешности и случайной составляющей и границы погрешности результата измерения:

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\Theta_i^2}{3} + S_{\bar{X}}^2}, \quad \Delta = \pm K S_{\Sigma}, \quad K = \frac{z_p(t) S_{\bar{X}} + \Theta}{S_{\bar{X}} + \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\Theta_i^2}{3}}}$$

Обработка результатов прямых многократных измерений

7. Запись результата измерения

Результат измерения записывается в виде $\bar{X} + \Delta_p$ при доверительной вероятности $P = P_D$. При отсутствии данных о функциях распределения составляющих погрешности результаты измерений представляют в виде $\bar{X}; S_{\bar{X}}; n; \Theta$ при доверительной вероятности $P = P_D$.