Субъективный байесовский метод

Дуда, Харт и Нильсон видоизменили формулы Байеса для выводов в инженерии знаний и предложили метод выводов, названный субъективным байесовским методом.

Прежде всего из формул Байеса следуют соотношения:

$$P[A \mid X] = \frac{P(X \mid A)P(A)}{P(X)},$$

$$P(\bar{A} \mid X) = \frac{P(X, \bar{A})P(\bar{A})}{P(X)},$$

откуда $$\frac{P(A \mid X)}{P(A \mid \bar{X})} = \frac{P(X \mid A)}{P(X \mid \bar{A})} \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

(здесь $\bar{A}$ - дополнительное множество А).

$$\frac{P(A|X,Y)}{P(\bar{A}|X,Y)}=\frac{P(X,Y|A)}{P(X,Y|\bar{A})}\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{P(X|A)P(Y|A)}{P(X|\bar{A})P(Y|\bar{A})}\frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

используя P(A), определим априорные шансы A:

$$O(A)=\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{P(A)}{1-P(A)}$$

и апостериорные шансы A при получении доказательства X.

$$O(A)=\frac{P(A|X)}{P(\bar{A}|X)}=\frac{P(A|X)}{1-P(A|X)}$$

При этом вероятность P и шансы O связаны отношением

P=O/(O+1),

Пусть

$$\lambda_x = P(X \mid A) / P(X \mid \bar{A})$$

отношение правдоподобия при получении доказательства X

Тогда из

$$\frac{P(A \mid X)}{P(A \mid \bar{X})} = \frac{P(X \mid A)}{P(X \mid \bar{A})} \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

$$O(A \mid X) = \lambda_x O(A)$$

Аналогично, если определить отношение правдоподобия λ_y

из

$$\frac{P(A \mid X,Y)}{P(\bar{A} \mid X,Y)} = \frac{P(X,Y \mid A)}{P(X,Y \mid \bar{A})} \frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{P(X \mid A) P(Y \mid A)}{P(X \mid \bar{A}) P(Y \mid \bar{A})} \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

Апостериорный шанс из независимых доказательств X и Y

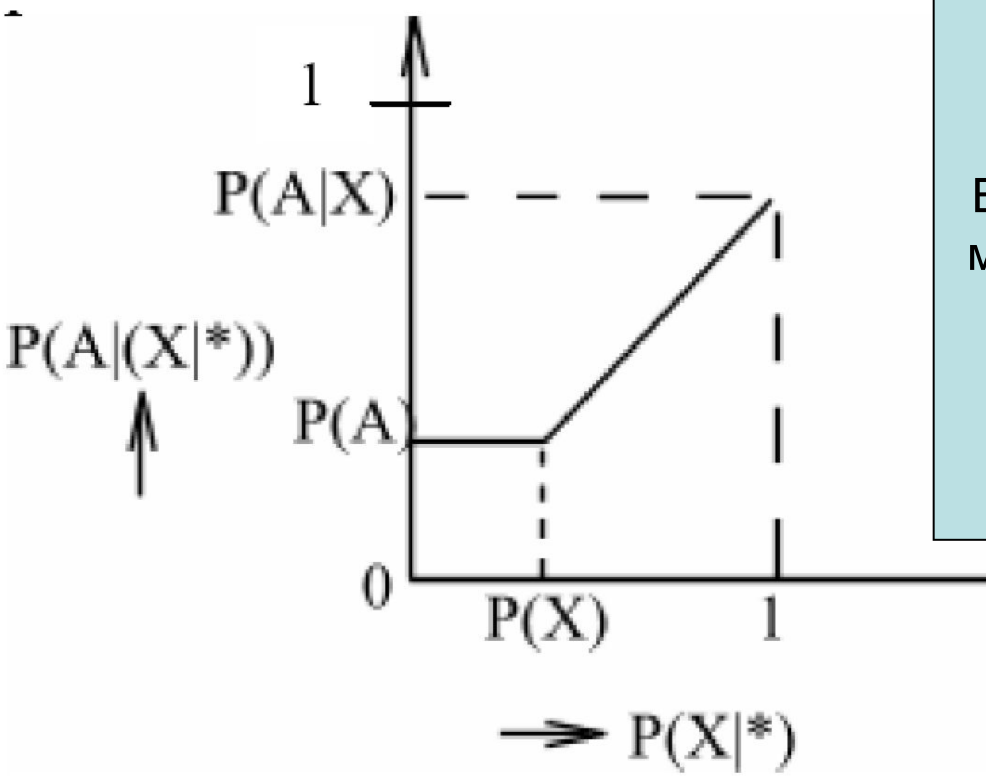
$$O(A \mid X,Y) = \lambda_x \lambda_y O(A)$$

Априорную вероятность P(A) гипотезы A (или априорные шансы O(A)) и правдоподобные отношения λ_x, λ_y, приписанные правилами, задаются на основе знаний эксперта. Если одно из доказательств X или Y, либо оба подтверждаются с вероятностью 1, то из формул

$$O(A \mid X) = \lambda_x O(A) \qquad O(A \mid X, Y) = \lambda_x \lambda_y O(A)$$

соответственно можно определить апостериорные шансы и апостериорную вероятность A, но если доказательства включают ненадежные данные, то применяют следующий приближенный метод.

Пусть известно (из предыдущих выводов), что доказательство X справедливо с вероятностью P(X|*) со значением в отрезке [0,1]. Тогда апостериорную вероятность P(A|(X|*)) гипотезы A можно задать, например, как



Функциональная зависимость апостериорной вероятности Гипотезы
Если $P(x|*) < P(X)$ то это ничего не меняет для P(A|(X|*)) и она равна P(A),
Если больше то
Она линейно растет до P(A|X)

Пример апостериорной вероятности гипотезы при доказательстве с ненадежными данными

То есть если доказательство подтверждается с вероятностью, меньшей априорной вероятности P(X), то соответствующее правило ничего существенно не дает и не влияет на дальнейшие выводы, но если вероятность больше P(X), то влияние задается линейной функцией. При этом эффективное отношение правдоподобия определяется следующим образом:

$$\lambda_x^{'} = \frac{O(A|(X|*))}{O(A)} = \frac{P(A|(X|*))}{1-P(A|(X|*))}\,\frac{1-P(A)}{P(A)}$$

Для доказательства Y можно определить аналогичное эффективное соотношение правдоподобия $\lambda_y^{'}$. Из сказанного выше следует, что при выводах в случае ненадежных доказательств, можно руководствоваться следующими правилами. Если есть только доказательство X, то λ_x в формуле заменяется на $\lambda_x^{'}$:

$$O(A(X|*)) = \lambda_x^{'}\,O(A),$$

а если одновременно существует независимое доказательство Y, то λ_y заменяется на $\lambda_y^{'}$:

$$O(A\,|\,(X\,|\,*),(Y\,|\,*)) = \lambda_x{}'\lambda_y{}'O(A)$$

Это и есть субъективный байесовский метод.

Здесь возникает проблема: что делать, когда сумма вероятностей подмножеств, для некоторой подцели взаимно опровергающих друг друга, не равна 1. Впрочем, в этом случае можно нормировать вероятности. Но кроме этой проблемы существует проблема необходимости заранее устанавливать априорные вероятности каждого условия, проблема соответствия действительности функции

Пример. Условная вероятность – это вероятность наступления какого-то события s при условии, что уже наступило другое событие l. Условная вероятность обозначается $P(s/l)$. Вероятность наступления двух событий вычисляется следующим образом.

$$P(l\,u\,s)=P(s/l)P(l)$$

В экспертных системах используется еще одно уравнение условной вероятности:

$$P(s) = P(s/l)\cdot P(l) + P(s/\sim l)\cdot P(\sim l) \qquad (1)$$

Рассмотрим использование условной вероятности на примере правил, описывающих экспертную систему фондовой биржи.

1. ЕСЛИ ПРОЦЕННЫЕ СТАВКИ = ПАДАЮТ
ТО УРОВЕНЬ ЦЕН = РАСТЕТ
2. ЕСЛИ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ = РАСТУТ
ТО УРОВЕНЬ ЦЕН = ПАДАЕТ
3. ЕСЛИ ВАЛЮТНЫЙ КУРС ДОЛЛАРА = ПАДАЕТ
ТО ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ РАСТУТ
4. ЕСЛИ ВАЛЮТНЫЙ КУРС ДОЛЛАРА = РАСТЕТ
ТО ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ = ПАДАЮТ

Надо определить вероятность повышения уровня цен. Цель примера не в описании реальной ситуации, а в иллюстрации подхода к решению задачи. Пусть система реализует обратные рассуждения. В части ТО правил, будем искать вывод УРОВЕНЬ ЦЕН = РАСТЕТ.

Подойдет правило 1: УРОВЕНЬ ЦЕН = РАСТЕТ при условии, что ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ = ПАДАЮТ. Используя уравнение 1 условной вероятности, можно оценить эти условия. Прейдем к переменным и заменим *s* на STOCK = РАСТЕТ и *l* на INT = ПАДАЮТ, в результате получим уравнение 2:

P(STOCK=РАСТЕТ)=P(STOCK=РАСТЕТ/INT=ПАДАЮТ)·
·P(INT=ПАДАЮТ)+P(STOCK=РАСТЕТ/INT=НЕ ПАДАЮТ)·
P(INT=НЕ ПАДАЮТ)

Для того чтобы определить, присвоено ли переменной INT значение ПАДАЮТ, надо вернуться к правилу 4:

4. ЕСЛИ DOLLAR=РАСТЕТ,
ТО INT=ПАДАЮТ

Правило 4 преобразуется в уравнение 3:

P(INT=ПАДАЮТ)=P(INT=ПАДАЮТ/DOLLAR=РАСТЕТ)·
·P(DOLLAR=РАСТЕТ)+P(INT=ПАДАЮТ/DOLLAR=НЕ РАСТЕТ)·
·P(DOLLAR=НЕ РАСТЕТ) (3)

Поскольку ни в одной из правил в части ТО нет переменной DOLLAR , т. е. значение вероятности для нее определить нельзя, это значение должно быть введено пользователем. По этой же причине условную вероятность так же должен задать пользователь (она не входит в часть ТО правил). Давайте установим вероятности появления некоторых событий, исходя из собственных обоснованных соображений:

P(DOLLAR=PACTET)=0,6.

Согласно теории вероятностей, сумма вероятностей появления и непоявления какого-либо события равна 1. В дальнейшем это свойство вероятностей будет часто использоваться. Исходя из сказанного, можно записать:

P(DOLLAR=HE PACTET)=1-P(DOLLAR=PACTET)=1-0,6=0,4.

Присвоим значения всем условным вероятностям:

P(INT=ПАДАЕТ/DOLLAR=PACTET)=0,8.

P(INT=ПАДАЕТ/DOLLAR=HE PACTET)=0,1.

Отметим, что сумма условных вероятностей для противоположных событий не равняется 1. Противоположными в условной вероятности будут события DOLLAR=РАСТЕТ и DOLLAR=НЕ РАСТЕТ. Подставив присвоенные значения в уравнение 3, получим:

$$P(\text{INT=ПАДАЕТ})=0{,}8\cdot 0{,}6+0{,}1\cdot 0{,}4=0{,}52.$$

Из основного свойства вероятности находим:

$$P(\text{INT=НЕ ПАДАЕТ})=1-0{,}52=0{,}48.$$

Для того чтобы найти P(STOCK=РАСТЕТ) пользователь должен задать значения условных вероятностей:

$$P(\text{STOCK=РАСТЕТ/INT=ПАДАЕТ})=0{,}85.$$

$$P(\text{STOCK=РАСТЕТ/INT=НЕ ПАДАЕТ})=0{,}1.$$

Вероятность P(STOCK=РАСТЕТ) можно вычислить по уравнению 2:

$$P(\text{STOCK=РАСТЕТ})=0{,}85\cdot 0{,}52+0{,}1\cdot 0{,}48=0{,}49 \text{ или } 49\%.$$

Получив все значения вероятностей, пользователь может определить свою политику на бирже.

Нижняя вероятность предпосылки

- Шаферовский подход позволяет интерпретировать доверие и правдоподобие как границы интервала возможного значения истинности гипотезы:
- доверие ≤ какая-то мера истинности ≤ правдоподобие.
- Полагается, что:
- Доверие к гипотезе = {сумма масс свидетельств, однозначно поддерживающих гипотезу}.
- Правдоподобие = 1 − {сумма масс всех свидетельств, противоречащих гипотезе}.
- Например, пусть у нас есть гипотеза «кот в коробке мертв.» Если для неё доверие 0.5 и правдоподобие 0.8, то это значит, что у нас есть свидетельства (общей массой 0.5) однозначно указывающие, что кот мертв; но имеются и свидетельстве (общей массой 0.2), однозначно указывающие, что кот жив (правдоподобие «кот мертв» = 1 — 0.2 = 0.8). Оставшаяся масса (дополняющая 0.5 и 0.2 до 1.0) — она же зазор между правдоподобием 0.8 и доверием 0.5 — соответствует «неопределённости» ("универсальной" гипотезе), наличию свидетельств, что кот в коробке точно есть, но не говорящих ничего о том, жив он, или мертв.
- Итого, интервал [0.5; 0.8] характеризует неопределённость истинности исходной гипотезы исходя из имеющихся свидетельств.

Гипотеза	Масса-Доверие-Правдоподобие		
Нулевая (нет кота)	0	0	0
Жив	0.2	0.2	0.5
Мёртв	0.5	0.5	0.8
Универсальная (то ли жив, то ли мертв)	0.3	1.0	1.0

Масса "нулевой" гипотезы устанавливается равной 0 по определению (она соответствует случаям «нет решения» или неразрешимому противоречию между свидетельствами). Эти приводит к тому, что доверие к "нулевой" гипотезе равно 0, а правдоподобие "универсальной" 1. Так как масса "универсальной" гипотезы вычисляется из масс гипотез "Жив" и "Мертв", то её доверие автоматически получается равно 1, а правдоподобие "нулевой" гипотезы 0.

Возьмем несколько более сложный пример, демонстрирующий особенности доверия и правдоподобия. Допустим, мы с помощью набора детекторов регистрируем единичный далекий сигнальный огонь, который может быть одного из трёх цветов (красный, жёлтый, либо зелёный):

Гипотеза	Масса	Доверие	Правдоподобие
Нулевая	0	0	0
Красный	0.35	0.35	0.56
Жёлтый	0.25	0.25	0.45
Зелёный	0.15	0.15	0.34
Красный или Жёлтый	0.06	0.66	0.85
Красный или Зелёный	0.05	0.55	0.75
Жёлтый или Зелёный	0.04	0.44	0.65
Универсальная	0.10	1.00	1.00

где, например: Доверие(Красный или Желтый) = Масса("Нулевая" гипотеза) + Масса(Красный) + Масса(Желтый) + Масса(Красный или Желтый) = 0 + 0.35 + 0.25 + 0.06 = 0.66

Правдоподобие(Красный или Желтый) = 1 - Доверие(отрицание "Красный или Желтый") = 1 - Доверие(Зеленый) = 1 - Масса("Нулевая" гипотеза) - Масса(Зеленый) = 1 - 0 - 0.15 = 0.85

События данного набора не должны рассматриваться как пересечение событий в вероятностном пространстве, так как они заданы в пространстве масс. Правильнее рассматривать событие «Красный или Желтый» как объединение событий «Красный» и «Желтый», и (см. аксиомы теории вероятностей) P(Красный или Жёлтый) ≥ P(Жёлтый), и P(Универсальная)=1, где «Универсальная» гипотеза соответствует «Красный», «Желтый» или «Зеленый». В ТДШ, масса «Универсальной» гипотезы соответствует части свидетельств, которые не могут быть отнесены к какой-либо другой гипотезе; то есть свидетельства, которые утверждают, что какой-то сигнал был, но совершенно не говорят о его цвете. В этом примере, свидетельствам «Красный или Зеленый» приписана масса 0.05. Такие свидетельства могли бы быть получены, например, от людей со слепотой к Красному/Зелёному. ТДШ позволяет нам взвешено учесть такие свидетельства.